ヤコビの逆問題の発見

九州大学IMI研究所／日本オイラー研究所
高瀬 正仁

はじめに

カール・グスタフ・ヤコブ・ヤコビ (Carl Gustav Jacob Jacobi) は 1804 年 12 月 10 日，ドイツのポツダムに生れ、1851 年 2 月 18 日，ベルリンで亡くなった．ガウスとともに 19 世紀のドイツの数学史の黎明期に属する数学者である．数学のほとんどすべての領域に足跡を印したが，本稿では「ヤコビの逆問題」に焦点をあて，この問題が発見されるまでの経緯を略記したいと思う．

ヤコビの逆問題はグーペル，ローゼンハイン，ヴァイエルシュトラス，リーマンの手で解決され，この解決を通じて多変数関数論の端緒が開かれたが，ヤコビの逆問題が多変数関数論の泉であるという事実それ自体はヤコビ自身がすでに認識していたところである．この点を文献上で明確に指摘して，ヤコビによるヤコビの逆問題の発見という出来事がそのまま多変数関数論の泉になったことを諒解したいと思う．本稿は全体として多変数関数論形成史叙述のための序論である．

I. オイラーの二論文　曲線の理論から微分方程式へ

楕円関数論の歴史は古く，発見された当初の無限解析の中にすでに端緒が認められるように思われるが，際立った転換点に位置すると見られるのは次に挙げるオイラーの二論文である．

(1) [E251] 微分方程式 $\dfrac{mdx}{\sqrt{1-x^4}}=\dfrac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ の積分について
ラテン語．ペテルブルク科学アカデミー新紀要（Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae）6, 1761 年, pp.37-57．1753 年 4 月 30 日，ペテルブルク科学アカデミーに提出された（記録が残されている）．
(2) [E252] 求長不能曲線の弧の比較に関する諸観察
ラテン語．ペテルブルク科学アカデミー新紀要（Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae）6, 1761 年, pp.58-84。1752 年 1 月 27 日，ベルリン科学アカデミーに提出された（ヤコビの調査による）．

エネストレームナンバーの順に挙げたが，成立時期は E252] のほうが早い．各々の論文のタイトルに見られるように，[E252] が曲線の理論の範疇に所属するのに対し，[E251]

ではオイラーの関心ははっきりと微分方程式に移行している．[E252] がベルリンの科学アカデミーに提出されたのは 1752 年 1 月 27 日．それから一年三ヶ月の後の 1753 年 4 月 30 日に [E251] が科学アカデミーに提出された．この一年有余の間に無限解析は大きな変貌を遂げたと言えるのではないかと思う．

曲線の理論はライプニッツの無限解析の揺籃である．マルキ・ド・ロピタルの著作の『曲線の理解のための無限小解析』の書名に明記されている通り，無限解析のねらいは「曲線を理解すること」にあった．無限解析の手法を適用してさまざまな曲線の弧長を測定することは「曲線の理解」ということの有力な一区域であり，今日のいわゆる楕円積分はその究明を通じておのずと立ち現れてきたのである．その様子を詳細に叙述するのはたいへんな作業になるが，ここではオイラーに認識の転換をうながした事件としてファニャノの名を挙げておきたいと思う．

ファニャノはイタリアの数学者だが，自作の数学論文を集めて編纂した『数学作品集』をオイラーのもとに送付し，オイラーに大きな影響を及ぼしたことで知られている．オイラーの二論文 [E251][E252] はファニャノの論文集に刺激されて成立したのである．
ファニャノの論文集から，オイラーが着目したと見られる五篇の論文を拾いたいと思う．すべてイタリア語で書かれている．

ファニャノの五論文

ファニャノ『数学作品集』より

1. 楕円，双曲線およびサイクロイドの弧の新しい測定がそこから導出される一定理
2. レムニスケートを測定する方法　論文 I
3. レムニスケートの測定に関する第一論文に対する諸補足
4. レムニスケートを測定する方法　論文 II
5. 主 3 次放物線の弧の新しい測定を見つける方法

ファニャノが論文「レムニスケートを測定する方法　第一論文」の前書きで語っているところによると，ベルヌーイ兄弟（ヨハンとヤコブ）はイソクロナ・パラケントリカ，すなわち測心等時曲線の弧長を測定しようとして，それをレムニスケート曲線の弧長測定に帰着させることに成功したという．これを受けてファニャノは，レムニスケート曲線が有名になったはそのためであるという認識を示し，この認識を思索の出発点とした．ライプニッツの無限解析の方法に沿ってレムニスケート曲線の弧長を測定すると「レムニスケート積分」と呼ばれる積分が現れるが，この積分は楕円積分の仲間である．すなわち，レムニスケート曲線はオイラーの論文 [E252] のタイトルに言われている「求長不能曲線」なのである．

「求長不能曲線」の仲間は多く，楕円や双曲線のような古くから知られている曲線もまた求長不能曲線である．この種の曲線に寄せる関心はファニャノにも見られ，ファニャノはレムニスケート曲線の弧長測定を楕円と双曲線の弧長測定に帰着させようと試みた．

ファニャノはこう言っている．

> レムニスケートよりもいっそう簡単な何かある他の曲線を媒介としてレムニ

スケートを作図するとき，イソクロナパラケントリカのみならず，レムニスケートに依拠して作図することの可能な他の無数の曲線の，いっそう完全な作図が達成されることは明らかである．

ファニャノの思索の意図はこれで明らかだが，ファニャノが曲線の理論の範疇で発見した事柄の数々は，微分方程式の理論の範疇に生きようとするオイラーの目には，さながら微分方程式の代数的積分の解法集のように映じたようである．一例を挙げると，ファニャノは，二つの変化量 u, z の間に，a は定量として，

$$u = a\frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

という関係が認められるとき，二つのレムニスケート積分の間に

$$\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int -\frac{a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}}$$

という関係式が成立することを示した（「レムニスケートを測定する方法　論文 I」）．ファニャノはこの発見をレムニスケート曲線の弧長測定の究明の一環として認識したが，微分方程式

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}}$$

の代数的積分を求めて得られなかった当時のオイラーの目には，ひとつの代数的特殊積分が書き下されているように見えたのである．それは，

$$x = -\sqrt{\frac{1 - y^2}{1 + y^2}}$$

という積分である．これを糸口にして，オイラーは上記の微分方程式の完全に一般的な代数的積分

$$x^2 + y^2 + c^2x^2y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1 - c^4} \quad (c \text{ は定量})$$

を発見することに成功した（[E251]）．アーベルとヤコビの楕円関数論の出発点がこうして形成された．

II. ルジャンドルの楕円関数論

楕円関数論の方面でオイラーに続いたのはランデンとラグランジュである．ルジャンドルはここまでの諸成果の集大成を試みて多くの著作を執筆した．論文と著作は下記の通りである．すべてフランス語で書かれている．

1. 楕円の弧を用いる積分について
楕円の弧を用いる積分について　第二論文
二つに分けられているが，実質的に一篇の論文である．王立科学アカデミー紀要、1786 年 (1788 年刊行).
2. 楕円的な超越物について
1793 年.
3. さまざまな位数の超越物と求積法に関する積分計算演習　第 1 巻
Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures
1811 年．第一部，第二部，第三部の三部で編成されている．
4. さまざまな位数の超越関数と求積法に関する積分計算演習　第四部
1814 年．第二巻の一部分.
5. さまざまな位数の超越関数と求積法に関する積分計算演習　第五部
1815 年．第二巻の一部分.
6. さまざまな位数の超越関数と求積法に関する積分計算演習　第六部
1817 年．第二巻の一部分．第四部，第五部，第六部の三部で第二巻が編成された．第二巻の序文の日付は「1817 年 6 月 1 日」.
7. 楕円表の構成
Construction des Tables elliptiques
1816 年 7 月,『積分演習』第三巻の巻頭に配置される予定であった．刊行年に注意．第二巻所収の第六部より早く出版された．この時点では第三巻の全体は未完成である．
8. さまざまな位数の超越関数と求積法に関する積分計算演習　第三巻
1819 年.
9. 楕円関数とオイラー積分概論　第一巻
Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes : avec des tables pour en faciliter le calcul numérique
1825 年.
10. 楕円関数とオイラー積分概論　第二巻
1826 年．実際に刊行されたのは 1827 年 1 月の模様（ルジャンドルがそう言っている、1828 年 10 月 25 日付のアーベルへの手紙参照）.
11. 楕円関数とオイラー積分概論　第三巻
1828 年.「第一の補足」「第二の補足」「第三の補足」という標題の三つの補足で編成されている.「第一の補足」の序文の日付は「1828 年 8 月 12 日」.「第二の補足」の本文の末尾に「1829 年 3 月 15 日」という日付が附されている.「第三の補足」の本文の末尾の日付は「1832 年 3 月 4 日」．1828 年に刊行されたのは，三つの補足のうち,「第一の補足」のみ.「第二の補足」と「第三の補足」の刊行はそれぞれ 1829 年，1832 年になったと推定される．

ルジャンドルの楕円関数論における最初のまとまった著作は「さまざまな位数の超越物と求積法に関する積分計算演習」である．書名に見られる「超越的なもの」というのは，超越的，すなわち代数的な表記をもちえない積分として認識される変化量を指す言葉である．積分曲線の弧長積分はたいていみなやすやすと超越的になってしまうが，ルジャンドルはオイラーにならって曲線を離れ，一般に超越的な積分の作る世界の構造に着目し，分類を試みた．一番身近な「超越的なもの」は円の弧長積分である．その次に位置するもの，すなわちひとつ先の位数の「超越的なもの」は「楕円的な超越物」である．　ルジャンドルは「楕円的な超越物」の，

$$\int \frac{Pdx}{R}$$

という一般的な形状から出発した．ここで，P は変化量 x の任意の有理式，R は x の 4 次多項式 $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4$ の平方根である．そうして変形を繰り返し，この形の積分は

$$H = \int \frac{A + B\sin^2\varphi}{1 + n\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} \quad (\text{AとBは定量})$$

$$\Delta = \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi} \ (\text{cは定量})$$

という形の積分に帰着されることを示し，これを（楕円積分ではなくて）「楕円関数」と命名した．これが数学史上に現れた「楕円関数」という言葉の初出である．Δ に見られる定量 c は楕円関数のモジュールと呼ばれるが，命名者はやはりルジャンドルである．

ルジャンドルはさらに一歩を進めて（ルジャンドルのいう）「楕円関数」の標準形の設定を試みて，三種類の「楕円関数」を提案した．第一種の楕円関数は

$$F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$$

という形の楕円関数であり，レムニスケート曲線の弧長積分はこの仲間である．．第二種の楕円関数は

$$\int \Delta d\varphi$$

という形の楕円関数である．楕円の弧長積分はこの仲間である．第三種の楕円関数は

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\Delta}$$

という形の楕円関数である．ルジャンドルの楕円関数論には極端に大きな創意は認められないが，楕円的超越物の一般形を標準形に帰着させたこと，それを楕円関数と命名したこと，三種類の楕円関数を提案したことは際立っている．ヤコビもアーベルもルジャンドルが整備した理論的枠組みを学ぶことにより，独自の思索を推し進めるための具体的な手掛かりをつかむことができたのである．

III. ヤコビの楕円関数論

楕円関数論におけるルジャンドルの独自の寄与として挙げることができるのは変換理論である．ヤコビはルジャンドルの変換理論に手掛かりを求め，大きく一般化することに成功した．それがヤコビの楕円関数論の端緒となった．ヤコビはアーベルとともにルジャンドルが提案した第一種楕円関数の逆関数を考察し，これを新たに「楕円関数」と呼び，ルジャンドルのいう「楕円関数」のことは「楕円積分」と呼ぶことを提案した．この提案はそのまま今日に継承されている．

楕円関数論に関するヤコビの著作はヤコビ全集，巻1に収録されている．主だったものは下記の通り．

1. ケーニヒスベルク大学のヤコビ氏からシューマッハー氏への二通の手紙の抜粋
フランス語．天文報知，第6巻，第123号，1827年9月．
一通目の手紙の日付:1827年6月13日．
二通目の手紙の日付:1827年8月2日．
2. 楕円関数に関する一定理の証明
ラテン語．天文報知，第6巻，第127号，1827年12月．論文の末尾に記入された日付:1827年11月18日．
3. 楕円関数論の新しい基礎
著作．ラテン語．1829年刊行．序文の日付:1829年2月．
4. 楕円関数に関するアーベル氏の論文，クレルレ氏の雑誌の第2巻、101頁，への付記
フランス語.「クレルレの数学誌」，第3巻(1828年)、85頁．末尾の日付:1828年1月25日．
5. 楕円関数ノート
フランス語.「クレルレの数学誌」．
第一のノート　クレルレ宛書簡の抜粋．第3巻（1828年），192-195頁．日付:1828年4月2日．
第二のノート　クレルレ宛書簡の抜粋．第3巻（1828年），303-310頁．日付:1828年7月21日．
第三のノート　クレルレ宛書簡の抜粋．第3巻（1828年），403-404頁．日付:1828年10月3日．
第四のノート　第4巻(1829年)，185-193頁．日付:1829年1月11日．
6. 楕円関数に関する第一論文と第二論文
ラテン語.「クレルレの数学誌」
第一論文　第4巻(1829年)，371-390頁．日付:1829年4月．
第二論文　第6巻(1830年)、397-403頁．日付:記入なし．
7. 楕円的超越物の理論における新しい基本諸式

ラテン語.「クレルレの数学誌」, 第 15 巻 (1836 年), 199-204 頁. 日付:1835 年 9 月 21 日.

8. 楕円関数に関する二三の式について

ドイツ語.「クレルレの数学誌」, 第 30 巻 (1846 年), 269-270 頁. 日付:1845 年 12 月

9. ルジャンドル『楕円関数の理論　第三補足』の広告

ドイツ語.「クレルレの数学誌」, 第 8 巻 (1832 年), 413-417 頁.

ヤコビとアーベルは楕円関数論の領域でそれぞれの流儀で寄与したが, アーベルは早くから楕円関数論の先に開かれていく世界を展望した. このあたりの消息にはアーベルの天才が鮮明に現れている. アーベルの楕円関数論の端緒を開くのは 1827-28 年の論文「楕円関数研究」論文だが, アーベルはそれよりも早く、1826 年の時点で「パリの論文」, すなわち「ある非常に広範な超越関数族の, ひとつの一般的性質について」という論文を執筆した.「パリの論文」のテーマは完全に一般的な代数関数の積分の世界において加法定理を確立することである。1826 年のアーベルはまだ楕円関数研究に向けて歩み始めたばかりであり, どうしてはじめから楕円関数を越える地点に踏み出すことができたのか, いかにも不思議な光景である. 広い世界を展望することのできる目をもっていたのであろう.

代数関数の積分は今日では「アーベル積分」と呼ばれているが, アーベルには特別の呼称はない. リーマンには「アーベル関数の理論」という論文があるが, このタイトルに見られる「アーベル関数」が指しているのは今日のアーベル積分, すなわち代数関数の積分である. リーマンは楕円関数論におけるルジャンドルの用語法を継承したのである.

アーベルはパリで「パリの論文」を執筆し, 科学アカデミーに提出したが, 評価の対象にならず, 行方不明になった. パリを離れたアーベルは楕円関数論に関する論文を書き続けたが、1828 年,「ある種の超越関数の二, 三の一般的性質に関する諸注意」という論文を執筆した. タイトルに見られる「ある種の超越関数」は「一般化された超楕円積分」を指すが, アーベルはそのような特定のタイプの積分を対象にして加法定理を記述した. 対象となる積分の形が特定されたのに伴って, その分だけ加法定理の形は精密になっている. アーベルは翌 1829 年の春 4 月に亡くなったが, アーベルの没後, ヤコビはこのアーベルの論文を見て, そこから「ヤコビの逆問題」を取り出した.「ヤコビの逆問題」はアーベルとヤコビの数学的精神の交流の中から創造されたのである.

「アーベル積分」と「アーベル関数」という用語の使い方はなかなか安定しなかった. ヤコビの論文には双方の言葉の使用例が見られるが, どちらの言葉も提案したのはヤコビである. この方面でのヤコビの論文は下記の通り. すべてヤコビ全集, 巻 2 に収録されている.

1. アーベルの定理に関する所見

ラテン語.「クレルレの数学誌」, 第 9 巻 (1832 年)、99 頁. 日付:1832 年 5 月

14日.

ヤコビのいう「アーベルの定理」とは加法定理のことである.

2. アーベル的超越物の一般的考察

ラテン語.「クレルレの数学誌」, 第9巻(1832年)、394-403頁. 日付:1832年7月12日.

「超越物」の原語は *transcendentis* で,「超越的なもの」の意. その「超越的なもの」の中に「アーベル的なもの」がある. 一般的にいうと, それは代数関数の積分のことで, 今日の用語では「アーベル積分」と呼ばれている. ただし, ヤコビは一般的な形の代数関数の積分を考えたわけではなく, アーベルの論文「諸注意」で取り扱われた形の積分に考察を限定し, それを「アーベル的超越物」と呼んだ. 少し後の論文では言葉をあらためて, これを「アーベル積分」と呼んでいる.

3. アーベル的超越物の理論が依拠する2個の変化量の4重周期関数について

ラテン語.「クレルレの数学誌」, 第13巻(1835年)、55-78頁. 日付:1834年2月14日.

この論文により今日の多変数関数論の端緒が開かれた. この論文のタイトルでに見られる「2変数4重周期関数」は, 後年の論文では「アーベル関数」と呼ばれることになる.「アーベル関数ノート」参照.

4. ディオファントス解析における楕円積分とアーベル積分の理論の利用について

ラテン語.「クレルレの数学誌」, 第13巻(1835年)、353-355頁. 日付:1834年12月20日.

「積分」は *integral* の訳語. この論文では訳語が変遷し,「超越的なもの」ではなく端的に「積分」という言葉が用いられている. これが「アーベル積分」という言葉の初出である.

5. アーベルの定理の新しい証明

ラテン語.「クレルレの数学誌」, 第24巻(1842年)、28頁. 日付:1842年5月5日.

6. 第2種および第3種アーベル積分の加法定理について

ドイツ語.「クレルレの数学誌」, 第30巻(1846年)、121-126頁. 日付:1845年8月25日.

7. アーベル関数ノート

フランス語. サンクト・ペテルブルク帝国科学アカデミーの物理・数学部門の雑誌, 第II巻, 第7号.「クレルレの数学誌」, 第30巻(1846年)、183-184頁. 論文の末尾に長文の註記が附されている. そこに記入されている日付:1845年10月. この註記において「ヤコビの逆問題」が語られた.

「アーベル関数」という言葉はこの論文にはじめて現れた.

8. エルミートからヤコビへの二通の手紙の抜粋

フランス語.「クレルレの数学誌」, 第32巻(1846年).

一通目の手紙の日付:1843年1月，176-181頁.
二通目の手紙の日付:1844年8月，176-181頁.
エルミートとヤコビの間でアーベル関数の変換と等分の問題が語り合われた.
9. ヤコビからエルミートに宛てた一通の書簡の抜粋
フランス語．ヤコビ全集，第2巻，115-134頁.
日付:1845年8月6日.
10. 第三種のアーベル的およびより高位の超越物におけるパラメータとアーギュメントの交換について
ドイツ語.「クレルレの数学誌」，第32巻(1846年)，185-196頁．日付:1846年5月13日.
11. 超楕円的微分方程式の積分のためのひとつの新しい方法について．およびその完全代数的積分方程式の有理的形状について
ドイツ語.「クレルレの数学誌」，第32巻(1846年)，220-226頁．日付:1846年7月14日.
12. グーペル覚書
ドイツ語.「クレルレの数学誌」，第35巻(1847年)，313-317頁．日付:1847年9月22日.
グーペルはヤコビの逆問題を解決した人として数学史に名を刻んだ人物である．ヤコビの「グーペル覚書」はほとんど唯一のグーペルの評伝であろう.

IV. アーベル関数とヤコビの逆問題

「ヤコビの逆問題」は、1846年のヤコビの論文「アーベル関数ノート」の末尾に附された註記の中で表明された．以下にその註記の訳文を挙げる.

「クレルレの数学誌」第27巻、185頁に掲載された論文において，アイゼンシュタイン氏は関数 $\lambda(u,v), \lambda_1(u,v)$ の性質について，二つのアーギュメント u と v に関する周期の共存の基本原理を適切に把握しなかったために，考え違いをした．論文「二つの変化量をもつ4重周期関数について」(「クレルレの数学誌」，第13巻，55頁）は，この解析学の新分野において正しい諸原理を確立した.【訳註．ここでヤコビが言及したのは1835年の論文「アーベル的超越物の理論が依拠する2個の変化量の4重周期関数について」である.】

関数 $x = \sin\mathrm{am}(u)$ は **2** 次方程式 $A + Bx = 0$ により u に関して与えられる．ここで，A と B は，アーギュメント u の実または虚の各々の有限値に対してただひとつの有限値を取る u の関数である．同様にして，上に確立された二つの方程式

$$\Pi(x)+\Pi(y)=u, \Pi_1(x)+\Pi_1(y)=v$$

が与えられたとき，量 x と y は **2 次**方程式

$$A+Bt+Ct^2=0$$

の二根であることが見いだされる．ここで，A, B, C は二つのアーギュメント u と v の実または虚のあらゆる有限値に対してただひとつの有限値を取る，u と v の関数である．まさにそこのところが，関数 x と y の真実の性質なのである．関数 $\sin \operatorname{am}(u)$ の特徴は**商** $-\dfrac{B}{A}$ であることである．そこでアイゼンシュタイン氏は，類推により，アーベル積分の理論では**商の商**を考察しなければならないと言っている（190 頁）．だが，**商の商**とは何なのであろうか．それはまったく単純にも**商**なのである．

同論文において，アイゼンシュタイン氏は，楕円関数の理論において遭遇するある種の二重無限積を考察したが，それらの無限積は諸因子を並べる順序に応じて相異なる値を取る級数の仲間であることを認識しなかった．これらの誤りはもう一篇の論文（同巻、285 頁）でも再現されたが，それらは，アイゼンシュタイン氏がそこで関数 $\Theta(x)$ に関する間違った諸式を確立してしまった原因になった．正しい諸式はずっと前に第 4 巻、382 頁の論文で与えられた．

X は x の 6 次の多項式として，ヤコビは二つの積分

$$\Pi(x)=\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \Pi_1(x)=\int \frac{xdx}{\sqrt{X}}$$

を用いて連立方程式

$$\Pi(x)+\Pi(y)=u, \Pi_1(x)+\Pi_1(y)=v$$

を設定した．そうして量 x と y のそれぞれを二個の変化量 u, v の関数と見て，これを

$$x=\lambda(u,v), y=\lambda_1(u,v)$$

と表記した．これがヤコビのいう「アーベル関数」である．楕円関数論において，ルジャンドルのいう第一種楕円関数，すなわちヤコビのいう第一種楕円積分の逆関数に着目するとヤコビのいう楕円関数が認識される．ヤコビは「アーベルの定理」に導かれて楕円関数のアナロジーをたどり，アーベル関数に到達した．そのアーベル関数の「真実の性質」を追求することがヤコビの数学的意図であった．

数学的意図は問題を提出することによって明らかになる．ヤコビの見るところ，アーベル関数 $x=\lambda(u,v), y=\lambda_1(u,v)$ の真実の性質は，それらが 2 次方程式

$$A+Bt+Ct^2=0$$

の二根であるという．ここで，A, B, C は二つの変化量 u, v の実または虚の一価関数であるから，アーベル関数は二価関数であり，しかも 4 重の周期性を備えている．ヤコビはこのような状勢が成立することに確信があったのであろう．その確信こそ，「ヤコビの逆問題」の泉である．註記に附せられた「1845 年 10 月」という日付を，くれぐれも心に留めておきたいと思う．