数学の連続・離散性と物理の波動・粒子性

佐野　茂（職業能力開発大）

はじめに

ギリシャ時代のトレミーは光に興味を持って光が空気より水に入るときの屈折率を測定するなどの研究をしているが、アリストテレス派と同じように目から出た光が物体に反射すると考えていた。中世になりレンズの入った眼鏡が出来ると、屈折と反射による集光などの研究から光学が生まれている。しかし光を正確に知るには数学の発達を待たなくてはならなかった。そこで解析学の歩みを光や電気現象の解明と関連付けながら振り返ってみる。数学の連続・離散性と物理の波動・粒子性に着目しながら整理していくが、予想外な歴史をたどるので興味深い。

§１．１７世紀の微積分の誕生と光の理解~光は波か粒子？~

ガリレオにより、天体の観測から地動説が唱えられたのは有名である。その後、ニュートンとホイヘンスらにより光は粒子か波かが議論されている。

ニュートンはプリズムにより自然光が７色に分かれるのに興味をもち、それぞれの色をさらにプリズムを通す実験をしている。例えば赤色の光をプリズムに通すと、それ以上色は分かれないで赤色の光だけが出てくるのである。また光は一様な媒質中を直進するので影ができる性質をもつ。こうしたことから『光学、すなわち光の反射、屈折、回折、および色についての考察』において、それぞれの色に対応した大きさの異なる粒子が異なる振動をして色を生み出すとニュートンは考えている。

（１）　色の異なる同じ種類の粒子が発光物質から無数に放出され、力学の法則に従って運動し、目に入って光を感じる。粒子の弾性的衝突が反射であり、屈折は表面の引力で法線方向に加速されるからである。

（２）　光線はその屈折率により色が異なる。色は光線の固有の性質であり、粒子の大きさで色が変わる。最大の大きさをもつ粒子が最大の振動数を生み出し赤となり、最小の大きさをもつ粒子が最小の振動数を生み出し青となる。

（３）　白色はすべての色の光線の混合として目を刺激するから生まれるのであって、それ自体白い光線はない。

この光の粒子説はその後１００年におよんで主流となる。

他方ホイヘンスはフックらの波動説をまとめて波動説の基礎付けをしている。光の速度は有限であり、２本の光線は交差しても互いに妨害しないことや、光の回折現象や複屈折現象からホイヘンスの原理に基づく光の波動論を唱えている。

ホイヘンスの原理：水面に石を投げたとき同心円状に波紋が広がることから推論して、光源から広がるある時点での波面上のすべての点を新たな波源と見なし、この二次的な波源から波面が球状に広がりその包絡面として光波の進行状態が決まる。

（1） 光はエーテルを伝わる波であり、エーテルは弾性的な微粒子から成る。
（2） ２本の光線が交差しても互いに妨害しないことより波の重ね合わせの原理に従う。
この光の波動論は１９世紀になりフレネルにより受け継がれていく。

この時代はよく知られているように、ニュートンとライプニッツにより微積分学の主要な成果がまとまり、科学技術への応用が指し示めされている。

§２．解析学の発展からマクスウェル方程式~光を表す方程式~

１８世紀は科学技術が著しく発展した時代で、微積分を基礎にオイラーやベルヌイらにより微分方程式が発展した。またベクトル値関数を扱うベクトル解析も生まれている。産業革命が起こりより良い機関を求め、こうした数学を用いて水機関や熱機関を研究することにより流体力学、熱力学、剛体の力学の基礎理論が出来ている。

１９世紀に入りヤングやフレネルらにより光の波動説が復活する。ファラデーらの電磁気学をマクスウエルは集大成し波動方程式

（1） ガウスの法則

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

（2）アンペール・マクスウェルの法則

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

（3） ファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

真空中では電束密度 D、電場 E、磁束密度 B、磁場 H には次の関係

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

を得ている。ただし真空での誘電率をε_0、透磁率をμ_0としている。マクスウエルはこの方程式を用いて光は電磁波の一種と予想し、ヘルツにより実験で確かめられた。真空での光速度は$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$である。

光とは直交する電場と磁場の位相がそろった波で、電場の変化が磁場の変化を生みそして磁場の変化が電場の変化を生んで直進する電磁波であることが明らかになったのである。例えば天空に描かれる７色の虹は波長の違いにより屈折率が異なるから生まれるのである。波長が長いのが外側の赤で波長の短いのが内側の紫である。虹の外にある赤外線や紫外線は目には見えない。波長の違いは連続的な変化として感じられてもよいはずだが、色として感じられるのは人間には受光細胞があるからである。赤、青、緑の受光細胞があり色の３原色として感じられるのである。ニュートンの光の粒子説は退かされてしまったが、こ

れでドラマが終わったわけではなかった。

§３．１９世紀の電気の実用化と解析学の反省~実数の連続性~

ニュートンやライプニッツによる微積分は極限や収束などの概念が明確でなかったが、コーシーは関数の極限を詳しく研究して教科書（[C1],[C2]）を 1820 年代に著わしている。この本は教科書の手本として広まっていったが、独立変数と従属変数が明確に区別されていなかったり一様連続性の概念が与えられていなかったりと不十分さは残った。また連続関数の中間値の定理の厳密な証明は出来なかった。

１９世紀後半に入り、ドイツのワイエルシュトラスはコーシーの極限の概念を精密にして一様収束性に関する重要な定理を導いている。

定理１．連続な関数列$\{f_k\}$が$[a,b]$上でfに一様収束するならば、fは$[a,b]$で連続である。

定理２．有界でリーマン積分可能な関数列$\{f_k\}$が$[a,b]$上でfに一様に収束するならば、fは$[a,b]$上でリーマン積分可能で

$$\lim_{k\to\infty}\left[\int_a^b f_k(x)dx\right] = \int_a^b\left[\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx$$

が成立。

定理３．（ワイエルシュトラスの近似定理）fが有界閉区間$[a,b]$上で定義された連続関数ならば、$[a,b]$上でfに一様に収束する多項式関数列$\{P_k\}$が存在する。

また、連続関数は微分可能だと１９世紀の前半まで信じられていたが、ワイエルシュトラスは連続であるがいたるところ微分可能でない関数を提示している。

定理４．奇数$a \geq 3$と、０と１の間にある数bが、$ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$をみたしているとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(\pi a^k x)$$

により定義される関数fはすべての点で連続であるが、すべての点で微分可能ではない。

この病理的な関数は従来の定説を覆し、微分可能性と連続性との間には非常に大きな隔たりがあることが明らかになったのである。こうしたワイエルシュトラスの関数の連続性

の精密化の試みは周辺にいた次世代のデデキントやカントールらに大きな刺激を与えている。

デデキントは切断の概念を導入して有理数から実数を特徴づけ、実数の連続性を明らかにしている（[D1]))。有理数全体の集合を$\mathbb{Q}$とすると、$\mathbb{Q}$は連続な集合ではないので連続な集合とするために数直線を考え、この数直線を２つに切断する操作から実数を特徴づけようとしている。一般に数の集合Pと部分集合A,Bが２条件 (i)$P = A \cup B$ (ii) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$に対し$a < b$ を満足するとき、Pの切断(A,B)と定義する。集合$P = \mathbb{Q}$のときには

（１） 集合Aに最大数が存在しない、集合Bに最小数が存在しない。

（２） 集合Aに最大数が存在しない、集合Bに最小数が存在する。

（３） 集合Aに最大数が存在する、集合Bに最小数が存在しない。

のいずれかが成り立つ。（２）と（３）は本質的に同じである。例えば（２）の場合、集合Bの最小数をAに移すと（３）の場合に帰着するからである。また切断$\sqrt{2} = (A,B)$を

$A = \left\{a \in \mathbb{Q} : a < \sqrt{2}\right\}$, $B = \left\{b \in \mathbb{Q} : b > \sqrt{2}\right\}$ で与えると（１）の場合となる。一般に（１）の場合の切断$\alpha = (A,B)$において、αを$\mathbb{Q}$に加えることにより、（２），（３）の場合に帰着する。そこで有理数$\mathbb{Q}$の切断から決まる数を実数とし、実数全体の集合を$\mathbb{R}$とおく。集合$P = \mathbb{R}$における切断では（２），（３）の場合のみが起こり、（１）の場合が起こらない。この性質を実数の連続性という。実数の連続性が明確に定式化され、連続関数の中間値の定理が証明される。ここでは簡略にまとめたが、デデキントの原著では切断全体の集合を考えているので実数をイメージしづらい（[D2]）。

さらにデデキントは公理論的な集合論を論じ、帰納的に自然数を構成し加法や乗法などの演算を満足することを示している。

他方、カントールは無限集合を分類する構想を持ち込んでいる。自然数の集合と有理数の集合そして代数的数の集合の間に１対１の対応があり可算集合と呼んでいる。さらに、実数の集合は可算集合ではないことを対角線論法により証明している。無限集合に濃度という概念を導入して、可算無限と連続無限とを明確に分類した。

この頃は電気が実用化された時代であった。1870年のウイーン万国博覧会で発電機に間違って電気を流したところ、回転を始めたことからモーターの開発へと繋がっている。また1876年からのベルの電話器の発明、エジソンによる白熱電球や蛍光灯の発明など電気を利用した発明が次々となされていった。数学はこうした科学技術の発展を背景にしながらも独自の歩みをしているのが理解できる。

§４． ２０世紀の量子論の誕生~電磁気現象の反省~

１９世紀の後半には電気の実用化があいつでなされたが、電気を生む物質の本質に迫ろうとする試みが２０世紀に入り盛んになる。この頃には電子（マイナスの電荷をもった粒子）の運動が電気の正体であると理解されるようになっている。

アインシュタインは 1905 年に特殊相対性理論とともに光量子論を唱えている。それは、真空封入金属に光を当てると表面から電子が飛び出してくるが、その電子の速さは光の強弱によらず振動数に関係するという光電効果を説明するため、振動数νの光は$h\nu$のエネルギーのかたまりで運動量

$$p = h / \lambda$$

をもつ粒子として振る舞って空間を伝わるという仮説である。これは、プランクが 1900 年に提唱した、「一定温度にある物体が輻射（吸収）するエネルギーは輻射線の振動数νに比例して$h\nu$ (hはプランク定数) なる微小単位素量をもちその整数倍だけが存在する。」という量子仮説を支持し発展させるものである。「光は横波である」という定説への挑戦ともいえ、その後の物理学に大きく影響を与えている。

ボーアが 1913 年に提唱した原子模型は、原子内の電子は自然数 n に対応した

$$\oint p\,dq = nh\ (p = mv, dq = rd\theta)$$

を満たす軌道のみで運動するという説である。軌道上を古典力学に従って運動するときには光を出さないのでエネルギーの損失はない。電子が 2 つの軌道を遷移するときに光を放出し、その振動数νはそれぞれの軌道の総エネルギーを$E_k, E_l\ (E_k > E_l)$とすると

$$\nu = (E_k - E_l) / h$$

である。水素電子の軌道 k の総エネルギーは

$$E_k = -\frac{R_0}{k^2} \quad (k = 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

と与えられるので、水素の電子から放出される光の波長λは

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{k^2}\right) \quad (R = \frac{R_0}{ch}\ \text{リュードベリ定数})$$

となる。例えばバルマー系列では$l = 2, k = 3, 4, 5, 6, \ldots$で軌道$k$から軌道$l = 2$へ移るときに放出される光の波長を表し、実験とよく一致する。電子はプラスの電荷をもつ原子核の周りをクーロン力と遠心力のつりあった飛び飛びの軌道を回ると理解されるようになった。

ところが、1923 年にド・ブロイは電子の波動説を提唱している。運動する電子にはそれに結合した速度に反比例する波長を持つ物質波が存在する。すなわち粒子の運動エネルギーE、運動量pに対して

$$E = h\nu, p = h / \lambda$$

が成立するというものである。電子に波動性があるという大胆な説だが、後に結晶板への電子波による回折実験によって実証されている。

そして 1926 年にシュレディンガーは原子内の電子の運動についてド・ブロイの関係式を導入して電子の運動に関する波動方程式を導き、原子模型に新たな解釈を加えている。電子は軌道上を加速度運動するのではなく、電子のともなう物質波の定常波となる。その状態では光を放出することはない。この波動方程式を基礎にして分子の電子軌道が統一的に記述される量子力学が生まれている。

ここでは最も簡単な場合を紹介しよう。１次元の定常波の振幅は方程式

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Psi(x)=0$$

に従う。質量 m の粒子が位置エネルギー $U(x)$ と運動量 p をもって運動するときのエネルギー E は

$$E=\frac{p^2}{2m}+U$$

となる。ここでド・ブロイの関係式　$p\lambda=h$　を用いるとシュレディンガーの方程式

$$\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\Psi}{dx^2}+U\right]\Psi=E\Psi$$

が導かれる。ここで、$|\Psi|^2$ は電子の存在確率を表している。

§５．まとめ

歴史を振り返ると数学の連続性と離散性の理論は数学内部で発展している。このことからも 19 世紀の後半頃から応用を重視する科学技術とは袂を分かち純粋数学は独自の歩みを強めていったと言えるのではないだろうか。

他方自然現象において、光は波と粒子の両方の性質をもつことが明らかとなる。また、電子は初め荷電粒子として発見されたが､X 線と同じような回析を起こすことから波の性質ももつことが実証された。しかし、光のような横波ではなく物質波である。電子も粒子と波の両方の性質をもつことが明らかになったのである。水素原子に対し 3 次元のシュレディンガーの方程式を極座標で表し解くと原点での存在確率はゼロとなり、電子が原子核に落ちていかないことが見事に捉えられている。素粒子の運動は決定論的に定まるのではなく確率的に捉えられたのである。

文献

[C1]A.L.Cauchy: Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, 1821.

[C2]A.L.Cauchy: Résumé des Leçons donnees a l'École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitesimal, 1823.

[D1]J.W.R.Dedekind: Stetigkeit und irrationaie Zahlen, 1872.

[D2]J.W.R.Dedekind: Was sind und sollen die Zahlen?, 1887.

（数について、河野伊三郎[D1,2]訳　岩波文庫 1961）