Minkowski　数の幾何学　（その２）

今野秀二

Minkowski の全集をみると論文は次のように分類されています．（１）２次形式（７編），（２）数の幾何（Hermite 宛て書翰も含めて１４編），（３）幾何（６編），（４）物理（４編）．これらの論文で（２）は分量が多いだけではなく，内容的に（１）及び（３）の研究が（２）と深く関わり合っていることから、数の幾何が Minkowski の主要な関心事であったことを教えてくれます．このことは Hilbert が「Minkowski の最も創造的な領域は数の幾何である」と述べていることとも符合します．Minkowski にはほかに２つの著書（１）Geometrie der Zahlen (1896 年，1910 年)，（２）Diophantishe Approximationen (1907 年) があります．（１）の 1910 年版は Hilbert-Speiser 編で，1909 年 Minkowski が死んだ後出版されたものです．この本は論文とは別のスタイルで書かれているが，数の幾何の限られた話題について問題をできるだけ普遍的に定式化しようとしていて，読者の想像力を駆り立てるすぐれた本であると思います．(2) は数の幾何の応用として，２次元パッキングや Diophantin 近似がその内容をなしています．

今回は数の幾何について（１）の内容を纏め，その延長として数の幾何に関する最後から２番目の論文（３次元パッキング）を紹介します．代数的数の有理近似，連分数など，彼の数の幾何の全貌にはまだまだ届き得ずにいることをお断りしておきます．

§１　簡単のため実 n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ の点 x はその位置ベクトルと同一視することにして，それらを $x={}^t(x_1,\cdots,x_n)$ などと表すことにする．また $\mathbf{R}^n$ には内積を $<x,y>={}^txy\ (x,y\in\mathbf{R}^n)$ で定義しておきます．

$\mathbf{R}^n$ に含まれる階数が n の自由 $\mathbf{Z}$- 加群を格子と呼びます．例えば $\mathbf{Z}^n$ は格子で，$\{e_1,\cdots,e_n\}$（$e_i\in\mathbf{R}^n$ は第 i 成分のみ１他は 0）を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトル

とすれば $\mathbf{Z}^n = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}e_i$ と表せるが一般の格子 $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ についても1次独立なベクトル $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} \subset \Lambda$ をとり $\Lambda = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}\xi_i$ と表せます．

以後 $K \subset \mathbf{R}^n$ はいつも原点に関し対称かつ凸な有界閉集合とし，その体積を $\mathrm{vol}(K)$ と書くことにする．このとき Minkowski の第一の定理は次のように表せます．

[1-1] $\mathrm{vol}(K) \geq 2^n$ なら K は原点 O 以外の格子点を含む．

この定理はとても単純だが Minkowski はこれから驚くほど多様な数論の成果を導いています．まず関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ は条件

i) $f(tx) = |t| f(x) \qquad (t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^n)$

ii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^n)$

を満たしているものとし，この f を（Minkowski に従い）距離関数と呼ぶことにします．

例えば $\mathbf{R}^n$ のノルム $f(x) = N(x) = < x, x >^{1/2}$, 実正定値2次形式 $q(x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ に対して $f(x) = q(x)^{1/2}$ などはこの条件を満たしている．また，実数 $p \geq 1$ に対して

$$f(x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad x = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

も距離関数になります．

距離関数 $f(x)$ に対し $K = K_f = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \leq 1\}$ と定義すれば f の条件から K は有界閉領域，原点対称かつ凸集合になります．逆に K が有界閉領域で原点対称かつ凸集合なら $K = K_f$ となる距離関数 f を考えることができます．Minkowski は K を f の "Eichkorper" と呼んでいます．この距離関数を使うと **[1-1]** は次のようになります．

[1-2] $K = K_f$ のとき，原点以外の格子点 $l \in \mathbf{Z}^n$ で

$$0 < f(l) \leq \frac{2^n}{\mathrm{vol}(K)^{1/n}} \tag{2}$$

を満たすものがある．

次に $n \geq 2$ に対し r, s は $n = r + 2s$ を満たす0または正の整数とします．

このような r, s に対して 1 次形式

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \quad x = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{3}$$

で条件

i) v_i $(1 \leq i \leq r)$ は実係数，他は複素係数で $v_{r+s+j} = \overline{v_{r+j}}$ $(1 \leq j \leq s)$,

ii) $\Delta = \det(\alpha_{ij}) \neq 0$

を満たすものを考えます．

この $\{v_i\}$ に対して $t_1 > 0, \cdots, t_n > 0$ かつ $t_{r+s+j} = t_{r+j}$ $(1 \leq j \leq s)$ なる $\{t_i\}$ を任意にとり

$$K = K_{t_1, \cdots, t_n} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |v_i(x)| \leq t_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

と定義すれば，これは $\mathbf{R}^n$ の有界閉領域で原点対称かつ凸集合となるが，その体積を計算すると

$$\mathrm{vol}(K) = 2^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{t_1 \cdots t_n}{|\Delta|} \tag{4}$$

になります．そこで **[1-1]** を適用すると次の **[1-3]** が得られます．

[1-3] $\prod_{i=1}^{n} t_i \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^s |\Delta|$ （例えば $\prod_{i=1}^{n} t_i \geq |\Delta|$ ）ならば原点以外の格子点 $l \in \mathbf{Z}^n$ で

$$|v_i(l)| \leq t_i \qquad \text{for all} \quad i = 1, \cdots, n \tag{5}$$

を満たすものがある．

註 1 (5) は $s > 0$ なら $|v_i(l)| \leq t_i$ をすべて $|v_i(l)| < t_i$ で置き換えることができる．しかし $s = 0$ のときはどれか 1 つ例えば $i = 1$ だけそのままで，他はすべて $|v_i(l)| < t_i$ とできることが知られています．

(4) で特に $t = t_1 = \cdots = t_n$ なら $\mathrm{vol}(K_{t, \cdots, t}) = 2^n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{t^n}{|\Delta|}$ ゆえ **[1-1]** より

[1-4] ある $l \in \mathbf{Z}^n$, $l \neq 0$ があり

$$|v_i(l)| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{s}{n}} \cdot |\Delta|^{\frac{1}{n}} \qquad \text{for all} \quad i = 1, \cdots, n \tag{6}$$

次に任意の $p \geq 1$ に対して集合

$$K_p = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \middle| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |v_i(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\}, \qquad (x = {}^t(x_1, \cdots, x_n)) \tag{7}$$

はやはり有界閉領域で原点対称かつ 凸 となるが Minkowski はこの体積を計算していて

$$\mathrm{vol}(K_p) = 2^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^r 2^{-\frac{2s}{p}} \Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)^s}{n^{-\frac{n}{p}} \Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)^r} \frac{1}{|\Delta|}. \tag{8}$$

を導いています（[1] p.122）．このことから次の定理が得られます．

[1-5] ある $l \in \mathbf{Z}^n$, $l \neq 0$ があり

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |v_i(l)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^s \cdot \frac{n^{-\frac{n}{p}} \Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)^r}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^r 2^{-\frac{2s}{p}} \Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)^s} |\Delta| \right)^{\frac{p}{n}}. \tag{9}$$

とくに $p=1$ の場合には任意の $t>0$ に対して

$$\mathrm{vol}\{x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_i |v_i(x)| \leq t\} = \frac{2^r}{n!} \cdot \frac{\pi^s}{|\Delta|} \cdot t^n \tag{10}$$

となるから (6) と同様にして次のことが分かります．

[1-5] ある $l \in \mathbf{Z}^n$, $l \neq 0$ があり

$$\sum_i |v_i(l)| \leq \left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^s n! \cdot |\Delta| \right)^{\frac{1}{n}}. \tag{11}$$

ここで左辺に算術幾何平均を適用すると

$$|\prod_{i=1}^{n} v_i(l)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot |\Delta|. \tag{12}$$

次に k は代数的数体でその次数が $n \geq 2$ とします． k の実（虚）の素点の数をそれぞれ $r, (s)$ とする．すなわち $n = r + 2s$, $(r, s \geq 0)$．さて k の整数環 $\mathfrak{o}$ を $\mathbf{Z}$ 加群とみて，その基の第 i 共役を $\{\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in}\}$ と書く．これから得ら

れる1次式 $v_i(x)=\sum_j \alpha_{ij}x_j$ $(1\le i\le n)$ が (3) の条件 (i) を満たすよう番号 i をつけておきます．こうすると $\Delta=|\det(\alpha_{ij})|$ に対して $d_k=\pm|\Delta|^2$ は k の判別式となり，また $0\neq l\in\mathbf{Z}^n$ に対する $|\prod_i v_i(l)|$ は 0 でない整数のノルム故 ≥ 1 となります．以上の準備のもとで $s>0$ のときは (6) から，$s=0$ のときは (12) から $d_k>1$ （Kronecker の予想）が証明されます．

Kronecker の予想「代数的数体 k が有理数体でないなら $d_k>1$ 」は 1882 年の論文 Grundzuge einer arithmetischen Theore der algebraishen Grossen (Festschrift zu E.Kummer. Crelle Bd. 92. 全集 II) に自明のこととして証明抜きで記されています．この論文は整数論と代数幾何を統一的に論じた大きな論文で，代数関数体の場合分岐する素点があるという事実を踏まえてのものです．

さらに (12) から d_k の下からの評価も得られます．

[1-6] n 次代数体 k の判別式 d_k は $n\ge 2$ のとき $d_k>1$ かつ

$$d_k\ge\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^s\frac{n^n}{n!}\right)^2\qquad(n\ge 2)$$

$n=2$ の場合，この式の右辺は k が実2次体なら 4，虚2次体なら $2.4\cdots$ となります．一方， 実2次体の判別式の最小値は 5 であり，虚2次体の判別式の最小値は $|-3|$ であるから確かに正しいことが分かります．

§ 2　Minkowski は Hermite 定数についてもいろいろ一般化をしています．まず距離関数 f および格子 $\Lambda\subset\mathbf{R}^n$ に対して

$$m_1=\inf\{f(l)\mid l\in\Lambda,\ l\neq 0\}.$$

さらに，$j=2,\cdots,n$ に対して

$$m_j=\inf\{t|f(x)\le t \text{ となる } x\in\Lambda \text{のなかに } j \text{ 個1次独立なものがある}\}\quad(13)$$

と定義すると，明らかに $m_1\le m_2\le\cdots\le m_n$ となります．

[2-1]　$q(x)={}^txQx$ $(x\in\mathbf{R}^n)$ が実正定値2次形式のとき，$f(x)=q(x)^{1/2}$ に対し $K=\{x\in\mathbf{R}^n\mid q(x)\le 1\}$ とし， $m_1,\cdots,m_n$ は上記の通りとすれば

$$\frac{2^n}{n!}\le m_1\cdots m_n\cdot\mathrm{vol}(K)\le 2^n,\qquad(14)$$

$$\mathrm{vol}(K)=\frac{\omega_n}{\sqrt{\det Q}},\qquad \omega_n=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}.\qquad(15)$$

ただし ω_n は n 次元単位球体の体積である．(14) 右辺の不等式は最良の評価だが，左辺はそうではない（[1]）．

[3]　格子 Λ が $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}\xi_i$ とかけるとき $\det\Lambda = \det(<\xi_i, \xi_j>)$ に対して，Λ の基本領域の体積を $\Delta(\Lambda) = \mathrm{vol}(\mathbf{R}^n/\Lambda) = (\det(\Lambda))^{1/2}$ と書くことにする．

さて，任意の距離関数 f および格子 $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ に対して

$$f(\Lambda) = \inf_{0 \neq l \in \Lambda} f(l), \quad \gamma_f(\Lambda) = \frac{f(\Lambda)}{(\det\Lambda)^{\frac{1}{n}}}, \quad \gamma_f = \sup_{\Lambda} \gamma_f(\Lambda) \tag{16}$$

と定義します．とくに $f(x) = N(x) = <x, x>^{\frac{1}{2}}$ のとき $\gamma_n = \gamma_f$ が Hermite 定数で，これについて Minkowski は次の不等式を証明しています．

[3-1] $$\gamma_n \leq 4\omega_n^{-\frac{2}{n}} \qquad ([2]\ \mathrm{I,\ p.255})$$

$$m_1 \cdots m_n \leq \gamma_n^r \cdot (\det\Lambda)^{\frac{r}{n}} \quad (0 \leq r \leq n)$$

第２式は Hermite 定数の下からの評価である．

[4]　Minkowski の数の幾何に関する最後から２番目の論文 Gitterformige Lagerung kongruenter Korper は３次元パッキング問題を取り上げています．

$K \subset \mathbf{R}^n$ が有界閉領域で原点対象かつ 凸 であるとき，もし $\Lambda \cap \{K \text{ の内点}\} = \{O\}$，つまり $K \subset \mathbf{R}^n$ が原点以外の格子点を含まないとき Λ は $K-$admissible と言い，そのような $\Delta(\Lambda)$ の最小値を

$$\kappa(K) = \inf\{\ \Delta(\Lambda) \mid \Lambda \text{ は } K - \text{admisshible}\}$$

と書くことにします．

さて，Minkowski は上記の論文で次の問題を取り上げています．$\mathfrak{K} \subset \mathbf{R}^3$ は原点 0 を内点に含みかつ凸である有界閉領域とする．原点対称とは限りません．$\mathfrak{K}$ を $l \in \Lambda$ だけ平行移動した集合を $\mathfrak{K}+l$ と書くとき，任意の $l_1, l_2 \in \Lambda$ $(l_1 \neq l_2)$ について，$\mathfrak{K}+l_1, \mathfrak{K}+l_2$ が内点を共有しない（たかだか境界点しか共有点をもたない）とき $\mathfrak{K}$ は Λ に関して gesondert と言います（gesondert は「別々に包む」の意）．

問題はこのような $\mathfrak{K}$ に対して**「$\mathfrak{K}$ が Λ に関し gesondert かつ $\Delta(\Lambda)$ が最小となる格子 Λ を求めよ」**となっています.

Minkowski は上記の $\mathfrak{K}$ に対し

$$H(\lambda,\mu,\nu)=\sup\{\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta \mid (\xi,\eta,\zeta)\in\mathfrak{K}\} \qquad ((\lambda,\mu,\nu)\in\mathbf{R}^3) \tag{17}$$

で定義される関数 $H(\lambda,\mu,\nu)$ を考えます. この H は

(i) $H(\lambda,\mu,\nu)>0 \quad (\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0), \quad H(0,0,0)=0$

(ii) $H(t\lambda,t\mu,t\nu)=tH(\lambda,\mu,\nu) \quad (t>0)$

(iii) $H(\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2,\nu_1+\nu_2)\leq H(\lambda_1,\mu_1,\nu_1)+H(\lambda_2,\mu_2,\nu_2)$

の性質をもつが, 逆にこのような H を与えると

$$\mathfrak{K}=\{(\xi,\eta,\zeta)\mid \lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta\leq H(\lambda,\mu,\nu)\ \forall(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbf{R}^3\}$$

が決まります.

さて, $\mathfrak{K}$ に対応する関数を H とすれば, 変換 $P\to P'=-P$ $(P\in\mathbf{R}^3)$ による $\mathfrak{K}$ の像 $\mathfrak{K}'$ には $H'(\lambda,\mu,\nu)=H(-\lambda,-\mu,-\nu)$ が対応しています. このとき, 関数 $(\lambda,\mu,\nu)\to\frac{1}{2}(H(\lambda,\mu,\nu)+H'(\lambda,\mu,\nu))$ は条件 (i),(ii),(iii) を満たすから, この関数に対応する集合を $\frac{1}{2}(\mathfrak{K}+\mathfrak{K}')$ と書くことにします. これは凸かつ原点対称な有界閉領域になります. さらに $\mathfrak{K}$ が Λ に関し gesondert であることと $\frac{1}{2}(\mathfrak{K}+\mathfrak{K}')$ が gesondert であることは同値であることも分かります.

そこで $K=\mathfrak{K}+\mathfrak{K}'$ と置くと, これは原点対称かつ凸となる有界閉領域で, $\mathfrak{K}$ が gesondert という条件は Λ が K admissible なることと同値になります. 従って問題は K に対して「 $\Delta(\Lambda)=\kappa(K)$ となる Λ を求めること」となります. そこで $f(x)$ をこの K に対応する距離関数とします.

求める格子を Λ とすれば, ある $Q=(\alpha_{ij})\in M_3(\mathbf{R})$ について

$$\Lambda=\{\xi=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\cdot l \mid l\in\mathbf{Z}^3\} \tag{18}$$

と表せるから, 列ベクトル $\xi,x\in\mathbf{R}^3$ が $\xi=Q\cdot x$ であるとき $\varphi(x)=f(\xi)$ と定義します. こうすると上の問題は次のように表せます.

$$\varphi(l)\geq 1 \text{ for all } l\in\mathbf{Z}^3, \quad l\neq 0 \tag{19}$$

となる行列 $Q=(\alpha_{ij})$ で $\Delta(\Lambda)=|\det Q|$ が最小となるものを求む.

原点 O 以外に3点 A,B,C を O,A,B,C が同一平面上にないように取れば，$\{A,B,C,-B,-C,-A\}$ を6つの頂点にもつ8面体があるから，それを $O(ABC)$ と書くことにします． Minkowski は条件 “$A,B,C \in \Lambda$ $(A,B,C \neq O)$ かつ Λ は $O(ABC)$ admissible” を満たす8面体 $O(ABC)$ には2つのタイプになることを証明します．

その上で求める Λ は “ある3点 $A,B,C \in \{K$ の境界$\} \cap \Lambda$ が取れて，Λ は $O(ABC)$ admissible ” を使い (19) を有限個の条件に帰着し次の結論を出しています．

[4-1] $\mathfrak{K}$ を与えたとき，$K = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}'$ に対して $\Delta(\Lambda) = \kappa(K)$ となる格子 Λ は次の3つのタイプのいずれかである．

(i) $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,-1),(-1,0,1),(1,-1,0) \in \partial K$ かつ $(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)$ は K の外

(ii) $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0) \in \partial K$ かつ $(1,1,1)$ は K の外

(iii) $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1) \in \partial K.$

ここには図を描けないが，例として $\mathfrak{K}$ が原点を中心にもつ半径 $\frac{1}{2}$ の球体を取ったとき，原点を中心にもつ立方8面体が K を包んでいて，その頂点に格子 Λ の点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ があることを証明しています．立方8面体は立方体の各稜の中点を結び，頂点部分を切り落としたものです．

[1] Geometrie der Zahlen (1910).

[2] Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski I, II.