デデキントの算術と再帰性定理

足立恒雄

デデキントは算術を厳密に構成するために集合論を創始した．本稿では名著『数とは何か，そしてまた何であるべきか』（1887）における算術の基礎付けを現代的な見地から整理して紹介する．

1　チェーンの定義

集合 S が無限集合であるとは，S から S への全射でない単射 φ が存在することである（第 64 項）．無限集合 S と単射 φ とを固定しておく．φ の像には属さない要素を一つ採って 1 と記す．$K \subseteq S$ に対して，φ による K の像 $\varphi(K)$ を K' と記す．このとき

$$K' \subseteq K$$

が成り立つならば，K は (φ に関して) チェーンをなすと言う（第 37 項）．

$A \subseteq S$ とする．$A \subseteq K$ であるようなすべてのチェーン K の共通部分，言い換えれば，A を含む最小のチェーンを A のチェーンと呼び，A_0 と記す（第 44 項）．すなわち $A \subseteq K$ なるチェーン K の全体の成す集合を $\mathfrak{X}$ と書く．$S \in \mathfrak{X}$ なので，$\mathfrak{X} \neq \emptyset$ である．このとき

$$A_0 = \bigcap \mathfrak{X} = \{x \mid \forall K \in \mathfrak{X}\ (x \in K)\}$$

である．

第 59 項 (数学的帰納法の定理)　X を任意の集合とする．$1_0 \subseteq X$ を示すためには，次の 2 条件の成り立つことが必要十分である：

1. $1 \in X$
2. 任意の $x \in 1_0 \cap X$ に対して $x'(=\varphi(x)) \in X$

証明　条件 1,2 は $Y = 1_0 \cap X$ が 1 を含むチェーンであることを意味しているが，1_0 はそういう性質を持つ最小のチェーンなので $1_0 \subseteq Y \subseteq X$ である．　□

数学的帰納法を使えば，たとえば次が示せる：

第 87 項（定理） どのチェーン K も

$$K = k_0 \quad (k \in S)$$

という形で表せる．

第 71 項 集合 N から N の中への単射 φ が存在して，ある要素 $1 \notin \varphi(N)$ に対して $N = 1_0$ が成り立つとき，N は**単純無限**であると言われる．また単純無限集合 N は写像 φ によって順序付けられると言う．

単純無限集合 N の本質は次の 4 条件を満足する単射 φ と要素 1 の存在することに存する：

1. $N' \subseteq N$
2. $N = 1_0$
3. $1 \notin N'$
4. φ は単射である．

第 73 項 (定義) もし写像 φ によって順序付けられた単純無限集合 N の考察にあたって，要素の特殊な性質をまったく度外視して，その区別のつくことだけを固持し，順序付ける写像 φ によって相互に付けられた関係だけを取り上げるならば，これらの要素を**自然数**または**順序数**または単に**数**と呼び，要素 1 を**数系列** N の**基準数**と呼ぶ．要素から他のどんな内容も捨象したことを考えれば，**数は人間精神の自由な創造である**と言ってよい．

第 71 項における条件 1, 2, 3, 4 だけから導き出された関係または法則は，個々の要素にたまたま与えられた名前がどんなものであろうとも，すべての順序付けられた単純無限集合においていつも同一のものであって，「数の科学」，すなわち「算術」の主たる対象となるものである．

第 132 項 (定理) すべての単純無限集合は互いに順序同型である．

$(N, 1, \varphi)$ を数体系，また (Ω, ω, θ) を単純無限集合としよう．順序同型写像 $\psi : N \to \Omega$ を構成したい．そこで，まず $\psi(1) = \omega$ と定義する．そして，ある n に対して $\psi(n)$ が定義されたならば，

$$\psi(n') = \theta(\psi(n))$$

と定義すれば，すべての自然数 n に対して $\psi(n)$ が定義されたことになるのではないか？

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \Omega & \xrightarrow{\theta} & \Omega \end{array}$$

デデキントはこういうナイーブさを持ち合わせていない．数学的帰納法というのは自然数 n に関する命題を証明するときに使われる論法である．「写像 ψ の存在性」は「n に関する命題ではない」のである．デデキントが一番苦労したのはこの難関を乗り越えることであった．以下にそのことを説明する．

2　再帰性定理とその証明

第 126 項 (数学的帰納法による定義)　集合 Ω と Ω から Ω への (単射とは限らない) 写像 θ，ならびに Ω の要素 ω が任意に与えられているとする．このとき数系列 N から Ω への写像 ψ であって，

$$\psi(1) = \omega, \qquad \psi(n') = \theta(\psi(n))$$

を満たすものがただ一つ存在する．

証明のために関係 $<$ を定義する：

第 89 項 (定義)　条件

$$n_0 \subseteq m'_0$$

が満足されれば，数 m は数 n より小さいと言う．記号では

$$m < n$$

と記す．

第 90 項　不等号 $<$ は N の線型順序を定める．

第 96 項　N のどの部分集合も最小数をもつ．

第 97 項　n はチェーン n_0 の最小数である．

第 98 項 (定義)　n を任意の数とするとき

$$Z_n = \{x\ (\in N) \mid x \leq n\}$$

第 106 項 $m < n \longleftrightarrow Z_m \subsetneq Z_n$

第 108 項 $Z_{n'} = Z_n \cup \{n'\}$

第 112 項 n は Z_n の最大数である．

第 116 項 n と n' の間には数が存在しない．

第 119 項 Z_n は有限集合である．

以上の準備の上で，再帰性定理 (第 126 項) が次のように証明される：

写像 $\psi_n : Z_n \to \Omega$ で，第 126 項の条件において ψ の代わりに ψ_n としたものがただ一つ存在することは，n に関する数学的帰納法によってただちにわかる．(一意性は $m < n$ ならば $Z_n \subsetneq Z_m$ が成り立つことから従う．) そこで各 $n \in N$ に対して

$$\psi(n) = \psi_n(n)$$

と定義すれば，ψ が求める写像であり，その一意性も簡単にわかることである．

135 項以降は加法，乗法の定義に当てられている．たとえば加法は

$$m + 1 = m' \qquad m + n' = (m + n)'$$

によって与えられる．任意の自然数 m, n に対して和 $m + n$ が定義できることは，当然再帰性定理によって保証される．すなわち，$\Omega = N$, $\theta = \varphi$ とし，m を固定して $\omega = m'$ とする．このとき

$$\psi_m(1) = m', \qquad \psi_m(n') = (\psi_m(n))'$$

なる写像 ψ_m の存在が保証されるわけで，$\psi_m(n)$ を $m + n$ と記すことになる．

現在では，最初に一般的な再帰性定理を証明し，その結果を加法，乗法などの定義に適用し，その後 $m < n$ を $m + k = n$ なる $k \in N$ の存在することと定義するのが普通である．

3 ヴェルデン（1975）の主張

再帰性定理（定理 A と呼ぶ）はデデキントによって最初に証明された．これは本質的には私が第 1 章，§3 で与えたのと同じ方法であった．彼の証明はペアノの公理に基づいたものではない．デデキントは「1 から n までの切片」，言い換えれば，関係「$m < n$」という概念を前提としている．この関係は $m + u = n$ によって定義されるので，デデキントの証明は加法を前提としているとも言える．言い替えれ

ば，「加法 $x+y$ という関数が存在する」（これを定理 B と呼ぶ）ということを前提としていることになる．だから定理 B は定理 A を意味するし，B は A の特別の場合だから，逆も言える．

1925 年以前には，再帰性定理を含めて初等算術がペアノの公理から得られることを疑う者はだれ一人いなかった．しかし 1927 年の時点でここには問題があるということを悟った人たちがいた：ランダウ，フォン・ノイマン，そしてカルマール (L. Kalmár) の 3 人である．

ランダウは彼の "*Grundlagen der Analysis*" を準備中であった．彼は再帰性定理をペアノの公理から導こうとしたが失敗した．この問題をフォン・ノイマンに相談したところ，ノイマンはペアノの公理からそれを導けることを示した．しかし，その証明はちょっと複雑だった．同じ年の 1927 年にカルマールが数学的帰納法による著しく簡単な証明をランダウに伝えた．ランダウの本に載せられているのはこの証明である．私の Algebra では，定理 B の証明にはこの本を参照するだけにし，定理 A をデデキントの方法で証明した．

—B. L. van der Waerden, *On the Sources of my Book Moderne Algebra*, Historia Mathematica 2 (1975), 31-40

4　ペアノの公準—ランダウ (1930)

ランダウの著書 "*Grundlagen der Analysis*" に書かれているペアノの公準は次の通りである：

すべての自然数の成す集合は次の性質を持つ：

1. 1 は自然数である．
2. 各自然数 x に対して，その後者と呼ばれる自然数 x' がちょうど一つある．
3. $x'=1$ となる自然数 x は存在しない．
4. $x'=y'$ ならば $x=y$ である．
5. （数学的帰納法の公理） 自然数の集合 X が次の性質を持つならば，X はすべての自然数を含む：
   (a) 1 は X に属する．
   (b) x が X に属すれば，x' も X に属する．

5 ランダウ (1930) の主張

「(自然) 数 $\leq y$」という概念があって,

$$f(1) = x, \qquad f(z') = (f(z))' \quad \text{for } z < y$$

を満たす，$z \leq y$ に対して定義された関数 $f(z)$ が存在するようなすべての y の集合について語ることができるのならば，話は簡単であろう：しかし，「ペアノの方法」ではこれはなされない．(足立注：ペアノは加法を再帰的に定義しただけですべての自然数に対して加法ができるものと考えている，という批判が先述されている.) デデキントの論法は実際この線に沿ったものである．フォン・ノイマンの助けを得て私は，順序関係をあらかじめ導入して，そのような筋書きを成し遂げた．このようなことでは読者にはいくらか不便なことだっただろう．しかるに，最後の瞬間にカルマーからずっと簡単な証明を知らされたのだった．

ランダウの著書では，集合論は一切展開されていず，「集合」という言葉が出てくるだけである．たとえば無限集合の定義もないし，有限集合の定義もない．もちろん写像という言葉もない．そういう立場でペアノの公準だけから回帰性定理を証明するには，どの程度の（集合論からの）予備知識が必要になるだろうか？ なお，ランダウは，デデキントの証明はペアノの公準に基づいていない，とは主張していない．

6 ランダウ (1930) の証明

1. すべての y に対して演算 $+$ が

$$x + 1 = x', \qquad x + y' = (x + y)'$$

を満たす x の集合を M として，数学的帰納法を使って，$M = \mathbb{N}$ を示す．
厳密に言えば，M を次の集合とする：

$$\{x \mid \exists_1 \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ \varphi(1) = x' \wedge \forall y(\varphi(y') = \varphi(y)')\}$$

ここでは $\mathbb{N}$ 上の写像の概念が使われている．

2. 乗法 $x \cdot y$ および $\sum_{k=1}^{n} x_k$, $\prod_{k=1}^{n} x_k$ についても word for word に証明を繰り返す．

7 ヴェルデン (1930) の証明

"Moderne Algebra"(1930) の第 1 章 §3 は次のような構成になっている：

1. 加法が定義できることを述べ，証明は与えないで，ランダウの著書を参照するにとどめている．
2. 加法を使って $<$ を定義する．
3. 「数学的帰納法による定義（あるいは構成)」（再帰性定理）の証明を次のようにデデキント風に与える．
   (a) $(1, n)$ を $x \leq n$ なる数のなす切片とする（デデキントの Z_n)．
   (b) 各切片 $(1, n)$ 上に，与えられた関係を満たす関数 φ_n が一つだけ存在することを証明する．かくして関数 φ_n の列が得られる．
   (c) そこで $\varphi(x)$ を $x \in (1, n)$ なる n を取って
   $$\varphi(x) = \varphi_n(x)$$
   と定義すればよい．
4. §4 において有限集合の定義を与え，「有限集合の基本定理」すなわち「有限集合は真部分集合と対等にならない」ことを証明する．

ヴェルデンが「デデキントの方法はペアノの公準に基づいていない」と主張する根拠と見られるものの整理：

1. デデキントが再帰性定理を証明した．この証明には「無限集合」，「集合間の写像」，「性質 P を有するすべての集合の共通部分」という「高度な」考え方が使われている．
   言い換えれば，ペアノの公準に現れる「集合」は素朴なもので，深く展開された集合論を前提としていない．（しかし「深く展開」の意味は明確にされていない．）
2. とりわけ，チェーン A_0 の定義は impredicative と受け止められたのではないか？
3. デデキント後にペアノが自然数論の公準を提唱した．ペアノの公準は自然数論の本質を完全に捉えているので，「再帰性定理は当然のことながらペアノの公準から（集合論と称するほどのものを使わずに）証明できる」とみなされていた．

以上を考慮するとヴェルデンがデデキントの方法に対して抱いた疑問は次のようなことではないかと思われる．

おそらくはデデキントの証明はかなり長く複雑だということとともに，たとえば大小関係を

$$m < n \Leftrightarrow n_0 \subsetneq m_0$$

によって導入するときに典型的に見られるような方法に対して「すべての何とかの共通部分などは出来るならば遠慮したい」（高木貞治『数学雑談』）という感想を当時の感覚として共有したのではなかろうか？　さらにうがって考えるなら，ラッセルのタイプ理論が議論されていた頃だということを考慮すると，n_0 の定義には「n を含むすべてのチェーン」という概念を使うが，その中に n_0 自身が含まれているのが impredicative(非可述的) であると見られた可能性もあるかもしれない．

ランダウによる加法の定義，そしてヴェルデンの再帰性定理の証明には，いずれも有限集合上で定義された関数と自然数しか現れない．そうした記述を「可述的」と称するなら，無限集合の共通部分を用いた定義は非可述的ということになるだろう．

しかし，現在では無限集合の共通部分という考え方はごく普通に使われている上，うるさいことを言えば，「関数列から改めて関数を構成する原理」，すなわち

関数列 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \cdots$ が与えられたとき $\varphi(m,n) = \varphi_m(n)$ なる関数 φ が存在する．

を黙って使っている位だから，この程度の違いについてそう気にすることはないのではないだろうか．

結論として，「デデキントの証明はペアノの公準に基づいていない」というのはヴェルデンのやや不注意な言い過ぎであろう，と私は思う．ヴェルデンは，その後数学史の方で活躍するようになったこともあり，その分当時の知識をそのまま持ち続け，記憶に少し不正確なものを交えてしまったのではないだろうか．

8　デデキントと選択公理

第 159 項（定理）　集合 Σ がデデキント無限であるためには，すべての $n \in N$ に対して Z_n から Σ への単射が存在することが必要十分である．

1. 証明は「仮定によって各 n に対して Z_n から Σ への単射 α_n がある．」という形で始まる．
2. Ω をある Z_n から Σ への写像の全体とする．
3. $\theta : \Omega \to \Omega$ を $\beta \in \Omega$ すなわち $\beta : Z_n \to \Sigma$ の一定のやり方で定めた $Z_{n+1} \to \Sigma$ へ

の延長とする．

4. $\omega = \alpha_1$ として再帰性定理を適用すると $\psi : N \to \Omega$ が得られる：

$$\psi(1) = \alpha_1, \qquad \psi(n') = \theta(\psi(n))$$

5. $\psi_n = \psi(n)$ とすれば ψ_n は Z_n から Σ の中への単射である．

$$\xi(n) = \psi_n(n)$$

によって $\xi : N \to \Sigma$ を定義すれば，これは単射である．

上の証明で「各 Z_n から Σ への単射が存在する」と仮定されているだけなのだから，現在の立場から言えば，選択公理が必要となる．しかしデデキントの感覚としては，「存在する」というからには「与えられているのだ」と考えたのではないだろうか．再帰性定理の必要性を見抜いていたデデキントが，無条件にすべての n に対して α_n が選べるとは考えていたとは思えないのである．

デデキントの『数とは何か』の欠陥として，この他に無限集合の存在証明と無制限な内包性原理の使用が挙げられる．現在では，無限集合の存在は公理とされ，また内包性原理は集合に対してのみ認めるという形になっている．つまり，デデキントの考えたような，「算術は人間の持つ普遍的な論理の合理性に還元できる」という考え方には無理があるということだろう．そうした点を時代性として勘案すれば，『数とは何か』は数学史上稀に見る名著と言えるだろう．現代の公理的集合論がこの著作を母胎として巣立っていったということを考えれば，単に昔書かれた名著というに止まらず，後世に与えた影響という意味でも最高の地位を占める著作であると評価されてしかるべきである．