ノイズの歴史

飛田武幸

津田塾大学・数学史研究会
平成２３年１０月２９-３０日

1　承前

ノイズの歴史については、すでに第１７回 (2006) の数学史シンポジウムで Dr. Si Si の報告があったが ([13] 参照)、今回はそれを受けて、さらに考察を進めたい。

事実の歴史、確率論の立場から

J. Bernoulli, 1713 Ars Conjectandi, stochastice 登場
C. F. Gauss, 1809 ～ 1828 誤差論など
R, Brown, 1827 ブラウン運動を科学の対象
A. Einstein, 1905 （IEEE は 2005 年にノイズ 100 周年）
H. Poincaré, 1908 偶然の概念
N. Wiener, 1923 Differential space
A.N. Kolmogoroff, 1933:
伊藤 清, 1944. 確率論の基礎
P. Lévy 1934, 1937　確率過程
C.E. Shannon and W. Weaver 1949
N. Wiener, Frequency modulation 1958
White Noise

2　いくつかの視点

ノイズとか偶然現象、ランダムなどの言葉を常識語とせず、数学的に明確に定義して、確率論の基礎を再考したい。

ただ、Hilbert の　Grundlagen der Geometrie のように、公理系のみから出発するのに倣うのではなくて、そこには確率論固有の思想を踏まえた展開がある。

(1) 確率過程の Innovation の立場から。

離散パラメータの場合

時系列 $X(n)$ が時刻 n で新しく獲得する情報（それは過去と独立）を表す確率変数 $Y(n)$ を この時系列の **innovation** として、それを求める方法が論じられた。20 世紀前半に大いに議論されたが、著しい結果は寡聞にして承知していない。パラメータが離散的なことの disadvantage でもあろうか？

連続パラメータ $X(t)$ の場合

P. Lévy の提案。 それは 1951 Univ. Calif. の講義録で stochastic infinitesimal equation として示された。

$$\delta X(t) = \Phi(X(s), s \le t, Y(t), t, dt)$$

$Y(t)$ が innovation である。それは $X(t)$ が微小時間区間 $[t, t+dt)$ において獲得した情報を記述する。多くは理想的な（超）確率変数となる。それを求めるのは、一般には困難な課題である。しかし、ガウス過程の場合には例外的に一般論がある。他 線型過程など、いくつかの場合にそれぞれの方法による若干の結果が、知られている。

$\{Y(t)\}$ は各時点で独立であり、ノイズの候補と考えてよかろう。

(2) Reduction の立場から。

Descartes, Discourses de la méthode, 1637 参照。

偶然現象の解析には、その現象を**独立** な確率変数系の関数として表し、その解析を行うのが望ましい。これが Reduction（帰納化, 要素還元）の立場である。当然これに synthesis （関数形で表現する）が従う。

Lévy の　stochastic infinitesimal equation は Reduction の一つの具体的手法である。この方法は **因果性** (causality) をみたすという大きな利点がある。

(3) Idealized elemental random variables。

上の (2) へのアプローチとして、独立変数系の関数として表わされる現象の解析を準備することが考えられるし、この理論自身もまた興味深い数学の問題である。それは無限次元解析である。最も基本的なところは、独立変数系をどのように定義するかであって、その系は idealized elemental random variables (i.e.r.v.'s) からなるものでなければならない。それは、独立 同分布の確率変数（超確率変数でもよい）であり、各々は素なものでなければならない。

順序集合をパラメータ空間に選ぶ。それが離散的な場合と連続的な場合とでは、事情が決定的に異なる。離散的なときは独立同分布 (i.i.d.) の列を選べばよいので簡単であり、その関数の解析も無難に行える。

Quotation from Lévy's book 1948.

" *Observation importante.* – Dans l'étude des problèmes relatifs aux probabilités dénombles, pour simplifier le langage, dans les cas où cela peut se faire sans ambiguïté, il nous arrivera d'énoncer une propriété presque sùre comme si elle était sùre. ......"

連続パラメータのときは次節で詳しく扱う。

[参考 1] Noise had a glorious birth, (IEEE Signal Processing Magazine 2005). We can now discover it quite naturally.

[参考 2] An old riddle says

What comes with a carriage and goes with a carriage, is of no use to the carriage and yet the carriage cannot move without it ? H. Davis

The answer is **a noise.**

3 確率論の展開の中で

1. 確率の概念の例による再考察。

偶然現象、ゆらぎ etc. 確率論は前もって、他者により設定されているものとは考えない。

C.F Gauss. 誤差論、測量や観測の中からガウス分布が認識された。

情報理論におけるエントロピー。

中 研一。「なまず」の網膜 ⟶ ホワイトノイズ解析へ。

文章の中で、それぞれの単語の配列。確率的現象として。

D. Mumford, Pattern theory,

AMS Notice Nov.2010. Uncertainty and Mathematical modeling. Underlying process, embedding.

2. ノイズの発生・構成。

ここでは標準的なものを考えるが、1934 年のレヴィの結果 [3] が参考に

なる。

種々のノイズが考えられるが、標準的な場合を考えよう。方法としては、話を具体化するため、パラメータ空間を $I = [0,1]$ とする。離散変数による連続量の近似は、実数の2進法展開がモデルになる。

時間・空間のパラメータの考えは [2] 参照。

(1) 区間 I を 2^n 個の等区間 $\Delta_k^n, 1 \leq k \leq 2^n$ に分割する。各小区間に i.i.d. の要素 X_k^n を対応させる。$E(X_k^n) = 0$ とするが、分散については、分散の和 $\sum_1^{2^n} V(X_k^n)$ を一定 $(= 1)$ にするため,$V(X_k^n) = 2^{-n}$ とする。各確率変数の標準偏差（スケールを表す）は $2^{-n/2}$ である。区間の長さで割ってスケールあたりの確率変数としては $\frac{X_k^n}{2^{-n}}$ である。$n \to \infty$ のとき長さは無限大になる。

一方、和 $\sum_1^n X_k^n$ はすでに規格化されているので、その分布は標準ガウス分布に近づく。

連続する小区間の和が区間 $[a,b]$ となったとする：

$$\sum_k \Delta_k^n = [a,b].$$

そのような k について和

$$S(n;a,b) = \sum_k X_k^n$$

をとれば、$n \to \infty$ のとき $S(n;a,b)$ の分布はガウス分布 $N(0,b-a)$ に近づく。区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ が重なり合う区間がなければ $S(n;a,b)$ と $S(n,c,d)$ とは独立である。こうして $\{X_k^n\}$ はブラウン運動 $B(t), t \in [0,1]$ を近似しているとみることができる。また、X_k^n はホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ を近似する。

上の近似で各変数 X_k^n は分散有限としたことに注意したい。このとき、有限とした値は 0 でなければ何程でもよく、大きさは問わない。ガウス分布はすべて同じタイプだから。したがって理想的なノイズは、この状況の下では、**ただ一種類**しかない。

(2) I の分割は (1) と同じとする。ただし (1) では分散に着目したが、同じく加法性をもつ平均値に注目する。さらに X_k^n は、とる値が最も単純な場合（素であることの要求から）、すなわち、二つの値のみ、スケールに着目したいので負でない値、たとえば 1 と 0 として、それぞれの値をとる確率を p_n と $1 - p_n$ とする。ここでは、和 $S(n) = \sum_1^{2^n} X_k^n$ の平均値 np_n を n に無関係な値 $\lambda(> 0)$ となることを要求する。これもスケールに対する要請から来る。

周知のことであるが、$n \to \infty$ のとき、$S(n)$ の分布は平均値（強度, intensity である）λ のポアソン分布に収束する（小確率の法則）。

ここでも (1) のように $S(n)$ の部分和を考える。I の部分区間 $[a,b], b-a<1$ に対応する部分和は 平均値 $(b-a)\lambda$ のポアソン分布に収束する。区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ とが重なりあう区間がなければ、両者は独立である。よって、$S(n)$ は強度が λ のポアソン過程 $P(t)=P(t,\lambda)$ を近似していることがわかる。

このとき、ノイズ $\dot{P}(t)$ の近似は X_k^n によるのではなく、微小区間 Δ をとり $\sum_{\Delta_k^n \subset \Delta} X_k^n$ を $|\Delta|$ で割った極限を考えることになる。それは近似的に $\frac{X_k^n}{2^{-n}}$ としてよい。やはり長さ無限大のベクトルに近づく。

ここで**重要な注意**がある。上の極限を考えるとき、強度 λ を天下り的にきめた。$\lambda \neq \lambda'$ ならば、$P(t,\lambda)$ と $P(t,\lambda'$ とは違ったタイプの分布をもつ。こうして違ったタイプのポアソン型確率過程の系

$$\mathbf{P} = \{P(t,\lambda), \lambda \in (0,\infty)\}$$

が得られる。したがってノイズには**連続無限個の違ったタイプ**の要素が得られる。それらの要素はどれも 素 である。

$P(t,\lambda)$ を組み合わせて 複合ポアソン過程が定義されるが、組み合わせ方にも、若干の制限はあるが、多くの自由性をもつ。

我々は、(1) と (2) の代表的なノイズを考えたが、両者の相違はどこにあるのかという問いがあろう。一つの観点を述べよう。(1) は区間 I を時間のパラメータ集合とみる立場で、時間の推移による X_n^k の変化を意識する。(2) は各微小な確率変数のスケール、減少のあり方に着目するものである。

本質的にはこれら二種類で尽きることは、加法過程とくにレヴィ過程を取り上げて、独立変数列に代えたことから来る。レヴィ過程の分解を受け入れて、素な要素として、ガウス過程及び強度を種々に変化させたポアソン型過程とで尽きるという事実から導かれる。

3, 偶然事象、偶然現象。

「偶然」については、古くから議論されていたようであるが、ここでは一応 20 世紀初頭の Poincaré の論説にまで遡る（[7] 参照)。 その思想は"現在に活かされる考え"だと思われるからである。Poincaré は、偶然現象と理解される種々の例を挙げて、「我々の無知をはかる尺度が偶然である」、また「偶然現象は法則が未知である現象」などといっている。これも参考にしたい。

そのほか、コメントは多々あるが、本稿では、次のようにしよう。

確率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ が構成できて、考えたい現象が、この空間の事象または確率変数として表現される場合、**偶然現象**と呼ぶ。この時の確率空間は「抽象（的）ルベーグ空間」とする。（当然、でたらめ　とか　ランダム性　などは予め期待はしない。）

[註]　抽象ルベーグ空間は、簡単にいえば、アトムは許すが、残りはルベーグ測度空間と同型になるような測度空間である。ここでは、ルベーグ式の微積分が自由にできる。以下の 4 節（特にアナログの場合）参照。

ここで、繰り返し注意することは、確率が前もって与えられて、演習問題を解くのではなくて、確率空間を我々が与えて偶然現象にする、すなわち確率空間を積極的に構成するのである。

4. 独立の意義。

確率空間を決めても、そこで積分論のみを展開するものではない。現象を記述する確率変数とその分布があり、もっとも重要なことは **独立** の概念が主役を占めることである。i.e.r.v. もノイズの概念もこれに基づく。積分論は手段に過ぎない。

4　デジタルからアナログへ

ノイズに添えられるパラメータがあり、離散的な場合（代表としてパラメータ空間が Z のとき）と連続的（代表は R^1）があり、前者に比して後者にはおおくの注意点があることは前述の通りである。それだけに連続パラメータの場合は興味深く豊富な内容がある。この節では、そのことについて簡単な考察を行いたい。

確率空間をきめたとき、それは抽象ルベーグ空間とすることを要請した。連続パラメータ R^1 のとき、各 $X(t)$ が通常の確率変数で、$\{X(t), t \in R^1\}$ が独立変数系となるような場合は除かれる。形式的には、これが i.i.d. の類似になるのだが、それは可算性のある抽象ルベーグ空間には収まらない。

3 節 2. の議論から 3 種類の典型的なノイズの系を取り上げることができる。

(1) から、ブラウン運動の時間微分としてホワイトノイズ $\dot{B}(t)$.

(2) から強度 $\lambda(u)$ のポアソン過程 $P(t, \lambda)$ の時間微分　ポアソンノイズ $\dot{P}(t)$,

(3) また ” 空間 ” 微分の　($t = 1$ として) $P'(u, \lambda)$.

以上の 3 種類が得られる。

ここでは、代表的に（重要な）ホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ をとりあげる。

$\dot{B}(t), t \in R^1$ は標語的にいえば、連続無限個の，しかも長さ無限大のベクトルである（cf. 朝永の説明）。これを変数系にして関数を考えるが、単項式 $\dot{B}(t)^p$ でさえ「繰りこみ」が必要となる。繰りこんだ結果を : $\dot{B}(t)^n$: とかく。

微分作用素は

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial \dot{B}(t)}$$

として自然な形で定義されていて、消滅作要素となる。その共役作用素は生成作用素である。

注意したい式として

$$\partial_t : \dot{B}(t)^n = n : \dot{B}(t)^{n-1} : \frac{1}{dt}$$

がある。ラプラシアン (Lévy) Δ_L は

$$\Delta_L = \int \partial_t^2 (dt)^2$$

により定義される。

...

こうして、**新しい解析、確率解析**が生まれた。重要なことは、この新しい解析、すなわち**ホワイトノイズ解析**が現在の **関数解析と共存する**ことである。その両者をつなぐのは S 変換である

$$S : \varphi(\dot{B}) \to U(\xi),\ \xi \in E.$$

E は核型空間である。また

$$U(\xi) = C(\xi) \int_{E^*} e^{<\dot{B},\xi>} \varphi(^{@}B) d\mu,$$

である。測度 μ はホワイトノイズ測度、すなわち $\{\dot{B}\}$ の確率分布で、$C(\xi)$ は μ の特性汎関数である。この S 変換はラプラス変換の類似である。

この対応で 微分作要素 ∂_1 はフレッシェー微分 $\frac{\delta}{\delta\xi(t)}$ が対応する。こうして、関数解析の結果を十分活用しながら、確率論における新しい解析を実行することができる。

趣旨からいって、当然各方面に豊富な応用がある。

[附言]　Bernoulli の stochastice, また Mumford 他のいう stochasticity の適当な邦訳がほしい。

文献

[1] C. F. ガウス、誤差論　紀伊国屋書店 1981, 2011.

[2] H. Weyl, Raum・Zeit・Materie, Springer, 1923,

邦訳:　内山龍雄 訳、時間　空間　物質、筑摩書房 2007.

[3] P. Lévy, Sur les integrales dont les éméments sont des variables aléatoires indépandantes. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1934, 337-366.

[4] P. レヴィ、一確率論研究者の回想,　岩波書店、1973.

[5] A.N. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnumg.Erg.d.Mat

[6] N. Wiener, Nonlinear problems in random theory. MIT Press, 1958.

[7] H. Poincaré, l'analyse et la recherche. Hermnn, 1991. （論文選集）.

[8] H. Cramér, Half a century with probability theory : Some personal recollections. Ann. of Probability, 4 (1976), 509-546.

[9] D. Mumford and A. Desolneux, Pattern theory. The stochastic analysis of real-world signals. A K Press, 2010.

[10] 飛田武幸、ブラウン運動、岩波書店。1875、第３刷 2007.

[11] 飛田武幸、確率論の基礎と発展。共立出版、2011.

[12] 飛田武幸、美しい ノイズ、国際高等研究所。選書 13, 2001.

[13] Si Si, 確率論におけるノイズの歴史。第 17 回数学史シンポジウム 報告集 183-195.

[14] Si Si, Introduction to Hida distributions. World Sci. Pub. Co. 2011,