

地磁気に関するガウスの研究について

植 村 栄 治 (大東文化大学)

2011年10月29日

1 地磁気研究の歴史

地磁気とは、地球の持つ磁気とそれによって生じる磁場の総称である。その研究の歴史をまず概観しておこう。

琥珀と毛皮などを摩擦すると電気が発生するという現象は2500年以上前にターレス(紀元前624年 - 紀元前546年頃)が発見していたと言われるが、これは静電気であり、磁気とは異なる。古代ギリシアでは鉄を引き寄せる「磁石」の存在も既に知られていた。また、中国では、紀元前の春秋戦国時代に磁石を利用した「指南車」が作られたと伝えられている。

磁気についての学問的な著作は、ペトロス・ペレグリヌス(Petrus Peregrinus.13世紀のフランスの科学者)が1269年に著した「磁石書簡」が最初とされる。同書には、磁石に2つの極があることや、磁気の引力、磁化作用のことが書かれており、後述のギルバートにも大きな影響を与えた。

15世紀末には、コロンブス(Christopher Columbus. 1451年 - 1506年)が、大西洋横断中に、磁石の偏角(真北からのずれ)が場所により異なることを発見している。

ウィリアム・ギルバート(William Gilbert または William Gylberde.1544年 - 1603年)は、エリザベス1世やジェームズ1世の侍医を務めたイギリスの著名な医師だが、本職のかたわら静電気や磁石の研究も行った。1600年に出版された彼の著書「磁石及び磁性体ならびに大磁石たる地球について」(De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure. 略称:磁石論)では、地球が巨大な磁石でありそれ故に磁針が南北をさすこと、地球の中心が鉄でできていること、鉄は磁石によって磁化されること、磁化された鉄を熱すると磁力が失われること、磁石を切断するとその断片はいずれもN極とS極を持つ磁石になること等が述べられている。ギルバートは球形の磁石を作って磁針の動きを観察した。また、琥珀を帯電させて静電気の研究を行い、琥珀が羽毛を引きつける静電引力は磁力とは異なる現象だと論じた。彼の実験と論証による方法論は後世の科学の発展に大きな影響を与えたと評されている。地磁気の学問的研究は、地球が大きな磁石であることを見出したギルバートに始まると言ってもよい。

その後、1701年には、ニュートンの友人でありハレー彗星の発見で名高いエドモンド・ハレー(Edmond [又は Edmund] Halley.1656年 - 1742年)が、大西洋の広範な部分における磁気の偏角図を作成・発表した。

なお、電磁気学の分野では、18世紀以降、導体と不導体の区別の発見(1729年)、クーロンの法則の発見(1785年)、ボルタ電池の作成(1800年)等の重要な発見・発明

が相次ぎ、遂に1820年にはハンス・クリスティアン・エルステッド (Hans Christian Ørsted. 1777年 - 1851年. デンマークの科学者) が、電気を流した導線の近くの磁針が振れるとの実験により、電流の磁気作用を発見した。これを契機に電磁気の研究が急速に進み、19世紀後半にはマックスウェルらの手により近代的な電磁気学が完成することになる。

このような動きの中でガウスは地磁気研究についてどのような関与や貢献をしたのだろうか。それを以下に見ていこう。

2 地磁気に対するガウスの関心 (その1. 1806年頃まで)

ガウスは、オルバース (Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers. 1758年 - 1840年) に宛てた1803年3月1日付の書簡の末尾で次のように述べた。

「アメリカの船乗りが磁石球を用いて船の経度を確実に決定したというグラスゴーからの報告についてあなたはどう思われますか。地球の磁力に関しては、まだ多くのことが発見可能なのか、そしてこれまで耕されてきた以上の広い領域を見出して数学を適用することができるのか、私には余り自信がありません。」

これに対し、オルバースは1803年3月4日付のガウス宛ての書簡の中で次のように答えている。

「水銀の上を漂う磁石球の説明は作り話だろうと思いました。しかし、我が地球の磁気についてはまだまだなすべきことが多くあり、あなたの聡明なる研究がこの対象に向けられることを強く望みます。しばしば思うのですが、地磁気に関するトビアス・マイヤーの論文が印刷されていないのは残念なことです。」(注1)

このように、ガウスは1803年(26歳)という早い時期に既に地磁気に関心を寄せ、オルバースも地磁気の研究を勧めたことがうかがわれる。しかし、結局、この時期のガウスは、天文学や測地学には従事したものの、地磁気の研究に着手することはなかった。(注2)

(注1) トビアス・マイヤー (Tobias Mayer. 1723年 - 1762年) はドイツの天文学者で、地磁気についての数理的検討も試みた。彼の論文の多くは手書きのままであり、20世紀まで未刊行のものが多かった。Mayer が磁気理論におけるデカルトの渦動仮説を排除し、クーロンよりも前に逆自乗法則を数理的に立証しようとした功績を強調するものとして、山本義隆『磁力と重力の発見 3』(みすず書房、2003年)911頁がある。もっとも、山本は、マイヤーが逆自乗法則を直接立証したと認めるのはやや苦しいと評している。

(注2) 1803年頃のガウスは、ケレス軌道の予言の成功(1801年末)によって世の注目を浴び、またツァッハラに協力してドイツ国内の測量活動を行なう等、それなりに多忙な日々を送っていた。前者については、植村栄治「ガウス「天体運動論」について」(第20回数学史シンポジウム(2009))[津田塾大学数学・計算機科学研究所報31]267頁以下、後者については、植村栄治「ガウスと測地学」(第21回数学史シンポジウム(2010))[津田塾大学数学・計算機科学研究所報32]212頁以下をそれぞ

れ参照。

3 地磁気に対するガウスの関心 (その2. 1806年 - 1819年頃)

アレクサンダー・フォン・フンボルト (Alexander von Humboldt. 1769年 - 1859年) はスペイン国王の許可を得て1799年から1804年まで中南米の探検調査旅行を行い、1804年に帰欧してその成果の発表を開始したが、その中には地磁気に関するものも含まれていた。彼は、場所によって地磁気の強さが異なること、赤道に近づくると地磁気が弱まることを初めて発見し、また地磁気的世界的な同時観測が必要なことを強く主張した。

ガウスはこのような地磁気に関する最新の知見にも注目していた。彼は1806年11月28日付の書簡で、当時既にゲッチング大学¹の客員教授だったハーディング (Karl Ludwig Harding. 1765年 - 1834年) に次のように書いている。

「…… あなたはゲッチングにおける磁針の偏角の大きさはどの位だと思いますか。フンボルト氏が月報 (植村注: ツァッハが編集・発行していた月刊誌 *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde*) の11月号で伏角を与えた諸地点について、あるいはまた彼が一般地理学日誌の4巻で伏角 (植村注: 地磁気のベクトルが水平面となす角。地面に入っていく方向が正) を記述している幾つかの地点について、その偏角を確認できないでしょうか。地球上の多種多様な諸地点、例えばケープタウン、バタヴィア (植村注: 現在のジャカルタ)、南アメリカ、南洋、北アメリカそしてエジプト等において、偏角と伏角の組み合わせを相当数の場所につき作れば、それは私にとってこの上なく大きな価値あるものになるでしょう。近時多くの旅行がなされていますが、誰かが旅行中になしたその種の観察を自分の著作にまとめたものがあればいいのですが。この分野の場合、従来まったく闇の中にとどまっていた極めて興味ある結果が引き出されることと思います。フンボルトの予告した小文献がゲッチング大学の図書館に納本されたら、そこに記載されている数値結果を私に知らせて下さると大変有り難いです。……」

これに対する1807年1月1日付のハーディングの返信にはガウスが望んでいたデータは含まれていなかったようであるが、世界各地の偏角と伏角のデータが入手可能になるのはもっと後のことであるから、それもやむを得なかった。しかし、いずれにせよ、上記の書簡によれば、ガウスは既に1806年に、地球上の磁気を何らかの関数で表現しその具体的な係数を現実の観測によって決定するという構想を抱いていたことがうかがわれる。もっとも、その構想が実を結ぶのは後述のように30年も後のことである。

ガウスはその後しばらく特に地磁気関連の研究に取り組む機会もなかった模様であるが、5年後のオルバースとの書簡のやりとりの中で磁気についての議論が見受けられる。すなわち、1812年7月18日付の書簡で、オルバースが地球には磁極が4つあるとの仮説をガウスに提示したのに対し、ガウスは1812年9月6日付の

書簡で、それでは偏角等についての説明がうまくできないとの指摘をしている。

以上をまとめると、1820年頃までのガウスは、磁気や地磁気の問題に少なからぬ関心を寄せていたものの、一面では他の諸仕事で多忙だったがために、また他面では磁気に関する十分なデータや知見が得られなかったために、彼が得意とするような数理的手法を用いての磁気に関する理論の展開はなされなかったと言えよう。

4 ガウスとA.フンボルトの交流について

上記のようにガウスは既に1806年頃にはフンボルトの得た地磁気のデータに関心を寄せていた。その後、兩人の間には文通が始まり、長期にわたって続くことになる。1877年に刊行された兩人間の書簡集(Karl Christian Bruhns (Hrsg.): Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauss, 1877)には、フンボルトがガウスに送った書簡が30通収録されているのに対し、ガウスがフンボルトに送った書簡は最晩年のものが4通収録されているのみである。これはガウスがフンボルトに返事を書かなかったのではなく、フンボルトがガウスから受け取った書簡の多くを保存していなかったからだと説明されている。そのため、ガウスがフンボルトに対してどのようなことを述べていたかは兩人が第三者に出した書簡の内容等から間接的に知り得るに過ぎない。

書簡集で見える限り、フンボルトがガウスに書簡を送ったのは1807年7月14日付のものが最初である。その書簡の趣旨は、フンボルトがパリでラプラスからガウス宛てに託された文書を同封して送るというものであり、若き同胞ガウスに対するフンボルトの最大級の敬意と賛辞にあふれているが、特に(地)磁気の問題については触れていない。また、フンボルトは2番目のガウス宛て書簡を2年後に1809年12月28日付で送っているが、それはガウスの天文学の業績(同年に「天体運動論」が刊行されている)には言及しているが、(地)磁気については触れていない。

その後の10数年間は兩人の間で書簡の往復はなかった模様である。書簡集を見る限り、フンボルトが3番目の書簡をガウスに書いたのは1826年5月21日のことである。これは当時21歳だった数学の天才ディリクレ(Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. 1805年 - 1859年)をガウスに紹介・推薦し、その就職についての協力を依頼する内容であったが、ここにも(地)磁気の問題は登場しない。ちなみにディリクレはフンボルトとガウスの助力を得て1827年にBreslau大学(現在のポーランドのヴロツワフ大学)で一応の教職を得ることになる。

1828年8月14日付の書簡でフンボルトは同年9月18日から26日までベルリンで開催されるドイツ自然学・医学学会第7回会議にガウスを招待した。ガウスはこれに応じてベルリンを訪問し、兩人はここで初めて顔を合わせた。この時、フンボルトは自宅に泊めたガウスに磁気関係のコレクションを見せ、磁気の研究をガウスに強く勧めたとされる。また、フンボルトは新進の物理学者ヴィルヘルム・エドゥアルト・ヴェーバー(Wilhelm Eduard Weber. 1804年 - 1891年)をガウスに紹介したが、これをきっかけとしてウェーバーは1831年にゲッチンゲン大学の物理学教授に招聘され、ガウスの電磁気研究の重要な協力者となる。

フンボルトが Gauss 宛ての書簡で磁気の問題に触れるのは 1833 年 2 月 17 日付のものが最初である。Gauss は 1832 年 12 月に磁気に関する最初の論文を発表しており、これ以降、フンボルトの Gauss 宛て書簡には磁気に関する記述が多く見られる。

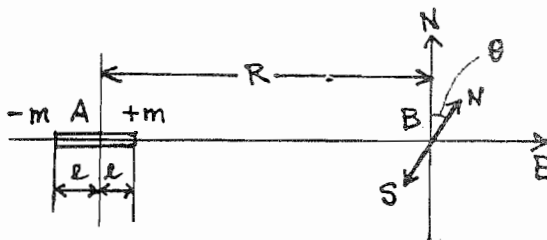
以上のような経緯に照らすと、Gauss はフンボルトが調査によって得た地磁気の数値等に関心があったことは確かであり、また 1828 年のベルリン訪問の際にフンボルトから直接に地磁気研究の重要性を説かれた等の点で、フンボルトからの一定の影響を認めることはできるであろう。

5 Gauss の磁気研究 (その 1 : 磁気の絶対測定)

赤道から極に近づくとき地磁気の強さが強くなる現象はフンボルトが既に中南米探検で発見していたが、その方法は同一の磁針に振動を与えたときの周期の長さから地磁気の強さを相対的に知るものであり、地磁気の強さを数値で絶対的に表現するものではなかった。もしそのような「絶対測定」ができれば、地球上のあらゆる点で地磁気の強さの測定や比較が可能になり、地磁気の理論は飛躍的に進歩する。Gauss はそのような画期的な地磁気の強さの絶対測定の理論を 1832 年 2 月までに作り上げた模様であり、1832 年 12 月 15 日に「絶対的尺度に還元された地磁気力の強さ」(Intensitas vis magneticae terrestri ad mensuram absolutam revocata) と題して発表した (刊行は 1833 年、全集第 5 巻 79 頁以下)。

この理論は、要するに (地) 磁気力を質量、長さ、時間で表すものである。Gauss は、この論文において、実際に行った測定の方法や得られたデータ等も記述し、1832 年 5 月 21 日から 10 月 15 日までに行った 10 回の測定結果を計算して、それらの地磁気の強さに 1 ~ 2 % 程度の変動が見られることを示した。この論文で Gauss が示した地磁気の絶対測定の方法は概ね次の通りである。

(1) 偏向の実験 下図の様に直方体の偏向用磁石 A と磁場測定用の磁針 B を配置する。



(図 1)

磁石 A は地磁気子午線と垂直かつ水平に置く。磁針 B はその中心に付けたねじりの弾性のない細い糸でつるされ、水平面内で中心のまわりを自由に回転できる。

磁石Aと磁針Bの中心間距離を R とし、 R は各磁石の長さに比して十分長いとする。磁石Aの磁気モーメントを M とし、磁石Aの磁極の強さを $\pm m$ とし、磁極間の距離を $2l$ とする。このとき、

$$M = 2ml$$

である。磁石Aが磁針Bの中心付近に作る磁場の水平成分の強さ H は

$$\begin{aligned} H &= k \frac{m}{(R-l)^2} - k \frac{m}{(R+l)^2} \\ &= k \frac{2M}{R^3} \left(1 + \frac{2l^2}{R^2} + \frac{3l^4}{R^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

となる。ここで k は比例定数である。磁針Bは磁石Aがあるために地磁気子午線から角 θ ずれた方向を向いている。このとき、地磁気の水平成分の強さを T とすると、次式が成立する。

$$\tan \theta = \frac{H}{T} = k \frac{2M}{T} \frac{1}{R^3} \left(1 + \frac{2l^2}{R^2} + \dots \right)$$

ここで R を大きくすると、括弧の中の第2項以下は無視できるものの偏向角 θ が小さくなり測定に困難を生ずるので、 R はあまり大きくできない。そこで括弧の中は第2項までとることとし、 H を消去すると、次の近似式が得られる。

$$T \approx \frac{k 2M}{R^3 \tan \theta} \left(1 + \frac{2l^2}{R^2} \right) \quad \dots (1)$$

ガウスは第2項までとった式を使用し、数回の観測を行い最小自乗法を用いて $\frac{M}{T}$ を求めた。

(2) 振動の実験 次に磁石Aの磁気モーメント M を求める必要がある。磁石Aはねじりの弾性のない細い糸でつるされ、水平面内を自由に回転できるとする。その振動の周期を p 、磁石Aの慣性モーメントを I とすると、次式が成り立つ。

$$M = \frac{I}{T} \left(\frac{2\pi}{p} \right)^2 \quad \dots (2)$$

また、磁石Aの長さを a 、幅を b 、質量を d とすると、その慣性モーメント I は

$$I = \frac{d}{12} (a^2 + b^2) \quad \dots (3)$$

である。(2)と(3)を(1)に代入すると、次式が得られる。

$$T \approx \frac{\pi}{p} \sqrt{k \cdot \frac{2d(a^2 + b^2)}{3R^3 \tan \theta} \left(1 + \frac{2l^2}{R^2} \right)} \quad \dots (4)$$

こうして地磁気の水平成分の強さ T を質量、長さ及び時間で表すことができた。また、(4)を(2)に代入すれば磁石Aの磁気モーメント M が得られる。

これにより世界中で地磁気の強さを正確に測定することができるようになり、各地の観測データに基づいて地磁気の理論を構築することが可能になった。

6 ガウスの磁気研究（その2：ポテンシャル論）

ガウスは1831年1月頃には既にゲッチンゲンで地磁気の観測を行っていた模様である。1831年にはウェーバーがゲッチンゲン大学に物理学の教授として着任し、それ以降ガウスの重要な協力者となる。1833年秋にゲッチンゲン大学はガウスの提案に基づいて磁気観測所を設置した。その建物は南北32フィート、東西15フィートの長方形で、鉄は一切使用されず、代わりに銅が使われていた。この観測所は最新の設備と数人の助手を擁し、時間ごと、月ごとあるいは年ごとの偏角の変化等を観測した。ヨーロッパ中から多くの科学者たちがこの観測所の見学に訪れ、また各地で地磁気の観測が行われるようになった。ガウスはゲッチンゲン磁気協会(Göttinger Magnetische Verein)を設立し合計6巻の年報を編集・刊行した。1841年にはこの協会に参加した観測所は約50にも上ったと伝えられている。

世界的規模で地磁気の偏角や伏角を示す磁気図が1830年代には作成されていた。また、1833年以降、ガウスの方法による磁気の強度の測定が広まると、世界各地の磁気の強度のデータも得られるようになっていた。1837年にはサビーヌ(Edward Sabine. 1788年 - 1883年. イギリスの科学者)が磁気の強度に関する磁気図を作成した。

これらの諸資料を基にして、ガウスは地磁気の分布の数学的な解析に取り組み、その成果を1839年に磁気協会の年報で論文「地磁気的一般理論」として発表した。なお、この理論の基礎としてガウスはまずポテンシャル論を構築するのだが、その論文は時期的には後回しとなり、1840年に発表された。以下ではまずこのポテンシャル論を1840年の論文に沿って概観する。

ガウス以前にもポテンシャル論に関係のある議論は、ニュートン、ラグランジュ、ラプラスらにより多少なされていた。それらは主に宇宙空間における重力に関連する議論であった。また、1828年にはグリーンが「ポテンシャル関数」の語を用いてポテンシャル論を展開していたが、その論文はずっと後になるまで世に知られていなかったもので、ガウスの研究には影響を与えなかったものと考えられている。

ポテンシャル論に関するガウスの1840年の論文は「距離の自乗に反比例して働く引力と斥力に関する一般的な諸定理」(Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-kräfte)との題名でゲッチンゲン磁気協会の1839年度の年報(Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839)に掲載された。この論文はドイツ語で書かれ、本文はガウス全集版で46頁ほどある(全集第5巻195頁以下)。

この論文は、ポテンシャルという概念を初めて提示し、それを議論の中核に据え

てポテンシャル理論を展開したものである。この論文の第 23 節では、

$$\int \frac{dV}{dp} ds = 4\pi M$$

という等式が導出されている。ここで、 V はポテンシャル、 ds は微少面積要素、 p は ds の法線、 M は閉局面の中に含まれる磁気量の合計である。この等式は現在のガウスの法則（簡単に言えば、電界の大きさと電界の向きに垂直な面の面積をかけたものが電気力線の総本数を表すということ）に当たるものであり、ガウスが 1835 年に発見したとされている。

なお、この等式を証明するに当たり、ガウスは自分が 1813 年に発表したラテン語の論文「新しい方法で考察された均質な楕円体の引力の理論」(Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata)[全集第 5 巻 1 頁以下] の第 6 節で示した、4 番目の定理を用いている。この定理は、

「定理 4 物体の全表面に及ぶ積分 $\int \frac{ds \cdot \cos MQ}{r^2}$ は、 M が物体の外部にあるか、

又はその表面にあるか、又は物体の内部にあるかに従い、 0 、又は -2π 、又は -4π となる。」

というもので、これを使えば、上記の 1840 年論文第 23 節の等式は容易に導かれる。ここで、 ds は物体表面の微少面積要素、 M は任意の固定点、 r は M と ds の間の距離、 MQ は r と ds の法線のなす角である（正負の符号は現在と逆になっている）。

この 1813 年論文は、ニュートン、ラプラス、ルジャンドルらが論じたが全面解決にほど遠かった楕円体の引力の問題を扱った重要な論稿だが、ガウスはその内容が磁気の理論にも応用できることを 1813 年当時から見通していたようである。

ともあれ、このように遅くとも 1930 年代後半までにはポテンシャル論を確立していたガウスは、これを基盤として、次に見るように、ポテンシャル論に基づく地磁気の理論的な解析を 1839 年の論文によって実現させることになる。

7 ガウスの磁気研究（その 3：地磁気的一般理論）

1839 年にガウスはゲッチェンゲン磁気協会の 1838 年度年報に論文「地磁気的一般理論」(Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus) を発表した。この論文はドイツ語で書かれ、全集版で 70 頁余に及ぶかなり長い論稿である（全集第 5 巻 119 頁以下）。この論文において、ガウスは、地球磁場を地磁気ポテンシャルによって表す方法を理論的に導くとともに、それまでに観測・発表されていた世界各地の磁気データをもとにして実際の地磁気ポテンシャルを求めてみせた。以下ではその概要を紹介する。

微少な体積要素の中に含まれる「磁気」（これをガウスは自由磁気流体 [freies magnetisches Fluidum] と呼ぶ）の量を $d\mu$ とし、その符号は南向きを負とする。その微少な体積要素と直交座標が (x, y, z) である定点との距離を ρ とする。地球の

磁気部分の全体について $\frac{d\mu}{\rho}$ を合計して符号を変じたものを V と定める。すなわち、

$$V = - \int \frac{d\mu}{\rho}$$

である。この V が地球の磁気ポテンシャルであるが、ポテンシャルの語は翌年の 1840 年論文に初めて登場するので、この論文ではまだ「関数 V 」と呼ばれるにとどまる。 V は

$$0 = \frac{ddV}{dx^2} + \frac{ddV}{dy^2} + \frac{ddV}{dz^2}$$

を満たすが、この式を球面座標で書き直すと

$$0 = \frac{r \, ddV}{dr^2} + \frac{ddV}{du^2} + \cot u \cdot \frac{dV}{du} + \frac{1}{\sin^2 u} \cdot \frac{ddV}{d\lambda^2}$$

が得られる。ここで r は地球の中心からの距離、 u は線分 r と地軸（北半分）の作る角（＝緯度の余角）、 λ は r と地軸が作る平面と或る固定された子午面とがなす角度（＝経度。東向きを正とする）である。このとき、

$$V = \frac{R^3 P'}{rr} + \frac{R^4 P''}{r^3} + \frac{R^5 P'''}{r^4} + \dots \quad \dots \dots (*)$$

となるが、係数 $P', P'', P''', \dots, P^n, \dots$ は一般に次のような形をしている。

$$0 = n(n+1)P^n + \frac{ddP^n}{du^2} + \cot u \cdot \frac{dP^n}{du} + \frac{1}{\sin^2 u} \cdot \frac{ddP^n}{d\lambda^2}$$

ここで u の関数 $P^{n,m}$ を

$$P^{n,m} = \left\{ \cos^{n-m} u - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-m-2} u \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-m-4} u - \dots \right\} \sin^m u$$

と定義すると、上記の P^n は次のように書ける。

$$P^n = g^{n,0} P^{n,0} + (g^{n,1} \cos \lambda + h^{n,1} \sin \lambda) P^{n,1} + (g^{n,2} \cos 2\lambda + h^{n,2} \sin 2\lambda) P^{n,2} \\ + \dots + (g^{n,n} \cos n\lambda + h^{n,n} \sin n\lambda) P^{n,n} \quad \dots \dots (**)$$

ここで $g^{n,0}, g^{n,1}, h^{n,0}, g^{n,2}, \dots$ は未知の定数である。

点 O における磁力の大きさを直交座標 (X, Y, Z) で表す。但し、 Z 軸は地球の中心に向かう方向に取り、 X 軸は点 O と地軸が定める平面上で北向きに取り、 Y 軸は地球の赤道と平行に西向きに取る。このとき、

$$X = -\frac{dV}{r \, du}, \quad Y = -\frac{dV}{r \, \sin u \, d\lambda}, \quad Z = -\frac{dV}{dr}$$

となるが、これを上の(*)と組み合わせ、さらに $R = r$ とおくと、地表上の磁力の X 成分、 Y 成分、 Z 成分が次のように得られる。

$$X = -\left(\frac{dP'}{du} + \frac{dP''}{du} + \frac{dP'''}{du} + \dots\right)$$

$$Y = -\frac{1}{\sin u} \left(\frac{dP'}{d\lambda} + \frac{dP''}{d\lambda} + \frac{dP'''}{d\lambda} + \dots\right)$$

$$Z = 2P' + 3P'' + 4P''' + \dots \dots \dots (***)$$

P' は、(**)の右辺の最初の2項から成るので、 $g^{1,0}$ 、 $g^{1,1}$ 、 $h^{1,1}$ という3個の未知の係数を含み、 P'' は同じく最初の3項から成るので $g^{2,0}$ 、 $g^{2,1}$ 、 $h^{2,1}$ 、 $g^{2,2}$ 、 $h^{2,2}$ という5個の未知の係数を含み、以下同様に、 P''' は7個の、 P'''' は9個の、そして P^n は $2n+1$ 個の未知の係数を含む。ここでガウスは収束の早さを考慮して $n = 4$ すなわち P'''' まで取ることにした。この場合、求めるべき未知の係数は $3+5+7+9 = 24$ 個となる。

理論上は8地点での観測データがあればこの24個の係数を決定できる。ガウスは、種々の観測データに基づき、連立方程式を解くことによってこれらの係数の値を計算し、最小自乗法をも適用して、地磁気ポテンシャルを求めた(末尾の参考図参照)。

ガウスの計算によれば、北の磁極は北緯 $73^{\circ}35'$ 、東経 $264^{\circ}21'$ であり、南の磁極は南緯 $72^{\circ}35'$ 、東経 $152^{\circ}30'$ となった。ガウスが計算により得た諸地点の偏角や伏角は、概ね実測値と比べて1度ないし4度程度の誤差があったので、磁極の位置の精度についてもガウスは同程度の誤差を見込んでいる。磁北極については、当時既にガウスの計算よりも $3^{\circ}30'$ 南方に磁極があることが報告されていた。磁南極については、ガウスは計算より北にずれている可能性が高いとして南緯 66° 、東経 146° 付近ではないかと述べているが、1841年に南緯 $70^{\circ}21'$ 、東経 $146^{\circ}17'$ 付近にあることが確認された。

8 地磁気の原因について

1839年論文の終わりの方で、ガウスは幾つかの残された問題について言及しているが、その中で地磁気の原因は地球の内部にあるのか外部にあるのかという問題を取り上げている。そして、もし外部に原因があるとすれば地球の表面における値 \bar{Z} は

$$\bar{Z} = -p_1 - 2p_2 - 3p_3 - \dots$$

となるはずだが、実測値はこの式でなく(***)の式によって十分に近似されており、少なくとも地磁気の原因がすべて地球の外部にあると言えないことは明らかだとしている。

ガウスはそれ以上のことを述べていないが、後世の研究によれば地磁気の約94%は地球の内部から、約6%は地球の外部から来ているとされる。すなわち、ガウスは地磁気の原因の大部分が地球内部にあることを理論的に導いたと言える。ま

た、地表各地での観測値をもとに 24 個のパラメータを決定して地磁気ポテンシャルを表す式を求め、そこから地球上のあらゆる地点の地磁気の X 成分, Y 成分, Z 成分を計算するというやり方は基本的に現在でも通用している。以上のようなことから、一般にガウスは地球磁気学の始祖と位置付けられているのである。

9 結びに代えて

地磁気についてのガウスの理論的研究は、1832 年論文、1839 年論文、1840 年論文をもって一応完成する。しかしその数学的基礎に着目すると、1813 年論文がポテンシャル理論の土台を築く重要なものであったことが分かる。つまり、ガウスの中では 1813 年あるいはそれ以前にポテンシャル論や地磁気理論の大枠が出来上がっていた可能性がある。ガウス自身も 1842 年 1 月 23 日付のシューマッハ宛て書簡で「地磁気の理論は 30 年かそれ以上前に書くことができた」旨を述べている (ガウス = シューマッハ書簡集第 4 巻 52 頁)。既述のように、ガウスは 1806 年にフンボルトの記録から各地の磁気のデータが入手できないかをハーディングに書簡で問い合わせているので、このとき既にポテンシャル論に基づく地磁気の決定・計算の構想が念頭にあった可能性は高いと思われる。

しかし、ポテンシャル論を展開しても実際の観測値がなければ、例えば磁北極や磁南極の計算をしてみせることもできず、彼のポテンシャル理論の真髄を一般に理解してもらうのは難しかったであろう。小惑星の再発見位置の予言ならば、計算方式は理解されなくても、その功績は万人に理解され賞賛され得る。ポテンシャル理論の場合、ガウスは地磁気の厳密な測定が世界各地で可能になる 1830 年代までじっとその発表時期を待っていたように見える。

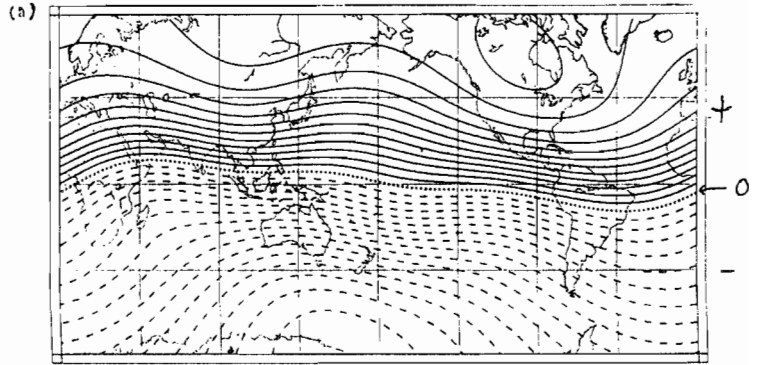
参考文献

- [1] ガウス全集 : Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Bde 1-12, 1863-1929.
- [2] C. Schaeffer, *Über Gauss' physikalische Arbeiten (Magnetismus, Elektrodynamik, Optik)*, *Werke*, Bd. XI-2, Abhandlung 2, 1924.
- [3] H. Geppert, *Über Gauss' Arbeiten zur Mechanik und Potentialtheorie*, *Werke*, Bd. X-2, Abhandlung 7, 1933.
- [4] 河野長「ガウスと地磁気」, 『数学セミナー』2002, 1 月号, pp.46-50.
- [5] 木幡重雄『電磁気の単位はこうして作られた』, 工学社, 2003.

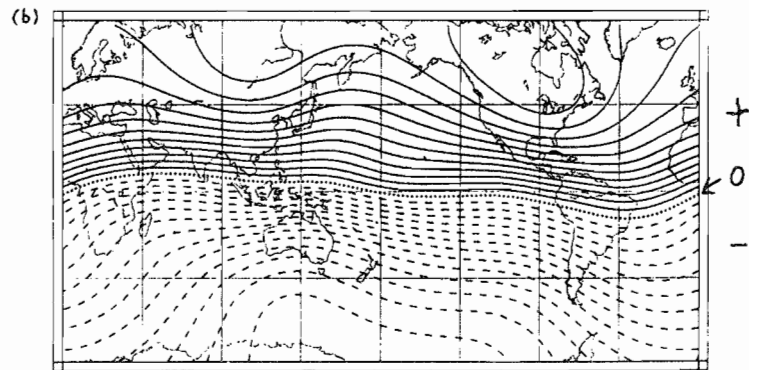
参考ウェブサイト

- 1) <http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/poles/polesexp-j.html> (地磁気についての解説)
- 2) <http://catalog.hathitrust.org/Record/000533120> (Zach 編集の月刊誌: *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde*)
- 3) <http://catalog.hathitrust.org/Record/008607085> (一般地理学日誌)
- 4) <http://books.google.com/ebooks/reader?id=OycLAAAAMAAJ&hl=ja&printsec=frontcover&output=reader>. (ガウスとフンボルトの書簡集)

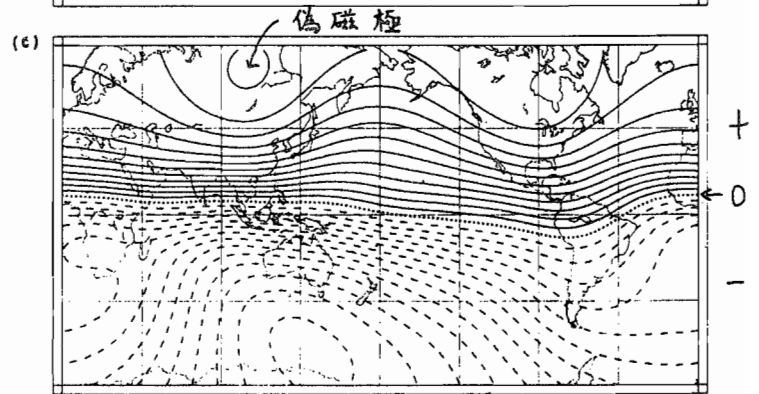
ガウスが作成したモデル



最近のモデルによる 1835 年の値



衛星観測による 2000 年の値



参考図 磁場の鉛直分力の分布 (河野長「ガウスと地磁気」数学セミナー2002年1月号49頁に若干の書込みを加えた。)