(Benjamin) Olinde Rodrigues (1795-1851) の業績について
— とくに「空間の運動の記述」に関して —

平井　武 (Kyoto)

1．調査報告の動機ほか.

(Benjamin) Olinde Rodrigues (1795/10/6–1851/12/17) に注目することになったのは，実は Hamilton の四元数の歴史的経緯について知りたかったからである．2007 年の 8 月にポーランドの Będlewo (ベンドレヴォ) での Workshop "Non-Commutative Harmonic Analysis" で，対称群を含む複素鏡映群の射影表現（スピン表現ともいう）について講演したときに，必然的に J. Schur (= I. Schur) の射影表現 3 部作 [Sch1]–[Sch3] に触れると同時に，「そこには，後に Pauli 行列と呼ばれる 3 個の行列の組が本質的に現れている」ことをコメントした．それに対して質問があり「Hamilton の四元数はどうか？」と聞かれた．絶対値 1 の四元数全体のなす群 $\boldsymbol{H}_1$ が 3 次元回転群 $SO(3)$ の 2 重の被覆群を与えることは現在では周知のことなのだが，歴史的な先陣争いについて発言するには，自分が Hamilton について知らなさ過ぎた．いつかよく調べようと思っていた．

注 1． Schur の論文 [Sch3, 1911] に現れている 3 個の行列とは，

$$(0.1)\qquad A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

であるが，これは対称群 $\mathfrak{S}_n$ の 2 価の射影表現（多価表現）を具体的に書き下すのに使われている．他方，Pauli の論文 [Paul, 1927] に現れて，後に Pauli 行列と呼ばれる行列は，電子の回転モーメント（スピン）を記述するもので，($\boldsymbol{C}^2$-値の) 波動関数 ψ に次のように働く：

$$(0.2)\quad \boldsymbol{s}_x(\psi)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\psi;\ \ \boldsymbol{s}_y(\psi)=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\psi;\ \ \boldsymbol{s}_z(\psi)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\psi.$$

(なお，Élie Cartan は 1913 年の論文 [Car1] で，spineur などの述語は導入しないまま，回転群のスピン表現も込めて論じているが，そこには具体的な「3 個の行列の組」は現れていない．)

さて，2008 年度夏に，奈良教育大学大学院で 1 週間の集中講義をすることを，河上 哲氏に依頼されていたので，その主題として，『四元数，3 次元回転群，そして，群の表現論初歩』を提案して，講義録を作ろうとした．その際に，website で四元数について検索を掛けたら，文献 [Altm2] *Hamilton,* *Rodrigues, and the Quaternion scandal,* が引っ掛かった．「こんなところで scandal とはそも何だろう？」という興味から読んでみて，３次元回転群の普遍被覆群，あるいは，３次元回転のパラメーター表示，をめぐる歴史的事実が，自分が今まで思っていたのと大分食い違っていたので，物語の中心人物である Rodrigues に次第に深入りしていった，という訳である．なお，講義録 [平井 3] は手に入るようにはなっていないので，本報告に関係の深い部分を「付録」として，より詳しい解説のために添付する．

2． 年　譜．

1789–1799: フランス革命， 1804–1814, 1815: ナポレオン 1 世,
(復古王政) 1814–1815, 1815–1824: ルイ 18 世, 1824–1830: シャルル 10 世,
1830–1848: ルイ・フィリップ

1795/10/06, Benjamin Rodrigues 生誕

1807, Jews living in France were required to modify their family name,
1808, they were required to add a name of a Christian Saint.

1811, Entrance examination for École Polytechnique and École Normale, Rodrigues was ranked first（15 歳，入試で 1 位）.

［入試で 1 位になりながらも，上記のどの学校にも入学していない．それについては，ユダヤ人であることが理由だという説，学費を出してくれるはずのおじさん（？）が断ったらしい，という説，翌年も入試を受けて 1 位か 2 位になったという説，などがある．いずれにせよ普通のフランス人は入学と同時に国家公務員に採用されて学費がかからないが，彼は上記の 2 校のどれにも入学せず，Université de Paris に入学した．］

1815/06/23, soutien pour le doctorat (19 歳), devant la Faculté des Siences de Paris, sous la présidence de M. Lacrois, Doyen de la Faculté.

1815/06/28, awarded a doctorate in mathematics from the Faculty of Sciences of the University of Paris（パリ大学理学部で学位取得）.

1815～, After the 1815 Restoration the Catholic hierarchy took control of educational and academic institutions, and Jewish mathematicians could not obtain teaching position（王政復古によりユダヤ人はいかなる教育・学術機関にも就職禁止となった）.

1816, The main part of the above thèse was published in "Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes", *Formules générales pour l'attraction des corps quelquonques, et application de ces formules à la sphère et aux ellip-*

soïdes, Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, **3** (3): pp.361–385, 1816 (which contains *Rodrigues formula* for Legendre polynomials).

— between 1817–1837, no papers in mathematics were published —

1838, Journal de Mathématiques pures et appliquées, vol. 3 に 3 編の論文を発表（42 歳），その内容は

「凸多角形を対角線で三角形分割するやり方の個数」

「n 個のものの積を作るやり方の個数」

「2 項式 $(1+a)^x$ の冪級数への展開公式の純代数的証明」

（論文の長さはいずれも短いが，内容は，はじめの 2 つは当時の雑誌に載った論文の重要な結果を，簡潔かつ明瞭に証明して見せたものである.）

1839, 同誌 vol. 4 に論文 1 編発表，内容は

「置換における順序逆転の個数」

（個数を与える母関数を与えた，現代にも続く結果）

1840, 同誌 vol. 5 に「空間の運動」に関する論文発表（pp.380–440），

彼の最も重要な業績なので，その内容は後ほどより詳しく説明する.

（これは実質的な**四元数の発見**といえる.）

1843, 同誌 vol. 8 に 2 編の論文を発表

1843/10/16, William Rowan Hamilton (1805–1865) の四元数の発見：

fundamental formula $\quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$

1843/10/17, Letter from Sir William Rowan Hamilton to John T. Graves, *Esq. on Quaternions* (in printed form, 1 line about 75 letters and total 167 lines, containing footnotes), in Collected Works.

（これを羽ペンとインクで清書し，さらにそのコピーまで作ったとすると，大変な集中力である.）

1851/12/17, Benjamin Olinde Rodrigues（56 歳）逝去

3. 引用とコメント.

- Quoted from [URL1]

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rodrigues.html

.... We certainly know that he did not use his first name Benjamin and was known as Olinde Rodrigues. In fact Olinde was not one of his given names. Rather in 1807 Jews living in France were required to modify their family names and in the following year they were required to add a name of French origin. At this point Olinde was added to Rodrigues names. It is a slightly unusual name, but the explanation for this is quite logical. The family were Jewish and wished to obey the directive yet not give Rodrigues the name of a Christian saint. Sometimes in later life he used the name Benjamin-Olinde.

...... He got his doctoral degree from the Université de Paris in 1815. In that same year, restoration of the reactionary Bourbon monarchy under Louis XVIII closed off all possibilities of a university position for Rodrigues; one assumes that he would have preferred such a career. ....

....

As a second footnote, we remark that Rodrigues has many incorrect references to him in the mathematical literature. Élie Cartan thought that Olinde Rodrigues was two separate people, one called Olinde and one called Rodrigues. Several later authors, such as Temple, repeated Cartan's error.

注 2. Élie Cartan はその著書 *Leçons sur la théorie des spineurs* I, 1938, の p.57 で Rodrigues の論文 [R5-1] の結果を次のように引用している:

La formule (3) permet de retrouver les formules d'Euler-Olinde-Rodrigues. ....

コメント 1. 不思議なことに，キリスト教の聖人名にも，フランスの男性名にも，Benjamin があるが（お上に強制されて付けたはずの）Olinde という名はどちらにも無い．しかし，Rodrigues は数学の論文に関しては，Benjamin を使わず，Olinde Rodrigues と署名している．その理由は推測できないが，このことは彼に不利に働いていると思われる．例えば，上記の É. Cartan の引用だが，Cartan は，上の引用文中の les Formules d'Euler-Olinde-Rodrigues から分かるように，引用論文 [R5-1] を Olinde と Rodrigues という名前の 2 人の数学者の共著であると誤解していた．それをそのまま踏襲した数学者が何人か（Temple ほか）いたとのことである．パリの友人 Michel Duflo 氏には，なかなか手に入らなかった Rodrigues の論文のコピーについて非常にお世話になったのだが，「Olinde という first name があることは知らなかった」とメイルに書いてきた．なお，Olinde という名は，彼の弟妹達の第 2 の名とともに，父親が文芸作品などから取ったものとのことである（お上に対するささやかな（？）反抗だったのだろうか）．

コメント 2. 数学者の first name をめぐる混乱には，約 90 年後のドイツの J. Schur (1875–1941), I. Schur (Issai Schur) の場合がある．隠されていた（？）ユダヤ人嫌いが権力を握ったナチスによって迫害に変わった時代であった．Schur の不幸な晩年には涙するものがある（[平井 5] 参照）．

• Quoted from review [Davis] on the book [AlOr] *The Rehabilitation of Olinde Rodrigues*, AMS, 2005:

Rodrigues produced only 17 mathematical papers but wrote extensively about social, economic, and political matters, on banking and on alleviating problems of labor. From 1816 to 1837, Rodrigues produced no mathematical papers. Between 1838 and 1845, he wrote eight, including one on transformation groups that some consider his chef-d'oeuvre. Taken at face value, this is a remarkable achievement. How many of us could get back into mathematical shape after doing something else (writing reviews or becoming a provost, say) for two decades? Perhaps Rodrigues was theorematizing all along but didn't have the time to write up his findings properly. He left no personal papers, so we can't tell. We can safely conjecture, though, that he kept abreast of the contents of the mathematical journals of the day.

コメント３． 数年前に website で Rodrigues を調べたときには，無駄なサイトを捨てながら，可能性のあるサイトを探していくのにはかなりの日時が必要だった．その上に Rodrigues に対する誤った情報を載せているものが多かった．たとえば，「一生涯のうちに一本だけ論文を書いた数学者」（その論文は [R5-1]）というのがあれば，大分先には「一生涯のうちに二本だけ論文を書いた数学者」というのが出てくる．また，Rodrigues の生地と国籍についても，Rodrigues の綴り字からスペインかポルトガルかと論考したものや，「ポルトガルのある古文書館で一族の戸籍に関する文書を見付けたのでこれでほぼ決まり」というのもあった．気に掛けていろいろ情報を集めているうちに，大分たってから第３の論文を引用しているものを見付けた．それでいよいよこれは変だ，ちゃんと論文がいくつあるか調べて，そのコピーを集めなければ，と決心したのだが，この第３の論文が載っている雑誌（？）Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, **3**, というのが探してもなかなか見つからない．それで，Paris の Université VII を退官しているが，友人である Michel Duflo 氏に調べてくれるように依頼した．パリ中の大学図書館，国立文書館（？）などには無い，ということで，最後には米国のある大学の図書館サイトから見付けてくれた．さらには，Bulletin Scentifique de la Société Philomatique de Paris, という文献についても依頼したが，これも最後に books.google.com で見付けてくれた．合わせて大変な時間を使わせてしまった．

ところで，今回あらためて，website で mathmatician Rodrigues で検索をかけて見て驚いたのだが，数年前と様子が全く変わっていて，誤った情報を載せていたサイトは引っ掛からなくなり，以前には当然出て来るべきだっ

たが出てこなかった文献 [AlOr] などが高位にランクされて出てきた.

3. Chef-d'oeuvre 論文 [R5-1] 解題.

J. Math. Pures et Appl., **5**(1840), 380–440, タイトル部分

Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire;

Par M. OLINDE RODRIGUES.

論文の書き方：

独立した Introduction は無い. 番号が **1** から **33** まで振られているので, これを現代風に section と呼ぶことにする. 各 section にはタイトルが無く, イタリックで書かれたタイトル（?）の下に, 単独または数個の section が続いている. この構成のリストを以下に掲げる. 1つの section の中にも1個, 2個とイタリックのタイトルがあることがあり, これは subsection に対応しうる. 定理（Théorème）には **Thérème 1.1** などの見出しが無く, また, 主張（assertion）がイタリックで書かれていて, 地の文章から分離されているという 現代風ではない. 例えば, **4** の真ん中あたりに

Théorème fondamental.

というタイトルがあるが, それ以降はとくに定理の主張が分離独立して書かれている訳ではなくて, roman 体で書かれた地の文章が普通に続いている.

Proposition, Lemme, Remarque 等は無く, 図もない.

内 容：

固体（un solid）の移動（déplacement）について, 非常に一般的に論じている. すなわち, 現代用語でいうと, ユークリッド運動群を一般的に論じている. 従って, そこには, 回転（rotation）と平行移動（translation）という2種類の運動があるのだが,「平行移動とは, 移動と直角の方向の無限遠にある回転軸の回りの 移動の方向への無限小回転である」というのが全編を貫く基本アイディア（Idée générale）である. 従って,「平行移動の性質は回転の性質に含まれる」という（**1**～**2**）：

Ainsi donc, toute *translation* d'un système peut rigoureusement être considéré comme une rotation d'une amplitude infiniment petite autour d'un axe fixe infiniment éloigné et normal à la direction de cette translation.

On ne sera donc pas surpris de trouver ultérieurement toutes les propriétés des *translations* comprises dans celles des rotations, ……

議論の手法としては，無限小の量 Δx, Δy, Δz 等を含んだ計算と，もう一つは球面三角形から平面三角形への極限移行 を繰り返し使う．

1点を固定する移動，すなわち，その点の回りの回転について．

互いに交わる（convergent）２つの軸に関する回転の合成，すなわち，交点を中心とする２つの**回転の合成**について，である．ここにはすでに $SO(3)$ での積構造を飛び越えて，その普遍被覆群での積構造が現れている．それが Rodrigues の公式である．肝心な部分を引用する：

> Telle est la différence caractéristique à signaler entre la composition des rotations et celle des translations successives. Il y a d'ailleurs entre des deux sortes de composition l'analogie qui existe entre les proprétés du triangle rectiligne et celles du triangle sphérique; et si l'on compare les translations parallèles aux trois côtés d'un triangle rectiligne, aux sinus des demi-rotation accomplies autour des trois côtés d'un angle trièdre, les valeurs des translations et celles de ces sinus seront également proportionnelles aus sinus des angles opposés aux côtés respectifs dans le triangle rectiligne et dans l'angle trièdre.

（意味）第１文節では，前の文章を受けて，「**回転の合成と平行移動の繰り返しの差違**」に言及しているが，その後は２種の合成に関する類似を，平面三角形（triangle rectiligne）と球面三角形（triangle sphérique）の性質の類似に比している．そして回転の合成に関しては，回転軸と回転角に注目して，回転角の 1/2 倍と球面三角形の内角（angle trièdre）の関係を与えている．球面三角法的には合成の計算法が与えられている．記号を使って説明する．

回転の中心を原点 O とし，O を中心とする単位球面 S^2 上の点 A, B, C を使うが，回転軸 $\overline{\mathrm{OA}}$ 回りの回転角 α の回転を $R(\overline{\mathrm{OA}},\alpha)$ と書く．もう一つの回転 $R(\overline{\mathrm{OB}},\beta)$ との合成を

$$R(\overline{\mathrm{OC}},\gamma) = R(\overline{\mathrm{OB}},\beta)\, R(\overline{\mathrm{OA}},\alpha)$$

とする．回転軸 $\overline{OC}$ と回転角 γ は球面三角形・球面三角法を使って計算出来る．

まず，平面 OAB を，$\overline{OA}$ を軸として**時計回り**に角度 $\alpha/2$ だけ回した平面と，$\overline{OB}$ を軸として**反時計回り**に角度 $\beta/2$ だけ回した平面との交わりの直線をとると，それが $\overline{OC}$ を含む．つぎに球面 S^2 上に球面三角形 ΔABC をとる．S^2 上で２点 A, B を結ぶ直線（大円の一部）を単に AB と書く．AB と AC のなす球面三角形での内角（l'angle trièdre）は $\alpha/2$ であり，BA と BC のなす内角は $\beta/2$ であるが，そのとき，CA と CB のなす内角が $\pi-\gamma/2$ となる．このことの証明は，球面上に ΔABC を上手に描いて適切な補助線（球面線分）を何本か引けば，中学生でも分かる（例えば，文献 [Agnew], Figure 3, Rodrigues' Construction, 参照）．Rodrigues は上に引用した 8 の結論部分に到るるまでに約１頁の証明（説明）を与えているが，当時のフランスの数学者には球面三角法についてのかなりの素養があったようである．

Composition des rotations infiniment petites. **9**

ここでは，平行移動を rotations infiniment petites と捉えて，その合成に関して論じている．

De la composition des rotations autour de deux axes parallèles.
10 ~ 11

平行な２つの軸での回転の合成．これは固定点まわりの回転と平行移動との合成になる．

De la composition des rotations autour de d'axes fixes non convergents en nombre quelconques. **12**

交わらない（non convergent）２つの軸の軸回りの回転の合成．これは複雑である．

Examen du cas particulier des axes non convergents. **13**

De la composition des déplacements successifs d'un système combinés de rotations et de translations. **14 ~ 15**

Équation de l'axe central. **16**

合成した回転の回転軸 OC を数式で求める方程式

Examen du cas des variations infiniment petites. **17 ~ 19**

De la composition analytique des rotations autour d'axes non convergents. **20**

交わらない２本の軸の回りの回転の合成に関する計算式

Composition des rotations successives autour de trois axes rectangulaires. **21**

回転の Euler 表示に当たる（ちなみに，Euler 自身には Euler 表示に関係した論文はないらしい）

De la composition des déplacements infiniment petits successifs d'un système solide. **22 ∼ 23**

*Conditions d'*équilibre *de plusieurs déplacements successifs infiniment petits.* **24** (**25** 欠番)

移動を繰り返した（des déplacements successifs）あとでもとの位置に戻る，すなわち，**平衡状態**が実現される条件について論ずる.

Analogie de ces lois de composition et d'équilibre avec celles de la composition et de l'équilibre des forces *appliquées à un système invariable.* **26**

上で論じた **平衡状態** と **力が働いたときの平衡状態** との類似が驚くべきもの（L'analogie frappante）であることを論ずる.

De la détermination des variations des coordonées d'un système solid dues à un déplacement quelconque de ce système, analytiquement déduites des conditions de l'invariabilité de ce système. **27 ∼ 32**

CONCLUSION. — *Loi générale de la Statistique.* **33**

References

[**] **Papers of (Benjamin) Olinde Rodrigues (1795-1851):**

[R01] Sur le mouvement de Rotation des corps libres, Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, **3** (1814–1816): pp.32–36, 1814.

[R02] De l'angle de contingence d'une courbe à double courbure, Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, **3** (1814–1816): pp.36–37, 1814.

[R03] Sur la résistance qu'éprouve un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée, Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, **3** (1814–1816): pp.37–39, 1814.

[R04] *Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces; par* M. Rodrigue [nom mal écrit à la place de Rodrigues], Bulletin Scientifique de la Société Philomatique de Paris, pp.34-36, 1815. [Extraits écrit par S.D. Poisson, et signé 'P.' à la fin de l'article.]

[R05] De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement, rapportées aux variables indépendantes,

Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, **3** (1814–1816): pp.159–162, 1815.

[R06] Recherches sur la théorié analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une classe d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie, Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, **3** (1814–1816): pp.162–179, 1815.

[R07] Addition aux recherches précédentes, Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, **3** (1814–1816): pp.180–182, 1815.

[R08] *Mémoire (*) sur l'attraction des sphéroïdes, par M.* Rodrigues, *Docteur ès-siences.* PREMIÈRE PARTIE. *Formules générales pour l'attraction des corps quelquonques, et application de ces formules à la sphère et aux ellipsoïdes.* SECONDE PARTIE. *Attraction des Sphéroïdes infiniment peu différens d'une sphère, et dévelopement générale de la fonction V.* Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique, **3** (1814–1816): pp.361–385, 1816.

(*) Ce Mémoire a été le sujet d'une thèse soutenue pour le doctorat, devant la Faculté des Siences de Paris, le 23 juin 1815, sous la présidence de M. Lacrois, Doyen de la Faculté.

[Note] *Correspondence sur l'École Polytechnique* was founded in 1804 by J.N.P. Hachette, Professor of the school at that time, and ended when he was forced to resign the post on 1816 because of the *Restauration.* Three volumes were published up to 1816.

•• No papers of Rodrigues were published between 1817–1837 ••

[R3-1] Sur le nombre de manière de décomposer un Polygone en triangles au moyen de diagonales, *J. Math. Pures et Appl.*, **3**(1838), 547–548.

[R3-2] Sur le nombre de manière de d'effectuer un produit de n facteurs, *ibid.*, **3**(1838), 549–549.

[R3-3] Démonstration élémentaire et purement algébrique du développement d'un binome élevé à une puissance négative ou fractionnaire, *ibid.*, **3**(1838), 550–551.

[R4-1] Note sur les inversions, ou dérangements produits dans les permutations, *ibid.*, 4(1839), 236–240.

[R5-1] Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire, *ibid.*, **5**(1840), 380–440.

(The part of this paper on the composition of rotations may be thought

of as a **discovery** – predating William Rowan Hamilton – of the quaternions)

[R8-1] Du développement des fonctions trigonométriques en produits de facteurs binômes, *ibid.*, **8**(1843), 217–224.

[R8-2] Note sur l'évaluation des arcs de cercle, en fonction linéaire des sinus ou des tangentes de fractions de ces arcs, décroissant en progression géométrique, *ibid.*, 8(1843), 225–234.

[**] 関連する論文・文献など：

[Agnew] D.C. Agnew, *Finite Rotations*, 2006 (in website).

[Altm1] S.L. Altmann, *Rotations, Quaternins, and Double Groups*, Clarendon Press, 1986.

[Altm2] Simon L. Altmann, *Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion scandal, What went wrong with one of the major mathematical discoveries of the nineteenth century, Mathematics Magazine*, **62**(1989), 291-308.

[AlOr] S. Altmann and E. Ortiz edit., *The Rehabilitation of Olinde Rodrigues, Mathematics and Social Utopias in France: Olinde Rodrigues and His Times*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, 168 pages. Contributors: Simon Altmann, Richard Askey, Paola Ferruta, Ivor Grattan-Guinness, Jeremy Gray, Eduardo L. Ortiz, Barrie M. Ratcliffe, David Siminovitch, and Ulrich Tamm.

[Bell] Eric Temple Bell, *Men of Mathematics*, Simon & Schuster (初版 1937), 1986 (paperback; ISBN 0-671-62818-6); Chapter 19, An Irish Tragedy, Hamilton.

[Car1] É. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. France, **41**(1913), 53-96.

[Car2] Élie Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs* I, 1938, Hermann, Paris.

[Crow] Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System* (初版 1967), Dover Books on Mathematics, paperback, 2011.

[Davis] Phylip J. Davis, Book review on *"The Rehabilitation of Olinde Rodrigues, Mathematics and Social Utopias in France: Olinde Rodrigues and His Times"*, SIAM News, **40-7**, September 2007.

[Ham1] William Rowan Hamilton, On a new species of imaginary quantities connected with the theory of quaternions, Proc. Roy. Irish Acad., **2**(1843), 424-434.

[Ham2] W.R. Hamilton, On quaternions; or on a new system of imaginaries in agebra. (A letter to John T. Graves, dated 17 October 1843), *Philosophical Magazine*, **25**(1844), 489-495.

[Ham3] W.R. Hamilton, *Lectures on quaternions* (736 pages), Hodges & Smith, Dublin, 1853.

[Ham4] W.R. Hamilton, *Elements of Quaternions*, 2nd edition, ed. C.J. Jolly, 2 vols, Longmans, Green & Co., London, 1901 (762 pages) [first edition, 1866].

[平井 1] 平井 武, 線形代数と群の表現 I, II, すうがくぶっくす **20, 21**, 朝倉書店, 2005.

[平井 2] 平井 武, 山下 博 共著, 表現論入門セミナー — 具体例から最先端にむかって —, 第 2 版, 遊星社, 2007.

[平井 3] 平井 武, 奈良教育大学 2008 年度大学院集中講義・講義録『四元数, 3 次元回転群, そして, 群の表現論初歩』

[平井 4] 平井 武, 数学者から数学者へ／シューア,『数学セミナー』2009, 2 月号, pp.6-7.

[平井 5] 平井 武, Schur の表現論の仕事（射影表現 3 部作） その I, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **30**(2009), pp.104-132.

[平井 6] 平井 武, Schur の表現論の仕事（射影表現 3 部作） その II, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **31**(2010), pp.74-82.

[Paul] W. Pauli, Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, Zeitschrift für Physik, **43**(1927), 601-623. （内容は, "パウリ行列" とその応用）

[Sch1] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. für die reine und angewante Mathematik*, **127**(1904), 20–50.

[Sch2] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *ibid.*, **132**(1907), 85–137

[Sch3] J. Schur, Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *ibid.*, **139**(1911), 155–255.

[Smith] W.D. Smith, Quaternions, octonions, and now, 16-ons and 2^n-ons; New kinds of numbers, *Notice AMS, electronic publishing*, Feb 2004, pp.1-68.

[URL1] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rodrigues.html`

[URL2] `en.wikipedia.org/wiki/University_of_Paris`
University of Paris - Wikipedia, the free encyclopedia

付　録：

奈良教育大学2008年度前期大学院集中講義・講義録

『四元数，3次元回転群，そして，群の表現論初歩』

第1章（省　略）

2　複素数，四元数を2次の行列で表現する

前書き（省　略）

§2.1　（省　略）

2.2　四元数を表現する複素2次正方行列

4元数（quaternion）$q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{R})$ の全体のなす非可換な体（斜体という）が4元数体 $\boldsymbol{H}$ である．$\alpha = 0$ の q を純4元数とよぶ．純4元数の全体を $\boldsymbol{H}_-$ と書く．i, j, k はハミルトン（W.R. Hamilton,1805–65）が見つけた虚数単位で，

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \tag{2.1}$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \tag{2.2}$$

を満たす $\boldsymbol{H}$ の $\boldsymbol{R}$ 上の基底である．1843年10月16日にハミルトンが散歩途上で発見した．論文は1844年 [Ham1] に出ているが，そのほかに，彼が発見の翌日に詳細な報告を手紙で友人 J.T. Graves に書き送っていて，そのコピーが1844年に公刊されている．全集で丁度 印刷4頁分167行の長いものである [Ham2].

4元数体 $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の多元環だが，$M(2, \boldsymbol{C})$ に埋め込める．その写像 Ψ は，対応

$$i \to I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j \to J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad k \to K = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

を $\boldsymbol{R}$ 上線形に拡張したものであり，和を和に，積を積に写す．すなわち，$q, q' \in \boldsymbol{H}$ に対し

$$\begin{cases} \Psi(q + q') &= \Psi(q) + \Psi(q'), \\ \Psi(qq') &= \Psi(q)\Psi(q'). \end{cases} \tag{2.3}$$

$q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ の共役4元数を $\overline{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$ とおき，q のノルムを

$$\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^{1/2}$$

とおくと，$q^{-1} = \|q\|^{-2}\overline{q}$.

問題 2.2.1. 行列の3ツ組 $\{I, J, K\}$ は3ツ組 $\{i, j, k\}$ と同様の関係式を満たすことを示せ．

問題 2.2.2. 公式 (2.3) を証明せよ．また，$\det \Psi(q) = \|q\|^2$，$\overline{qq'} = \overline{q}\,\overline{q'}$ を示せ．

問題 2.2.3. 関係式系 (2.1) から関係式系 (2.2) が導かれることを示せ．逆に後者から前者が導かれるかどうか調べよ．

ヒント． $(2.2) \overset{?}{\Longrightarrow} (2.1)$ について：まず，$ijk = i^2 = j^2 = k^2$ を得る．この値を y とおく．(2.2) の第 1 式から，

$$-ij^2 i = ijk \quad \therefore\ -i^2 j^2 = ijk \quad \therefore\ y^2 + y = 0 \quad \therefore\ y(y+1) = 0.$$

i, j, k が $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立で，$\boldsymbol{R}1 + \boldsymbol{R}i + \boldsymbol{R}j + \boldsymbol{R}k$ が斜体だとすれば，$y \neq 0$，かつ，$y + 1 = 0$． □

注 2.2.4. ハミルトンが 4 元数を発見した散歩の途中に 橋があって，その橋の石に備忘のために彫りつけたと言われるのは関係式系 (2.1) であり，the fundamental formula とも呼ばれる．

3　4 元数体と 3 次元回転群，ハミルトンの齟齬

3.1　4 元数による 3 次元回転の表示

ハミルトンはその後，4 元数の応用などを追求していたが，そのテーマの 1 つに 3 次元ユークリッド空間 E^3 の回転を記述する問題があった．これは **2.1** 節で説明したように（絶対値 1 の）複素数の掛け算により平面の回転が記述できたので，それと類似のことを狙(ねら)ったのである．

彼は純 4 元数 $\boldsymbol{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \boldsymbol{H}_-$ で E^3 の次の点を表した：

$$x = {}^t(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

x は縦ベクトルだが，スペースを節約するため以後横ベクトルの転置で表す．

ベクトル x の長さは

$$\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

であるから $\|\boldsymbol{x}\| = \|x\|$．この等長同型を記号で $\boldsymbol{H}_- \cong E^3$ と書けば端的で印象的である（ハミルトンの時代にはなかった記号の威力である）．

E^3 の原点を固定する回転は，3 次の直交行列 $U = (u_{ij}) = (u_{ij})_{i,j=1}^3 \in SO(3)$ で $x \to x' = Ux$ と表される【文献 [平井 1], 7 章参照】．ここに，

$$SO(3) = \{U \in M(3, \boldsymbol{R});\ U\,{}^tU = {}^tUU = E_3\ (\text{単位行列}), \det U = 1\}. \tag{3.2}$$

ハミルトンはノルム 1 の 4 元数の全体 $\boldsymbol{H}_1 = \{a \in \boldsymbol{H}; \|a\| = 1\}$ をとり，$a \in \boldsymbol{H}_1$ による掛け算 $\boldsymbol{x} \to a\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_-$) により，原点を固定する回転の $x \in E^3$ への作用を表そうとした．$\boldsymbol{H}_1$ は積により群になるので，現代風に言うと

「このやり方で群 $\boldsymbol{H}_1$ から 3 次元回転群 $SO(3)$ への同型が与えられる筈」

と見込んだわけである．しかし結果から言うと，これは大きな見込み違いというかボタンの掛け違いだった．40 歳前に 4 元数を発見した彼は何冊も本を書いてその普及に努めた（[Ham3], [Ham4] など）のだが，このボタンの掛け違いが一生つきまとったようである．Altmann による評論 [Altm2] には，この点について The sad truth とか entirely unacceptable とか Optical illusion とか causing endless damage とか，やや感情的な用語を使いながら詳述してある．

さらなるコメントを拾うと，

◆ ..., and that Hamilton committed a serious error of judgement in basing his parametrization on the special case of the rectangular transformation.（これは次の問題 3.1 に現れる変換）

◆ Thus, it is entirely wrong ever to identify a pure quaternion with a vector, as Hamiton done in (11).（(11) 式は省略）

問題 3.1. $a = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \boldsymbol{H}_1$ を

$$a = \cos\theta + \sin\theta\, \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_-,\ \|\boldsymbol{w}\| = 1 \text{ (i.e. } \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1)$$

と書き表す．$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_-$ に対して，$a\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_-$ となるためには，E^3 で $x \perp w$（直交）が必要十分であることを示せ．その場合 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = a\boldsymbol{x}$ から来る E^3 での変換 $x \to x'$ はどんな変換か． □

さて，では 4 元数による 正しい回転群記述は何だったのか．その答は実質的にはハミルトンに先んじて Rodrigues [R5-1] によって 1840 年に与えられていたのだが歴史的には無視されてきた．

問題 3.2. $a \in \boldsymbol{H}_1$ に対して次を示せ：

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_- \Longrightarrow \boldsymbol{x}' = a\boldsymbol{x}a^{-1} = a\boldsymbol{x}\overline{a} \in \boldsymbol{H}_-. \tag{3.3}$$

$a \in \boldsymbol{H}_1$ を問題 3.1 のように，$a = \cos\theta + \sin\theta\,\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$, と表し，$\boldsymbol{H}_-$ 上の変換

$$R(a) : \boldsymbol{H}_- \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = a\boldsymbol{x}a^{-1} \in \boldsymbol{H}_- \tag{3.4}$$

を考え，これを E^3 上の変換 $E^3 \ni x \to x' \in E^3$ に翻訳したものを 3×3 行列 $R'(a)$ を使って $x' = R'(a)x$ と表す．$\|x'\| = \|x\|$ $(\forall x \in E^3)$ だから，$A = R'(a)$ は直交行列（i.e. ${}^tA\,A = E_3$）である【[平井 1], 7.3 参照】故に

$$\det({}^tA\,A) = \det(A)^2 = \det E_3 = 1, \quad \therefore \quad \det A = \det R'(a) = \pm 1. \tag{3.5}$$

他方，a が連続的に 1 につながっているから（∵ $\boldsymbol{H}_1$ は 3 次元球面 S^3 と同相）$R'(a)$ は単位行列 $R'(1) = E_3$ に連続的に繋（つな）がり $\det R'(a) = \det R'(1) = 1$，よって，$R'(a) \in SO(3)$．また，

$$R'(a)R'(a') = R'(aa') \ (a, a' \in \boldsymbol{H}_1) \tag{3.6}$$

だから，$\boldsymbol{H}_1 \ni a \to R'(a) \in SO(3)$ は準同型である（次節の用語に従えば，R' は群 $\boldsymbol{H}_1$ の 3 次元線形表現である）．$R(a)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$ だから $R'(a)w = w$．従って，$R'(a)$ は w を固定するので回転軸 w の回りの回転であるが，実は角度 2θ の右ねじ回転であることが次の問題を解けば分かる．

問題 3.3. $a = \cos\theta + \sin\theta\,\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$，とする．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$ を $u, v, w \in E^3$ が右手系の直交座標ベクトル系となるようにとると，

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{vw} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{wu} = \boldsymbol{v}, \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} R(a)\boldsymbol{u} = \cos(2\theta)\boldsymbol{u} + \sin(2\theta)\boldsymbol{v}, \\ R(a)\boldsymbol{v} = -\sin(2\theta)\boldsymbol{u} + \cos(2\theta)\boldsymbol{v}. \end{cases} \tag{3.8}$$

基底 $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ に関する $R(a)$ の行列表示は，

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

ヒント． $\boldsymbol{u} = {}^t(u_1, u_2, u_3)$ などと座標をかくと，

$$\text{行列式} \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 1, \quad \text{さらに 問題 3.6 参照.} \tag{3.10}$$

問題 3.4. $q \in \boldsymbol{H}$ に対し，収束する級数により

$$\exp q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \cdots \tag{3.11}$$

とおくと，$\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$ に対し，

$$\exp(\theta\boldsymbol{w}) = \cos\theta + \sin\theta\,\boldsymbol{w} \quad (\theta \in \boldsymbol{R}). \tag{3.12}$$

ヒント． $\boldsymbol{ww} = \boldsymbol{w}^2 = -1$． □

上述の回転の表示での重要ポイントは，$a = \exp(\theta\boldsymbol{w}) \to R'(a) = R'\big(\exp(\theta\boldsymbol{w})\big)$ では $\theta \to 2\theta$ と角度が 2 倍になっていることである．これは，$a = \exp(\theta\boldsymbol{w})$ と $-a = \exp\big((\theta + \pi)\boldsymbol{w}\big)$ とが同じ直交行列 $R'(a) = R'(-a)$ を与えることに照応し，準同型 R' が 2:1 の対応（核は $\{\pm 1\}$）であることを意味する．ハミルトンは開拓者一流の頑固さでもってあくまでも $\theta \to \theta$ の対応を得ることに拘（こだわ）ったようである．

伝記の類によると，ハミルトンはやがて過剰なアルコール摂取に苦しむようになった．Altmann はその一因としてこの回転表示問題でのシリアスな悩みを挙げる．その悩みの原因を現代から見れば，

① 作用するもの（operators）と

② 作用されるもの（operands）

がいずれも同じ 4 元数であったからそれらが混同されたのが原因である．

読者諸君はこの小文を読んでもハミルトンの悩みがしっくり来ないかも知れないが，それは1つには諸君が受けた現代の数学的基礎訓練，2つには著者（平井）が

① のためには a（italic 体）

② のためには $\boldsymbol{x}$（boldsymbol）

とするなど慎重に記号を選んで読者のために引いておいた伏線，のせいであり読者の理解は無意識のうちに正しい方向へと誘導されているのである．

いずれにせよ我々は次の重要な結果を得た．

定理 3.5. 群 $\boldsymbol{H}_1$ は3次元球面と同相で単連結であり，準同型 $R' : \boldsymbol{H}_1 \to SO(3)$ は被覆写像を与える．従って，$\boldsymbol{H}_1$ は回転群 $SO(3)$ の普遍被覆群である． □

問題 3.6（計算公式）． $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_-$ に対する E^3 の元を $u = {}^t(u_1, u_2, u_3), v = {}^t(v_1, v_2, v_3)$ とし，その内積を $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ と定義し，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \langle u, v\rangle$ とおくと，

$$\boldsymbol{uv} = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}, \tag{3.13}$$

$$\text{ここに，}\quad \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} := b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \boldsymbol{H}_-,$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix},\ b_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix},\ b_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}. \tag{3.14}$$

注 3.1.1. 上で定義された $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の**ベクトル積** $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ は 3×3 行列を使って書くと，次のように覚えやすい形に書ける:

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} i & u_1 & v_1 \\ j & u_2 & v_2 \\ k & u_3 & v_3 \end{vmatrix}.$$

問題 3.7. 次の関係式を証明せよ：

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}, \quad (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{u}, \quad (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{v}. \tag{3.15}$$

3.2 回転の Rodrigues パラメーターによる表示と積公式

- $\phi\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_-$ $(\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1)$ **による回転の表示．**

3次元空間 E^3 の原点を止める任意の回転 ρ には必ず回転軸があることが別途示されている．回転軸を $w, \|w\| = 1$，軸の回りの右ねじ回転の角度を ϕ，とすると，

$$a = \exp\left(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}\right) \in \boldsymbol{H}_1 \tag{3.16}$$

とおけば，$R'(a) = \rho$．ただし，$\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$ は $w \in E^3$ に対応．これにより一般の3次元回転 ρ を $\phi\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_-$ でパラメーター表示し，$\rho = \rho(\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})$ と書く．これを回転 ρ の **Rodrigues 表示**と呼ぶ．この表示は，いわゆる Euler 角による表示【文献 [平井 1],7.6 節参照】のようにパラメーターに切れ目がない．そして局所的には1価である．

注 3.8. 完全に1価にしようと，$\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}$ の ϕ に制限を加えるとパラメーターに切れ目が生ずる．従って，パラメーター空間として $\boldsymbol{H}_-$ をとり，「局所的には1価だが大局的には 1:1 ではない」状況が自然である．

• さらに2つの回転の積 $\rho(\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\rho(\frac{1}{2}\phi'\boldsymbol{w}') = \rho(\frac{1}{2}\phi''\boldsymbol{w}'')$ において，$\frac{1}{2}\phi''\boldsymbol{w}''$ をもとの $\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}, \frac{1}{2}\phi'\boldsymbol{w}'$ で書くには

$$(3.17)\quad \big(\cos(\tfrac{1}{2}\phi) + \sin(\tfrac{1}{2}\phi)\boldsymbol{w}\big)\big(\cos(\tfrac{1}{2}\phi') + \sin(\tfrac{1}{2}\phi')\boldsymbol{w}'\big) = \cos(\tfrac{1}{2}\phi'') + \sin(\tfrac{1}{2}\phi'')\boldsymbol{w}''$$

を4元数体 $\boldsymbol{H}$ における演算通りに書き下せばよい．それが2つの回転の積に対する **Rodrigues の公式** [R5-1] である．この公式は本質的に球面三角法の公式に類似するが，一応の形は次の通り：

$$(3.18)\quad \begin{aligned} \cos(\tfrac{1}{2}\phi'') &= \cos(\tfrac{1}{2}\phi)\cos(\tfrac{1}{2}\phi') - \sin(\tfrac{1}{2}\phi)\sin(\tfrac{1}{2}\phi')\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}', \\ \sin(\tfrac{1}{2}\phi'')\boldsymbol{w}'' &= \cos(\tfrac{1}{2}\phi)\sin(\tfrac{1}{2}\phi')\boldsymbol{w}' + \cos(\tfrac{1}{2}\phi')\sin(\tfrac{1}{2}\phi)\boldsymbol{w} + \\ &\quad + \sin(\tfrac{1}{2}\phi)\sin(\tfrac{1}{2}\phi')\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{w}'. \end{aligned}$$

注 3.9. ここで，ϕ, ϕ' が共に微少のときの第1次近似は，上の第2式より $\phi''\boldsymbol{w}'' \fallingdotseq \phi'\boldsymbol{w}' + \phi\boldsymbol{w}$．さらに，$\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}'$ が近いとすると，第1次近似は

$$(3.19)\qquad \phi'' \fallingdotseq \phi + \phi', \qquad \boldsymbol{w}'' \fallingdotseq \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}').$$

【オイラー角による表示にはこうした公式がない】

注 3.10. 球面三角形 ABC の内角を α, β, γ; 対辺を a, b, c; 面積を S; 球の半径を ρ とすると，

$$(3.20)\qquad \text{球面過剰}\qquad \alpha + \beta + \gamma - \pi = S/\rho^2 > 0,$$

以下は，半径 $\rho = 1$,

$$(3.21)\qquad \text{正弦公式}\qquad \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

$$(3.22)\qquad \text{余弦公式}\qquad \begin{cases} \cos a = \cos b\,\cos c + \sin b\,\cos c\,\cos\alpha, \\ \cos b = \cos c\,\cos a + \sin c\,\cos a\,\cos\beta, \\ \cos c = \cos a\,\cos b + \sin a\,\cos b\,\cos\gamma, \end{cases}$$

$$(3.23)\qquad \text{余弦公式}\qquad \begin{cases} \cos\alpha = -\cos\beta\,\cos\gamma + \sin\beta\,\sin\gamma\,\cos a, \\ \cos\beta = -\cos\gamma\,\cos\alpha + \sin\gamma\,\sin\alpha\,\cos b, \\ \cos\gamma = -\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta\,\cos c, \end{cases}$$

$$(3.24)\qquad \text{正弦余弦公式}\qquad \begin{cases} \sin a\,\cos\beta = \cos b\,\sin c - \sin b\,\cos c\,\cos\alpha, \\ \sin b\,\cos\gamma = \cos c\,\sin a - \sin c\,\cos a\,\cos\beta, \\ \sin c\,\cos\alpha = \cos a\,\sin b - \sin a\,\cos b\,\cos\gamma. \end{cases}$$

注 3.11 (2008/08/23 追加). 公式 (3.21)-(3.24) においては，辺の長さは（大円の円弧が"直線"であるので）ラジアンで計る．$\rho = 1$ なので，それは角度と一致する．たとえば，辺 $\overline{AB}$ の長さ c は，$c = \angle AOB$（O は球の中心)．

四元数の算法から来た公式 (3.18) の第1式は，球面三角法の公式 (3.23) の第3式から得られる（これが Rodrigues の結果)．実際，

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\phi,\ \ \beta = \tfrac{1}{2}\phi',\ \ \gamma = \pi - \tfrac{1}{2}\phi'',\ \ c = \angle AOB,\ \ \cos c = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}'.$$

◆ **Euler 角による 3 次元回転の表示を思い出そう．**

E^3 における単位座標ベクトルを e_1, e_2, e_3, とする． e_3 を回転軸とする右ねじの角度 θ での回転を $g_3(\theta)$ と書く． 同様に，$g_2(\theta), g_1(\theta)$ を定義すると，

$$g_3(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ g_2(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix},\ g_1(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

E^3 の原点を中心とする一般の回転 ρ は次のように表示できる．

$$\begin{aligned}\rho &= g_3(\varphi)g_2(\theta)g_3(\psi) \qquad\qquad (-\pi<\varphi,\psi\le\pi,\ 0\le\theta\le\pi)\\ &= \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cos\theta\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi & \sin\theta\cos\psi\\ \cos\varphi\cos\theta\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi\\ -\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3.3 ハミルトンの齟齬，Euler 角表示と Rodrigues 表示の比較

◆ 4 元数を用いて 3 次元回転を表すときにハミルトンに生じた誤解については既に述べたが，さらにウェブサイト

http://members.fortunecity.com/jonhays/clifhistory.htm

からの情報を転載しよう．このブログの主（あるじ）jonhays 氏の述懐から引用すると，

..... At age 17, I had read about Hamilton in *Men of Mathematics**1) by Eric Temple Bell (1883–1960). Bell devotes a chapter to Hamilton and praises his early work, but makes him appear*2) to be a drunken recluse who fudged something called "quaternions". This prejudiced me (and others) and diverted my search until the following occured.

注 *1) Amazon で見ると，この本は 608 頁あり，出版は初版 1937, paperback 1986, Simon & Schuster 社, $12.24. 古代の 3 人の数学者を短く描写した後, 17,18,19 世紀の約 30 人の数学者の生涯について書いている．

注 *2) この文節を直訳すると，「彼を，4 元数なるものをでっち上げた飲んだくれの世捨て人，ととれるように描写している」となる．book review によると，この本の描写はときとして史実をかなり修飾しているところもあるとのこと．

◆ 同じウェブサイトの文章の続きに，Altmann のテキストブック [Altm1] から次のように引用している（行分割などは平井による）：

.... On p. vii, "... rotation operators are often obtained as by-products of the angular momentum operators in quantum mechanics. Partly as a result of this approach, rotations are then parametrized by means of the familiar Euler angles, which suffer from three defects:

• they are not always unique,
• they are very cumbersome to determine in the finite rotation group (point groups), and
• they do not provide a scheme for the multiplication of rotations.

An entirely different approach to rotation is possible, which was introduced by Olinde Rodrigues in 1840 but which has never been used. The rotation operators in this approach are obtained by entirely geometric method, which .... leads most naturally to the parametrization of rotations by parameters that coincide with quaternions. These parameters are
• unique, 【局所的に 1:1】
• exceedingly easy to determine,
and — because they are quaternions — they provide an algebra that
• permits the multiplication of rotations in a simple way.
At the same time, and most importantly, these parameters
♣ determine unambiguously the phase factors that appear in angular momentum representations for half-integral quantum numbers. [中略]
This result leads to
♣ a rigorous formulation of the representation of the rotation group, either
as projective representations or
by means of double groups. "

♣ 航空工学など回転を動力学的に問題にするときには，時間 t に依存する回転 $Q(t)$ を取り扱う．$Q(t)$ の時間微分 $\frac{d}{dt}Q(t) = \dot{Q}(t)$ のコンパクトな表示式が得られる（定理 4.1 参照）．

4　応用：3次元回転の記述が問題になる場合と効果

web-site よりの引用： D.C. Agnew, *Finite Rotations*, 2006.

（イ） 地球物理学においては次のような問題に対して回転の記述は重要である：

• プレートテクトニクスでは，地質学的時間に従ってプレートを記述するのに地球中心を不変にする回転として記述する．
• 測地学においては，Newton の運動方程式の基準になる宇宙の慣性座標系と地球の座標系との関係を記述するのに必要．これは人工衛星の軌道計算に使う．
• 地震学では，断層面が基準面からどれほどずれたかを数値化するのに２つの回転の “difference” を数量化する必要がある．

（ロ） コンピューター・グラフィックス，
航空機設計，宇宙船姿勢制御，航空学などの動力学

◆ その際に **Euler** 角を用いると問題（困難）にぶつかる：

問題１、 ２つの回転を掛けて第３の回転を得たとき，その Euler 角の計算がややこしい．まず２つの行列を計算，その積を計算，その Euler 角を注意深く計算．

問題 2． こうした計算の誤差の評価が出来ない．微少回転でも Euler 角には大きな変動があったり，段差が生じたりする．

◆ それらを克服するためには，Rodrigues によるノルム 1 の 4 元数 $\boldsymbol{H}_1$ を用いた表示が有効である．回転軸 $w \in E^3 \leftrightarrow \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_-$ ($\|w\| = \|\boldsymbol{w}\| = 1$) の回りの角度 ϕ の右ねじ回転 $x \to \rho(\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})x$ (in E^3) は

$$(4.1) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{H}_- \ni \boldsymbol{x} &\to \exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}\exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})^{-1} \\ &= \big(\cos\tfrac{1}{2}\phi + \sin\tfrac{1}{2}\phi\,\boldsymbol{w}\big)\boldsymbol{x}\big(\cos\tfrac{1}{2}\phi - \sin\tfrac{1}{2}\phi\,\boldsymbol{w}\big) \in \boldsymbol{H}_-, \end{aligned}$$

と書かれる．**航空学などの動力学**では，$\phi, \boldsymbol{w}$ は時間 t を含むので，上の $\boldsymbol{H}_-$ での回転を $Q(t)$ と書く．

定理 4.1. 回転 $Q(t)$ の時間微分 $\dot{Q}(t) = \dfrac{d}{dt}Q(t)$ は次で与えられる：

$$(4.2) \qquad \dot{Q}(t)\boldsymbol{x} = Q(t)\Big(\big(\dot{\phi}\,\boldsymbol{w} + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\phi\,\dot{\boldsymbol{w}} \times \boldsymbol{w}\big) \times \boldsymbol{x}\Big).$$

証明． 等式 $\boldsymbol{w}^2 = \boldsymbol{w}\,\boldsymbol{w} = -1$ の両辺を t で微分すると，

$$(4.3) \qquad \dot{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}\,\dot{\boldsymbol{w}} = 0 \quad \therefore\ \boldsymbol{w} \perp \dot{\boldsymbol{w}}\ \ (\text{in } \boldsymbol{H}), \quad \dot{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{w}} \times \boldsymbol{w},$$

また

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}) = \frac{d}{dt}\big(\cos\tfrac{1}{2}\phi + \sin\tfrac{1}{2}\phi\,\boldsymbol{w}\big) = \\ &= \big(-\sin\tfrac{1}{2}\phi + \cos\tfrac{1}{2}\phi\,\boldsymbol{w}\big)\,\tfrac{1}{2}\dot{\phi} + \sin\tfrac{1}{2}\phi\,\dot{\boldsymbol{w}} = \exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\,\tfrac{1}{2}\dot{\phi}\,\boldsymbol{w} + \sin\tfrac{1}{2}\phi\,\dot{\boldsymbol{w}}, \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}Q(t)\boldsymbol{x} = \frac{d}{dt}\exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}\exp(-\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}) \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\Big)\boldsymbol{x}\exp(-\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}) + \exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}\frac{d}{dt}\Big(\exp(-\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\Big) \\ &= \exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\big(\tfrac{1}{2}\dot{\phi}\big)\big(\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{w}\big)\exp(-\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}) + \\ &\quad + \exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\Big(\big(\cos\tfrac{1}{2}\phi - \sin\tfrac{1}{2}\phi\,\boldsymbol{w}\big)\,\sin\tfrac{1}{2}\phi\,\dot{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{x} + \\ &\quad + \boldsymbol{x}\,\big(-\sin\tfrac{1}{2}\phi\,\dot{\boldsymbol{w}}\big)\,\big(\cos\tfrac{1}{2}\phi + \sin\tfrac{1}{2}\phi\,\boldsymbol{w}\big)\Big)\exp(-\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}) \\ &= \exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w})\big(\dot{\phi}\,\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}\big)\exp(-\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}) - \\ &\quad - \exp(\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}) \cdot \sin^2\tfrac{1}{2}\phi\,\big(\boldsymbol{w}\,\dot{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\,\dot{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{w}\big)\exp(-\tfrac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}) \qquad (\text{use } (4.3)) \\ &= Q(t)\Big(\big(\dot{\phi}\,\boldsymbol{w} + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\phi\,\dot{\boldsymbol{w}} \times \boldsymbol{w}\big) \times \boldsymbol{x}\Big). \end{aligned}$$

□

(4.2) 式は，別の書き方をすると，

$$(4.4) \qquad \Big(Q(t)^{-1}\frac{d}{dt}Q(t)\Big)\boldsymbol{x} = \Big(\frac{d}{dt}\phi\,\boldsymbol{w} + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\phi\,\frac{d}{dt}\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{w}\Big) \times \boldsymbol{x}.$$

（以　下　省　略）