カオス発見史の一側面

白岩　謙一

この報告では、主として、カオス発見に至る道と、日本において、周期的外力を伴うDuffing方程式等の研究の中でカオスが発見された過程を考察する。そして、正確な情報の欠如や不足によって生じた、様々な誤解や評価を正すことを目的とするものである。しかし、私の調査に誤解や誤認等があれば、ご叱正をお願いする次第である。

本論文の作成に当たって、上田睆亮、川上博両氏提供の資料と国府寛司氏の情報を参考にした。感謝する次第である。

この論文中では、以下、敬称は省略させて頂くことにした。既に死去された関係者もあり、私の記憶が薄れないうちに発表することにした。

§0. カオスとストレンジ・アトラクターの定義

学術用語としての「カオス」の定義は必ずしも一定していない。一番素朴な定義は「確定系に起こる確率的挙動（stochastic behaviour occurring in a deterministic system)」がある[57]。

しかし、最近の学術上の定義に共通なものとしては、初期条件に関する敏感性（sensitive dependence on initial conditions）が挙げられる。これは、1963 年に気象学者 E. N. Lorenz (1917-2008) が対流の方程式から導き出した 3 次元常微分方程式の数値的研究で観察し、天候の長期予報の困難性を指摘したことに由来する[35]。そして、この研究が 1975 年の T. Y. Li (1945-) と J. A. Yorke (1941-) によるカオス論文[34]につながった。

初期条件に関する敏感性について、歴史的には、1876 年に J. C. Maxwell (1831-1879) が彼の著書[36]の中で、「同じ原因からは常に同じ結果が生ずる」が、これを「似た原因から似た結果が生ずる」と混同してはならないと述べている。

また、1898 年に J. Hadamard (1865-1963) は、負曲率曲面の測地線の研究[16]の中で「初期条件に何らかの誤差があれば、系の長期的な振る舞いは予測できない」と述べている。そして、1906 年に Duhem は彼の著書[12]で Hadamard の研究を引用している。

さらに、1908 年発行の H. Poincaré (1854-1912) の著書「科学と方法」の第一篇第四章「偶然」の中に、更に詳細な記述と気象の長期予測の困難性に関する記述がある[46]。

数学的な定義としては、R. L. Devaney が彼の教科書[11]の中でカオスについて、次の 3 条件を挙げている。

1. 初期条件に関する敏感性　2. 位相推移性(topological transitivity)
3. 周期点の稠密性

また、1993 年には S. Smale (1930-) がこれらの条件等を考慮して、"Chaos is the presence of a (transversal) homoclinic point.." と述べている[56]。この homoclinic 点は Poincaré が制限三体問題の研究で発見したものである[44], [45]。

ストレンジ・アトラクターの定義も一定していない。一番素朴なものは、カオス的なアトラクターというものである。この用語を定義した D. Ruelle (1935-) 自身も幾つかの異なった定義を述べている[47], [48], [49]。また、最近の定義については[41]及び[9]を参照されたい。

カオスの歴史的考察について多数の文献があるが、D. Aubin [5]は参考になる。また、D. Ruelle [49]、及び D. Steward [57]は興味深い一般向け解説書であり、その歴史的記述も参考になる。

§1. カオスとストレンジ・アトラクター発見の系譜

1960－70 年代に発見されたカオス理論は基本的には 19 世紀末に H. Poincaré が発見した homoclinic 点の理論[44], [45]が出発点である。homoclinic 点の発見についての歴史的側面については、J. Barrow-Green による興味深い著作[6]がある。

カオス理論とストレンジ・アトラクターは、数学と自然科学・工学等の研究とのインタープレイによって発展した。以下、簡単に 1970 年代半ばまでの歴史を解説する。

(I) Lorenz アトラクターからカオスの命名者 Li - Yorke に至る道

気象学者 E. N. Lorenz は 1963 年の論文[35]で、Saltzman の対流方程式を 3 次元の常微分方程式で近似し、電子計算機を用いて、不規則な挙動をする解 (Lorenz attractor) を発見した。そして、Lorenz plot と呼ばれる 1 次元写像を用いて、この解が周期的ではなく、初期条件に強

く依存することを説明した。この1次元写像はテント写像と呼ばれる区分的線形写像であって、後に、カオスの出現する代表的な例の1つであることが分かっている。

Lorenz は、このような解の存在が、天気予報、特に長期予報が困難である理由とした。

1974年に Univ. of Maryland の T. Y. Li と J. A. Yorke は Lorenz の論文に触発されて、1次元写像の反復によって生ずる力学系を研究した。そして、1次元写像の3周期点の存在から、あらゆる周期の周期点の存在と、不規則な力学的挙動を示す不変集合を発見し、これをもってカオス (chaos) と名付けた。これを記した論文は数学教育の機関誌に投稿されたが、証明の記述が分かりにくいという理由で、書き直してから再提出せよと通知された。彼等はそれをしばらく放って置いた。

その頃、Univ. of Maryland の数学教室で、数理生物学者 R. M. May (1936-) が「世代交代をする昆虫の個体数の年毎の変化」に関する特別講義を行っていた。彼は、世代交代をする昆虫の個体数の年毎の変化の法則を、適当な変数変換を行って、2次関数 $f(x)=ax(1-x)$ で表し、その定める1次元力学系の数値的研究を行い、周期倍分岐等を発見していた（最初の発見者ではない）[37], [38]。

Li・Yorke はこれを知り、最初の論文を書き直し、それが1975年に発表された[34]。May は Li・Yorke と話した後、周期倍分岐を経てカオスに至ることを、1974年に、カオスという用語を用いた論文[37]に発表した。これが、「カオス」という学術用語の最初の使用である。

(II) Smale の horseshoe に至る道

(i) 非線形振動論と力学系

1927年にオランダの B. van der Pol (1889-1959) と J. van der Mark は周期的外力を伴う電気回路網 (periodically forced van der Pol equation) の分岐現象の実験から、周期の増加と不規則な振動を観測した[60]。彼等は現在カオスと呼ばれている現象を受話器で聞いたのである。

この実験結果を知り、M. L. Cartwright (1900-1998) と J. E. Littlewood (1885-1977) は、この電気回路の力学系を、周期的外力を伴う2階の常微分方程式で表し、それを数学的に研究して、1945年に、上記実験を裏付ける興味ある結果を発表した[10]。これは、G. D.

Birkhoffの研究したdiscontinuous recurrent motions [7]の存在を示した。これはCartwright・Littlewoodのカオス発見を数学的に確認した論文でる。

N. Levinson (1912-1975) はCartwright・Littlewoodの論文に触発されて、1949年に、彼等の方程式を簡略化した方程式に対して同様な結果が成り立つことを証明した[33]。

(ii) 構造安定性

1937年にA. Andronov (1901-1952) とL. Pontrjagin (1908-1988) はsystème grossier (粗い系) という重要な概念を発表し、2次元円盤上で解析的な微分方程式がsystème grossierであるための必要十分条件を与えた[3]。この概念の重要性を認めたS. Lefschetz (1884-1972) は、これを構造安定な系 (structurally stable systems) と名づけて、その研究を推進した。

M. Peixoto (1921-) は2次元円盤上の微分可能な力学系に対して、Andronov・Pontrjaginと同様な結果が成立することを証明した。さらに構造安定性の定義を現在の定義のように変更したものは、2次元の場合にはAndronov・Pontrjaginの定義と同値であることを示した。そして、2次元円盤上の微分可能な力学系全体の空間の中で、構造安定な系全体の集合は、稠密な開集合となることを証明し、1959年にこれらの結果を発表した[42]。

PeixotoはPontrjaginに会ったとき、3次元以上の構造安定な系を信じないと言われたという。

Smaleは1958年にM. Peixotoに出会った。彼はPeixotoからPontrjaginの言を聞き、これに刺激されて、2次元の構造安定性を高次元化に一般化することを考えた。そして、双曲型平衡点と双曲型周期軌道の概念を定義し、これらに対する安定多様体及び不安定多様体を構成した。そして、これらの概念とR. Thom (1923-2002) による横断性条件 (transversality condition) を用いて、Andronov・Pontrjaginの条件を高次元に拡張し、現在Morse・Smale系と呼ばれる力学系を定義した。そして、その位相的性質を調べる論文を発表した[51]。

この論文の中で、彼は構造安定な系はMorse・Smale系に限るだろうと予想した。しかし、この論文発表直後にN. Levinsonから反例がある

ことを知らされた。即ち、Levinson の結果[33]は Morse - Smale 系以外にも構造安定な力学系が存在することを示すものであった。

(iii) 記号力学系と horseshoe 力学系

Smale は Peixoto に招待されて、1959 年暮に、リオ・デ・ジャネイロにある純粋・応用数学研究所 IMPA に行った。1960 年初頭に Levinson からの手紙を受け取った Smale は、Levinson の論文を研究して、horseshoe 力学系の原型となるものを発見した。リオの海岸での出来事である[54], [55]。

この horseshoe 力学系の存在が van der Pol - van der Mark, Cartwright - Littlewood, Levinson らの結果を導くものと考えられる。

その後、1960 年代に S. Smale は horseshoe 力学系を高次元にも拡張し、G. D. Birkhoff (1884-1944) の定理の拡張を証明した[8] ,[52]。horseshoe 力学系は、Poincaré の発見した、横断的な homoclinic 点を持つ力学系と同値であるが、更に重要なことは、その近傍に記号力学系を不変集合として含み、構造安定であるということである。

Smale は、さらに、Morse - Smale 系、horseshoe 系、Anosov 系[4]等を含む、一般的な公理 A 力学系の理論[53]を発展させた。この理論はカオスとストレンジ・アトラクターの理論に直接的に関係するものである。

(III) ストレンジ・アトラクターの命名者 Ruelle - Takens に至る道

カオスと同様な現象を表すものとして、ストレンジ・アトラクター (strange attractor) がある。これは D. Ruelle と F. Takens (1940-2010) によって乱流の発生に関する理論の論文[47]で提唱されたものである。彼等は S. Smale の力学系理論[53]を用いて、乱流発生の過程を説明した。Morse - Smale 系ではない公理A系をストレンジ・アトラクターと呼んだ。

当時、乱流に関する支配的理論は Landau - Lifschitz の説、即ち、周期解の分岐による周期解の分岐から、更に概周期解へと分岐するのが、乱流発生であるとするものであった。

Ruelle - Takens は、粘性流体には概周期運動が存在しないということから、乱流発生の原因の一つとして、概周期運動の代わりにストレンジ・アトラクターをあてるという理論である。

この提案は当時の物理学の本流から外れたものであって、いくつかの専門誌から論文掲載を断られた末に、Ruelle 自身が編集者であった雑誌に掲載された。

§2. 日本におけるカオス発見論争

(I) 数理解析研究所における力学系研究集会の発足

筆者は 1966 年から名古屋でトポロジー、解析学、エルゴード理論、微分幾何学等の人たちと共同で、力学系セミナーを組織し、力学系理論の研究を開始した[50]。

1974 年に私は J. Diff. Equations に掲載された徳島大学工学部電子工学科の川上博（1941- ）の論文を読み興味を持った。そして、同年 9 月に川上を名古屋大学に招待し、力学系研究者に対して「電気回路の力学系」に関する集中講義をしてもらった。

このとき、Duffing 方程式に homoclinic 点や horseshoe が現れることを知った。これは Smale の力学系の例が豊富に含まれる興味ある結果であり、私たちの大きな興味を呼び起こした。これが、私たち数学者と数学以外の研究者との共同研究の始まりである。

川上博により、京都大学工学部電気工学科の上田睆亮（1936- ）を紹介され、京都大学数理解析研究所（以下数理研と略称する）で共同研究集会を開催することにした。1975 年に白岩が代表者で「電気回路の力学系」という題で共同研究集会を行い、1976 年、1977 年には上田が代表者として同じ題で共同研究集会を開催した。

1979 年の数理研における研究集会は「力学系における非線形回路の諸問題」という題で、上田が代表者として行われた。この集会で、京大物理の富田和久、津田一郎、京大数学の宇敷重広、名大の白岩謙一、名工大の倉田雅弘らによるカオス関係の研究と、徳島大の川上博によるストレンジ・アトラクターの例などが発表された。

多分この頃、筆者は上田から「カオス」という用語は不適当で違和感をもつ。自分は、以前に、「不規則遷移振動」という用語を用いていた、と語るのを聞いた記憶がある。

1980 年には「確定系における不規則現象と力学系理論」という題で上田が代表者として数理研で研究集会が開催された。この集会以降も、

数理研において毎年、力学系とカオスに関する研究集会が、池上宜弘、川上博、宇敷重広等の代表者によって開催されてきた。

(II) 上田―川上論争の始まり

さて、1980 年の研究集会の懇親会の席上で一つの事件が発生した。参加者の自己紹介の際、川上から 1967 年に Duffing 方程式の数値実験において homoclinic 点を発見したという発言があった。

その直後に、川上の発言に反発するように、上田が、1961 年 11 月 27 日にカオスを発見したと発言した。参加者はこれまで、上田が、このような実験について語ったのを聞いたことは無かったので、突然の上田の発言に、皆が一時シンとなった。

これが上田―川上論争の発端である。

(III) 数学辞典（第 3 版）の記述に対する上田の異議申し立て

1985 年に発行された「数学辞典」第 3 版[64]で、白岩は、第 424 項「力学系」(IX「位相幾何学」の中の項）を担当した。この中で白岩は次のように記した。「... 上田睆亮と川上博は次の形の Duffing 方程式 $d^2x/dt^2+kdx/dt+x^3=B\cos t$ を数値的に研究して同様な現象を発見した。これらの研究で観察された現象はカオス (chaos) と呼ばれ、ストレンジ・アトラクター (strange attractor) を現出する。」

この記述に対して、上田は、数学辞典、第 3 版、編集委員長、伊藤清宛の 1988 年 11 月 29 日付け書簡で「(前略) これは間違いで川上博はカオスの発見には関与しておりません。数学辞典を執筆なさった方は、文献の調査をなさらずに書かれたものと考えます。(後略)」と述べ、善処を要求した。

伊藤委員長からの手紙と上田の抗議文を受けて、白岩は再調査の上、1989 年 11 月 17 日付け書簡で、理由を付して「数学辞典の記述を変更する必要はない」と伊藤委員長に回答した。伊藤委員長は、この問題を編集委員会にかけて、結局、上の数学辞典の記述を変更する必要はないとの結論を出した。

以下、この問題について、私の調査した結果を述べると共に、現在流通している多数の間違った情報や誤解を訂正したいと思う。

§3. 日本におけるカオス発見に関する考察

(I) 京都大学工学部電気工学科林千博研究室

日本における非線形振動論の分野の主要な開拓者として、林千博(1911-1987) の名前は逸することが出来ない。林は 1934 年に京都大学工学部電気工学科を卒業、三菱電機とウエスティングハウス社を経て、1949年に京都大学工学部電気工学科教授となり、定年の 1975年まで、京都大学で非線形振動論の分野で多くの研究者を育成すると共に、国内的、国際的に活発に活動した。

主な研究対象は周期的外力を伴う Duffing 方程式、van der Pol 方程式等である。初期には harmonic balance 法によりアナログ計算機を用いて harmonic な周期解、subharmonic な周期解、概周期解の存在と、それらの分岐現象を研究した。後期には Levinson による mapping 法 (transformation theory) [32], [14]によって、アナログ計算機やデジタル計算機を用いて研究を行った。主要著書[18], [20]の他、多数の論文がある。上田晥亮及び川上博は林研究室の出身である。

上田晥亮 (1936-) は 1959 年京都大学工学部電気工学科を卒業した。大学院は林研究室で、1964 年に助手、1967 年講師、1971 年助教授、1985 年教授と昇進し、2000 年に定年退職した。

川上博 (1941-) は 1964 年に徳島大学を卒業、同年、京都大学大学院に入学、林研究室で研究を始めた。1969 年に京都大学工学部助手、1970 年徳島大学工学部電子工学科に配置転換、1970－72 年フランス政府 CNRS (Marseille) で力学系研究。1974 年徳島大学助教授、1985 年同大学教授となり、2010 年に定年退職した。京都大学大学院時代に林研究室で上田にも指導を受けた。

(II) 1961 年の上田晥亮の実験データ

上田によると、1961 年 11 月 27 日、上田の院生時代に、アナログ計算機を用いて van der Pol - Duffing 混合方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\mu(1-\gamma x^2)\frac{dx}{dt}+x^3=B\cos\nu t \qquad (1)$$

を研究し、$\mu=0.2,\gamma=8,B=0.35$ とおいて、νを動かしてその分岐現象を調べていた。このとき、$\nu=1.02$ で周期解や概周期解とは異なる新しい解を発見した。上田が後に「割れたゆで卵」と称する実験データである。

（なお、上の方程式(1)は Duffing 方程式ではない。）

この発見は1961年12月16日発表予定の報告[19]のための実験中であったが、林千博の認めるところにならず、発表されなかった。この実験記録は Brookhaven National Laboratory の H. B. Stewart が所持している。以上が上田の証言である[1]。

この実験データを基にして、上田はカオスを最初に発見したのは自分であると主張している。報告書[19]には、$B=0.30$ 及び $B=0.50$ の分岐図が掲載されているが、$B=0.35$ のデータは全く記載されてない（後述の§4 (II)と照合のこと）。

上田が提供した資料の中には、$B=0.30$ の場合の分岐図を作成するための実験データは存在するが[1]、$B=0.35$ の場合の分岐図作成のための実験データは提供されていない。

また、上田が「割れたゆで卵」と称する実験データは、報告書のテーマからは外れたものである。

また、上田は1980年頃までの論文で、この実験データに言及した論文は皆無であるし、方程式(1)で、上のようなパラメータにおけるカオスに言及した論文も無い。

(III) 1967年の川上博の homoclinic 点の発見

川上は1966年9月から11月にかけて、報告[21]のために mapping 法による数値実験を行った。林研究室のアナログ計算機に同研究室の安陪が作製した mapping 用リレーを取り付けた装置を用いて、データを取った。この結果を林、上田に報告し、そのアドヴァイスを受けた。この報告のうち Duffing 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+x^3=B\cos t \qquad (2)$$

の逆不安定不動点（双曲型平衡点）の存在と正不安定不動点（双曲型平衡点）の α 枝（不安定多様体）ω 枝（安定多様体）などの結果は、川上が得たものである。

同じ頃、次の形の Duffing 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+x^3=B\cos t+B_0 \qquad (3)$$

で $k=0.05, B=0.14, B_0=0.005$ の場合（[18], p.257, Fig.10.10）に、2周期点の α 枝と ω 枝の交差を発見した。そして、Duffing 方程式（2）で

$k=0.05, B=0.3$の場合に正不安定不動点に対して、同様にα枝とω枝の交差を発見した。これが H. Poincaré の homoclinic 点と呼ばれるものであることは、後に知った。

また、Duffing 方程式(3)で$k=0.2, B_0>0, B<0.5$の範囲の分岐現象の研究で周期倍現象と計算機では測定し難く数学的検討を必要とする振動（カオス）を発見した。特に、$k=0.2, B=0.3, B_0=0.08$の相図（[22] 第 6 図(d)）はカオスを表している。周期倍分岐からカオスが発生するということを Duffing 方程式で最初に発見したものである（(IV)照合)。

1967 年秋に林から Lefschetz の論文[31]の掲載されている本を貸与された。この Lefschetz の論文には Poincaré の homoclinic 点の紹介や G. D. Birkhoff の定理、即ち「homoclinic 点の近傍には無限個の周期点が存在すること」などが記されていた。

1968 年 7 月 15－17 日に数理研で開催された「関数方程式の近似解法研究会」では、変換理論（mapping 法)、最大有界不変集合、homoclinic 点、Birkhoff の定理等が解説され Duffing 方程式(2)に homoclinic 点が存在し、したがって無限個の周期点が存在することを示した。homoclinic 点の用語の使用はこれが最初である[24]。

なお、この報告には強制外力を伴う van der Pol 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\mu(1-x^2)\frac{dx}{dt}+x=B\cos\nu t$$

に関する上田の研究も含まれているが、この部分にはカオスと関係する研究はない。

1969 年の論文[26]には、Duffing 方程式(2)について、homoclinic 点の存在が示され、第 4 節「むすび」には「周期解以外の解の性質などまだ未知なものが残されている。」と述べられている。

これらの結果は 1969 年に Int. J. Non-Linear Mech. に発表された[25]。執筆者は林で、この最後の第 6 節は上田の研究であるが、前述のように、この部分にはカオス関連の研究は含まれていない。

なお、川上の学位論文[30]には、Smale の horseshoe と homoclinic 点に関する論文[52]が引用され、Duffing 方程式に horseshoe が現れることが図示されている。

(IV) 1970 年の上田睆亮の homoclinic 点の発見論文

上田は1970年の論文[27]でLevinsonの変換理論と最大有界不変集合([32], [14]) を解説した。そして、方程式(1)で $\mu=0.2,\gamma=4$ の場合に、その分岐現象を研究し、$B=0.5,\nu=1.4$ の場合に2重漸近点(homoclinic点)の存在を示した。

また、次の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\mu[1-\gamma(\frac{dx}{dt})^2]\frac{dx}{dt}+x^3=B\cos\nu t,\mu>0 \qquad (4)$$

において、$\mu=0.2,\gamma=4$ として分岐現象を研究し、$B=0.3,\nu=1.1$ としたとき非規則振動が発生することを発見した。

そして、最後の、第4節「むすび」で、「いまだその構造がよくわからない振動も発生する。(中略) 発生する振動は非周期的となる。この種の振動は位相力学の立場からさらに検討すべき興味ある問題であると思う。」と述べた。

(V) 1973年の上田睆亮の「不規則遷移振動」の命名

上田は1973年の論文[58]で

(a) Duffing方程式(3)の

第1例: $k=0.2,B=0.3,B_0=0.08$ 及び、第2例: $k=0.2,B=1.2,B_0=0.85$

(b) van der Pol・Duffing混合方程式(1)で $\gamma=1$ としたとき、

第1例: $\mu=0.2,B=17,\nu=4$ 及び、第2例: $\mu=0.2,B=1.8,\nu=0.6$

(この第2例は後にカオスでないと判明)

の相図を、電子計算機を用いて研究し、これらは「不規則遷移振動」であるとした。

上の(a)の第1例 $k=0.2,B=0.3,B_0=0.08$ に示された不規則振動は、変形して用いてあるが、上述の(III)の川上の[22]で得られたものと同じものである。

そして第4節「むすび」で「(前略) 非周期的な定常振動を観察した。その結果、問題とする方程式が確定的であるにもかかわらず、計算機シミュレーションを行った系においては誤差や外乱などの確率量に支配される不規則な振動現象の存在が明らかにされた。この形の非周期振動は、実在する系の振動状態を表す動作点が、微分方程式の相平面上における非遊走点からなる正に漸近安定な不変閉集合を構成する解の近傍相互間を不規則にわたり続けると考えれば説明されることや、不規則遷

移振動（randomly transitional phenomena, 1979年の英訳）と呼ばれるのが適当なことを提唱した。(後略)」そして、このような不規則遷移振動は、広く一般の非線形方程式を計算機シミュレーションした系などで見られると述べている。

この定義にはアトラクターの記述はあるが、カオスの定義の共通条件である、初期条件に関する敏感性の記述は無い。不規則振動の原因としては、誤差や外乱による確率量に支配されるものとしている。これではカオスやストレンジ・アトラクターの定義とは言えない。カオス現象には、不規則振動が（記号力学系などの形で）系の中に組み込まれているのである。

この定義を論文に用いた例は、大体、上田だけであって、上田自身も後にはストレンジ・アトラクターの用語を用いている。

この定義を上田は、1970年に占部実のセミナーで発表したが、その際、占部から個人的に説教されたと述べているが（[1], 第3章）、占部の発言が正確に引用されているかどうかは分からない。また、このことで占部を非難することは出来ない([40])。

実際、不規則振動の存在とその原因究明は1960年代後半、特に、1968年の[24]以降には、林研究室では共通の意識になっていた。上田は、その不規則振動を「不規則遷移振動」という名前で、上のように定義しようとしたものとも考えられる。その行為に対する占部の注意であったかもしれない。

§4. その後の経過と評価

(I) 1978年に上田が発表した論文[59]で、Duffing方程式(2)を考察した。そして、$k=0.1, B=12.0$の場合の相図を発表した。これは、1980年にRuelleが[48]で、自分が見た最も美しいストレンジ・アトラクターであるとして、Japanese attractorという名で引用してから有名になった。さらに、Springer Verlagが刊行した1981年のMathematics Calendarにもこれが掲載されて、更に世界的に有名になった。

1986年初夏に上田研究室を訪問したBrookhaven National LaboratoryのB. StewartがThe Dynamics Newsletter, Vol.2, No.4 (July, 1988) に書いた訪問記事と、Brookhaven Bulletin, Vol.42, No.34

(September 2, 1988) に掲載された Japanese attractor の図を含む記事もある。この Stewart の記事は上田の主張のみに従って記述され、川上らの業績を知らないで記述したものと思われる。

(II) 1990 年の Endo - Saito 論文[13]には、電気・電子系に観されカオスについて、かなり詳しい歴史的解説が述べられている

最初に、エンジニアにとって、電子計算機を用いたシミュレーショでカオスを判定する条件を 4 つ挙げている。その中のカオス判定条件 (1) は初期条件に関する敏感性で、(2)の中では、カオス発生への道として、周期倍分岐があると述べている。また、(3)として、homoclinic 点はカオスを生成するとも述べている。

そして、上田の Duffing 方程式に関する業績を大きく取り上げている。特に、1961 年の上田の実験データがカオスであるとの主張について詳しく述べ、更に "Perhaps this was the first recognition of chaos found in electric circuits" と述べている。その理由として上田の言として ([13], p.764 の) 'Fig.2' を用いた説明があり、'Fig.2' の出典として[19], [20]を挙げているが、この 'Fig.2' は[19], [20]の対応する原図と一致しない。即ち、[19], [20]の原図に手を加えたものである。これは明らかに上田のカオス実験データ (1961 年) を補強するために、後の時点で付け加えたものである。

また、上記の「これが電気回路で発見された最初のカオス認識であろう」という発言は誤りである。1927 年の van der Pol - van der Mark の実験[60]をこの時点では知らなかったのであろう。

一方、川上の業績には軽く触れられただけで、評価が軽すぎるものと考える。特に、1967 年に川上が homoclinic 点を発見したことを述べているが、周期倍分岐からカオスが発生することを発見していることには触れていない。これらの結果は、上の Endo - Saito 論文のカオス判定条件(2), (3)に該当する結果である。これらの論文は上田の主張する論文のどれよりも早く発表されているものである。川上の業績が正当に評価されているとは考え難い。

また、Endo-Saito 論文には次のような記述もある。"Anyway, this random-like oscillation seemed familiar in Hayashi's laboratory in 1960's and all members were more or less involved in uncovering this phenomenon"。この説明は上の説明と矛盾するものではないが、林研究室発足以来、即ち、1950 年代頃から、既に同様であった可能性も大である。いずれにしても、この現象（カオス）は林研究室では良く知られていて、原因の究明が問題とされていた。

また、更に、"In particular, Ueda and Akamatsu had been attacking the phenomenon in late 1960's and Ueda sticking alone to the so-called chaotic motions in 1970's" と述べ、文献として、[58], [59] 等を上げている（1978 年までの文献だけを記した）。川上の業績を考慮すれば、この説明は誤りで、大きい修正を加えなければならない。

川上の業績に関して同論文は、homoclinic 点の発見と Birkhoff の定理の引用が大きい貢献だとして、文献[22], [23], [25], [28]が引用されている。Smale のカオスに関する見解によれば（多くの数学者が賛同すると思うが）、横断的な homoclinic 点の発見はカオスの発見であり、上述の未知なものこそカオスであった。少なくとも Duffing 方程式では、川上が初めて発見したものである。

この論文は比較的詳細に電気・電子系のカオス発見の歴史を述べたものであるとの評価であるが、上述のように、現時点では多くの問題点を含んでいる。特に、van der Pol - van der Mark の実験と Cartwright - Littlewood, Levinson らの業績について触れてないのも重大な欠陥である。

(III) 1982 年に山口昌哉は「1 次元と 2 次元のカオス」という総合報告を発表した[62]。しかし、この論文には上田や川上らの仕事に関する言及は無い。

1986 年に発行された山口昌哉の著書「カオスとフラクタル」[63]の第 4 章「工学および数値解析とカオス」、第 1 項「ストレンジ・アトラクターとは」において、上田が 1961 年 11 月に Duffing 方程式でジャパニーズ・アトラクターを発見したと誤読されかねないような解説がある。これは問題である。

また、この項は上田の業績のみ記述されていて、川上の業績については全く触れられていない。これは「数学辞典第 3 版」「力学系」の項の記述に対する 1989 年の上田の異議とその回答が出る前のものであるが、この項の記述は訂正する必要がある。

しかし、上田の異議に対する私の回答がなされた後の 1994 年に、合原一幸編著「応用カオス」[2]の「推薦のことば」の中で、山口昌哉は「(前略) 1960 年代ローレンツの仕事より前、京都大学の林研究室では上田睆亮氏そして川上博氏はそれ (筆者注：カオスの事) を見て、興味を持っておられたと言うことは、驚くべき先見性である。(後略)」と述べ、川上博の功績を認め、前説を訂正した。

(IV) 1987 年にジャーナリストのグリックがカオスの一般向け解説書[15]を発表し、その邦訳が 1991 年に新潮文庫の一冊として発行された。この本は科学ジャーナリストによる記述であって読みやすく、ベスト・セラーになった。この本の監修者として上田睆亮の名がある。

上田はこの本を歴史的に正しいと解説しているが、Ruelle が[49]の注(30)で指摘しているように「歴史的な正確さや科学上の優先権などについては必ずしも信用は出来ない」。しかし、この本が、日本で、一般人の間で上田の名を有名にした。

(V) 2000 年にエイブラハムとウエダ編著「カオスはこうして発見された」[1]が刊行された。これは何人かのカオス理論開拓の研究者の回想を集めて刊行されたものである。その「原著まえがき」の中で、「われわれはカオスの開拓者たちに個別に依頼状をしたためた。(中略) ダビッド・リュエル(David Ruelle)からは「カオス理論の草創期について考えをまとめる仕事は、今はほかの方にお任せしたい」との返事をいただいた。」と述べている。そして、リュエルの寄稿は無い。

この本には興味深い回想も多い。しかし、その第 3 章「ストレンジ・アトラクタとカオスの起源」及び第 4 章「カオスとの遭遇記」における上田の回想は、彼の主張を一方的に記した部分が主要な部分を占めている。これは林や占部に対する上田の一方的な主観と、川上の業績の大部分を軽視または無視したものとなっている。

この本に対して、西村和雄が書評[40]を 2005 年の「数学通信」に書いている。上田の主張を全面的に受け入れた上での書評であって、正確な情報に基づくものではない。特に、林千博と 1970 年の数理研・研究集会の研究代表者 (占部実) に対する記述は問題である。

また、林千博の指導的な役割と川上博の決定的な貢献を、全くといってよいほど軽視または無視した上田の証言をそのまま容認するような

書評は、Duffing 方程式におけるカオス発見に至る林研究室の研究の歴史を正しく認識・評価するものではない。

§4. まとめ

以上述べてきたことから、次のような結論が得られる。

(I) カオス発見の基本は、1890 年の H. Poincaré による homoclinic 点の発見による[44]。

(II) 1898 年に M. Hadamard が負曲率曲面の測地線の研究で記号力学系の発端を開いた[16]。

(III) 1920 年代に G. D. Birkhoff は Poincaré の後を継いで、曲面の（微分）同相写像の力学的研究を行い[7]、Birkhoff の定理「homoclinic 点の近傍に、無限個の周期点が現れること」を発見した[8]。

(IV) 電気回路の実験によるカオス現象の発見は 1927 年の van der Pol・van der Mark によるのもの[60]が最初である。

(V) 1937 年に A. Andronov と L. Pontrjagin は `système grossier'（粗い系）という概念を定義し、2 次元の円盤の上の解析的な常微分方程式が粗い系であるための必要十分条件を与えた[3]。この系は、後に、S. Lefschetz によって、`structurally stable system'（構造安定系）と呼ばれるようになった。

(VI) 1938 年に M. Morse・G. A. Hedlund が記号力学系の理論を発表した[39]。

(VII) van der Pol・van der Mark によるカオスは Cartwright・Littlewood によって 1945 年に数学的に確認された[10]。

(VIII) 1949 年に N. Levinson は単純化した方程式で Cartwright・Littlewood と同様な結果を発表した[33]。

(IX) S. Smale は 1960 年に Andronov・Pontrjagin の条件を一般的に拡張し、現在 Morse・Smale 系と呼ばれる力学系を定義し、その性質を調べた。そして、構造安定な系は Morse・Smale 系に限るだろうと予想した[51]。その予想に反例があることを Levinson によって知らされた。

(X) M. Peixoto によって Smale は、1959 年から 1960 年にかけて

リオの IMPA に招待された。Levinson の手紙を読み、彼の論文[33]を研究して、S. Smale は horseshoe 力学系を発見した[54], [55]。

(XI) 1950 年—60 年代の林千博研究室では周期解と概周期解の研究が主であって、カオス現象が観察されていたが、研究の対象とはされていなかった。

(XII) 上田睆亮は 1961 年の van der Pol・Duffing 混合方程式の分岐の実験的研究で「割れたゆで卵」を見たという。これは周期解や概周期解ではない不規則振動であると思い、これに興味を持った。しかし、論文の形にはならなかった[19]。

(XIII) 1963 年に気象学者 E. N. Lorenz は Saltzman の 2 次元対流方程式を 3 次元非線形常微分方程式で近似し、これを電子計算機を用いて、数値的に研究した。そして、非周期的で複雑な挙動を示す解を発見した。そして、この解が初期条件に敏感に依存することを、現在 Lorenz plot と呼ばれる 1 次元写像を用いて説明した。そして、これが長期の気象予報が困難である原因とした[35]。

(XIV) Smale は horseshoe と横断的な homoclinic 点の存在とは同値であること、及び記号力学系が homoclinic 点の近傍に含まれることを示した。これは Birkhoff の定理の拡張であり、さらに、カオスの原因である[52]。

(XV) 1967 年には川上博が Duffing 方程式で横断的な homoclinic 点を電気回路による実験と数値計算によって発見した[22]。これは Duffing 方程式にカオスが出現することの最初の発見である。

(XVI) 1970 年に上田は始めて homoclinic 点発見の論文を発表した[27]。

(XVII) 1971 年に Ruelle と Takens は乱流の理論に Smale の理論を用いた新しい理論を発表した。この論文の中で、ストレンジ・アトラクターを定義した[47]。

(XVIII) 1973 年に上田は論文[58]で不規則遷移振動を定義したが、この定義はカオスやストレンジ・アトラクターの定義としては不

適当である。現在の研究者は（彼自身を含め）この用語を用いていない。

(XIX)　1975年にT. Y. LiとJ. A. YorkeはLorenzの研究に刺激されて、1次元写像の力学系を研究し、"Period three implies chaos"という論文を発表した[34]。これが「カオス」という学術用語の誕生である。

(XX)　数理生物学者R. M. Mayは、世代交代をする昆虫の個体数の変化を2次関数で表し、その数値的研究を行っていた。1974年にLi・Yorkeの話を聞き、周期倍分岐からカオスに至る事を示す論文を発表した[37], [38]。

(XXI)　上田は1978年にDuffing方程式に現れる不規則振動を示す軌道の図を発表した[59]。この図をRuelleが論文[48]にJapanese attractorという名前で引用し、更に、出版社Springerのカレンダーに掲載されて、上田の名前は世界的に有名になった。

参考文献

[1] R. Abraham and Y. Ueda Ed., The Chaos Avant – Garde, World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., 2000 （邦訳：ラルフ・エイブラハム、ヨシスケ・ウエダ編著、「カオスはこうして発見された」、稲垣耕作、赤松則男訳、共立出版、2002）

[2] 合原一幸編著、「応用カオス　カオスそして複雑系へ挑む」、サイエンス社、1994.

[3] A. Andronov and L. Pontrjagin, Systéme grossier, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 14 (1937), 247 – 250.

[4] D. V. Anosov, Geodesic Flows on Closed Riemann Manifolds of Negative Curvature, Proc. Steklov Inst. Math., 90 (1967). English Transl. from Russian by S. Feder, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968.

[5] D. Aubin, Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Durée and Revolution, Disciplines and Culture, Historia Mathematica, 29 (2002), 1-67.

[6] J. Barrow – Green, Poincaré and the Three Body Problem, Amer. Math. Soc. and London Math. Soc., 1996.
[7] G. D. Birkhoff, Surface transformations and their dynamical applications, Acta Math. 43 (1920), 1 – 119 (Collected Mathematical Papers II, 111 – 229).
[8] G. D. Birkhoff, On the periodic motions of dynamical systems, Acta Math., 50 (1927), 359 – 379.
[9] C. Bonatti, L. J. Días and M. Viana, Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, Springer Verlag, 2000.
[10] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, On non-linear differential equation of the second order: I. The equation $\ddot{y}-k(1-y^2)\dot{y}+y=b\lambda\cos(\lambda t+a)$, k $Large$, J. London Math. Soc. Vol. 20 (1945), 180 – 189.
[11] R. L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition, 1988, Westview Press.
[12] P. Duhem, La théorie physique: Son objet et sa structure, Paris Chevalier et Riviere, 1906.
[13] T. Endo and T. Saito, Chaos in Electrical and Electronic Circuits and systems, Trans. IEICE, 73 (1990), 763- 771.
[14] 古屋茂、「非線形問題（強制振動論）」、現代数学講座、共立出版、1957
[15] J. Gleick, Chaos, Viking, New York, 1987（邦訳：ジェイムス・グリック著、「カオス」、上田睆亮監修、大貫昌子訳、新潮文庫、新潮社、1991）.
[16] M. Hadamard, Les surfaces à courbures opposes et leurs lignes géodesiques, J. de Math., (5) 4 (1898), 27 – 73.
[17] B. Hassard, S. Haystings, W. Troy, and J. Zhang,A computer proof that the Lorenz equations have "chaotic" solutions, Appl. Math. Lett., 7, No.1(1994), 79-83.
[18] C. Hayashi, Forced Oscillations in Non-linear Systems, Nippon Printing and Publishing Co., Ltd., 1953
[19] 林千博、柴山廣、上田睆亮、「周期的外力を加えた自励振動系に発

生する概周期振動」、電気通信学会、非直線理論研究専門委員会資料、1961 年 12 月 16 日、1-23.
[20] C. Hayashi, Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.(Reissue, Princeton Univ. Press, 1985.)
[21] 林千博、上田睆亮、川上博、「Mapping 法による Duffing 方程式の解析」、電気通信学会、非直線理論研究会資料、1966 年 12 月 10 日, 1-20.
[22] 林千博、上田睆亮、川上博、白井晋、「Mapping 法による Duffing 方程式の解析 (2)」、電子通信学会、非直線理論研究会資料、1967 年 12 月 8 日、NLP67-13(1967-12), 1-18.
[23] C. Hayashi, Y. Ueda and H. Kawakami, Solution of Duffing's equation using mapping concepts, Proc. 4th Int. Conf. on Nonlinear Oscillations, 25-40, 1968, Prague.
[24] 林千博、上田睆亮、川上博、「変換理論による 2 階非線形微分方程式の解の探索」、数理解析研究所講究録、62、関数方程式の近似解法研究会報告集(1968 年 12 月発行)、発表日時 1968 年 7 月 15－17 日、13-25.
[25] C. Hayashi, Y. Ueda and H. Kawakami, Transformation theory as applied to the solutions of non-linear differential equations of the second order, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol.4 (1969), 235- 255.
[26] 林千博、川上博、上田睆亮、「Duffing 方程式の二重漸近解とその近傍の周期解」、電子通信学会、非直線理論研究会資料、1969 年 7 月 17 日、NLP69-7(1969-07), 1-14.
[27] 林千博、上田睆亮、赤松則男、板倉秀清、「周期的外力を加えた自励振動系の動作」、電子通信学会論文誌(Trans. IECE Japan)、第 53－A 巻 3 号(Vol.53-A,No.3)、昭和 45 年 3 月(1970)、150-158. (English Translation, C. Hayashi, Y. Ueda, N. Akamatsu, and H. Itakura, On the behaviour of self-oscillatory system with external force, Electronics and Communications in Japan, 31-39, Scripta Publishing Co.).
[28] C. Hayashi, Y. Ueda and H. Kawakami, Periodic Solutions of Duffing's Equation with Reference to Doubly Asymptotic Solutions, Proc. Int. Conf. on Nonlinear Oscillations, Vol.2(1970) 507-521, Kiev.

[29] S. Haystings and W. Troy, A Proof That the Lorenz Equations Have a Homoclinic Orbit, J. Diff. Eq., 113 (1994), 166-188.
[30] H. Kawakami, Qualitative Study on the Solutions of Duffing's Equation, Doctor thesis, December 1973.
[31] S. Lefschetz, Geometric Differential Equations: Recent Past and Proximate Future, in Differential Equations and Dynamical Systems, Edited by J. K. Hale and J. P. LaSalle, Academic Press, 1-14, 1967.
[32] N. Levinson, Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, Ann. of Math., 45 (1944), 723 – 737.
[33] N. Levinson, A second order differential equation with singular solutions, Ann. of Math., 50 (1949), 127 – 153.
[34] T. Y. Li and J. A. Yorke, Period Three Implies Chaos, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 985 – 992.
[35] E. N. Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, J. Atmospheric Sci., 20 (1963), 130 – 141.
[36] J. C. Maxwell, Matter and motion, Dover Publ., 1952, First edition in 1876.
[37] R. M. May, Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos, Science, 186 (1974), 645 – 647.
[38] R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature, 261 (1976), 459 – 467.
[39] M. Morse and G. A. Hedlund, Symbolic Dynamics, Amer. J. Math., 60 (1938), 815 – 866.
[40] 西村和雄、書評「カオスはこうして発見された」、数学通信、第 9 巻第 4 号 (2005)、106－108.
[41] J. Palis and F. Takens, Hyperbolicity & chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, Cambridge Univ. Press, 1993
[42] M. Peixoto, On structural stability, Ann. Of Math., (2) 69 (1959), 199 – 222.
[43] M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology, 1 (1962), 101 – 120.

[44] H. Poincaré, Sur le probleme des trios corps et les equations de la dynamique, Acta. 13 (1890), 1 – 270.(Œuvres VII, 262 – 479).
[45] H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mècanique Céleste, Vol III, Gauthier – Villars, 1899.(邦訳：「ポアンカレ　常微分方程式」、福原満洲雄、浦太郎訳、共立出版、1970)
[46] H. Poincaré, Science et Méthode, Ernest Flammarion, Paris, 1908 （邦訳：ポアンカレ著、「科学と方法」、吉田洋一訳、岩波書店）.
[47] D. Ruelle and F. Takens, On the Nature of Turbulence, Commun. Math. Phys., 20 (1971), 167 – 192.
[48] D. Ruelle, Strange Attractors, Math. Intelligencer 2 (1980), 126 – 137.(Translated from"Le Recherche" No.108, Feb., 1980).
[49] D. Ruelle, Chance and Chaos, Princeton Univ. Press, 1991. （邦訳：D．ルエール著、「偶然とカオス」、青木薫訳、岩波書店、1993）
[50] 白岩謙一、「力学系の発展について」、数学、38 (1986), 71-80.
[51] S. Smale, Morse inequalities for a dynamical system, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 43 – 49.
[52] S. Smale, Diffeomorphismsa with Many Periodic Points, Differential and Combinatorial Topology, edited by S. S. Cairns, Princeton Univ. Press, 1965, 63 – 80.
[53] S. Smale, Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 747 – 817.
[54] S. Smale, On how I got started in dynamical systems, The mathematics of time, Springer - Verlag, 1980, 147 – 151.
[55] S. Smale, Finding a horseshoe on the beaches of Rio, The Mathematical Intelligencer, 20 (1998), 39 – 44.
[56] S. Smale, What is chaos ?, Nobel Conference XXVI, Chaos the New Science, edited by J. Holte, Gustavus Adolphus College, University Press in America, 1993, 89 – 104.
[57] I. Steward, Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos, London Penguin, 1990.
[58] 上田睆亮、赤松則、林千博、「非線形常微分方程式の計算機シミュレーションと非周期振動」、Trans.IECE Japan, 56-A, No.4(1973),

218-225. (English translation, Y. Ueda, N. Akamatsu and C. Hayashi, Computer simulation of nonlinear equations and nonperiodic oscillations, Electronics and Communications in Japan, 27-34, Scripta Publishing Co.).
[59] 上田睆亮,「非線形性に基づく確率統計現象—Duffing 方程式で表される系の場合」、Trans. IECE 53-A22, (1978), 167-173. (English translation, Random phenomena resulting from nonlinearity – In the system described by Duffing's equation, Int. J. Non-Linear Mechanics, 20 5/6, (1985), 481-491.).
[60] B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency Demultiplication, Nature, 120 (1927), 363-364.
[61] M. Viana, What's New on Lorenz Strange Attractors ?, The Math. Intelligencer, 22 No. 3 (2000), 6-19.
[62] 山口昌哉、「1 次元と 2 次元のカオスについて」、数学、34 (1982)、17－41.
[63] 山口昌哉、「カオスとフラクタル」、ブルー・バックス 652、講談社、1986 (ちくま学芸文庫、筑摩書房、2010)
[64] 岩波「数学辞典」、第 3 版、1985.

この原稿作成に際して、小谷健司氏にお世話になった。感謝する。