關孝和以後の交式と斜乗さまざま

小松彦三郎 (東京大学・数理科学研究科・名誉教授)

關孝和の『解伏題之法』[0] は世界で始めて一般の連立代数方程式の解法を与えた著作として有名である。他方、共通の未知数を消去する際、これも世界最初に導入した行列式の展開法に間違いがあったことも事実である。恐らくはこの為に、数学史家三上義夫は、D. E. Smith との共著 [13] (1914) で、37 ページに亘って關孝和の業績を論じた後の結論として、“ $\cdots$; that he was a great mathematician, the discoverer of any epoch-making theory, a genius of the highest order, there is not the slightest evidence. He may be compared with Christian Wolf rather than Leibnitz, and with Barrow rather than Newton. $\cdots$ 彼が大数学者、なにか画期的な理論の発見者、第一級の天才であったということについては、ほんのわずかな証拠さえもない。較べようとするなら、ライプニッツではなく、せいぜいクリスチャン・ヴォルフ、ニュートンではなくバーローとできる程度だ。” と評することになったのであろう。この評言が正しいかどうかを知る為に、われわれは關以後の江戸時代の数学者たちが關の展開法であった「交式」と「斜乗」をどのように訂正してきたか [1—6]、また、明治以降の数学史家がそれらをどのように理解してきたか [7—13] を紹介する。この際、正しい結果に対しても、また、間違った結果に対しても何故そうなのか、明確な定義と証明を与える。これまでの混迷は、言葉だけをあげつらい、それらが何を意味するか明確にしてこなかったためである。

例えば、同じ「交式」という術語で人々はそれぞれ全く違うものを考えてきた。次のページの表は 5 次の行列式に対する「交式」の順列としての違いを示す。右の表の上段は、方程式の同次項を意味する「級」の置換としての作用を示しているが、關以外のほとんどの人は方程式の置換と理解していた。また、「交式」の構成法も關 [0]、佐藤 [9] 及び後藤-小松 [10] では 1 を最初に置いた偶順列全体であり、松永 [1]、菅野 [3, 4]、石黒 [5, 6] にとっては、松永 [1] によって新たに定義された数列である。戸板 [2] はすべての順列を辞書式順序に書き並べ、關の方法で斜乗を作ったとき符号を除いて同じ結果となるものの中から一つを選び出した。交式の番号づけも人によってさまざまである。

關の斜乗は左斜乗から右斜乗を引いたものである。これを全ての交式について足し併せたものは、行列式の次数が 2 か、4 を法として 3 または 4 と合同のときのみ行列式となり、その他の場合は 0 となる。これが關の間違いである。後藤-小松 [10] では左斜乗から変斜乗を引く。これを足し併せたものは常に行列式に等しい。その他の人々の方法では、關の方法が失敗する場合だけ右斜乗も加え、更に交式毎にその符号を掛けて総和をとる。[2—4]

には多少問題が残るがそれを正しさえすれば、これらは、見かけ上の違いに関わらず、それぞれ常に正しいのである。

さまざまな交式と斜乗

松永	奇偶	交式	菅野	石黒	関	戸板
M_1	+	1 2 3 4 5	$K_{1,1}$	I_1	S_1	T_1
M_2	−	1 3 4 5 2	$K_{1,2}$	I_7		T_{11}
M_3	+	1 4 5 2 3	$K_{1,3}$	I_2	S_3	
M_4	−	1 5 2 3 4	$K_{1,4}$	I_8		
M_5	+	1 2 4 5 3	$K_{2,1}$	I_3	S_5	T_5
M_6	−	1 4 5 3 2	$K_{2,2}$	I_9		T_3
M_7	+	1 5 3 2 4	$K_{2,3}$	I_4	S_7	
M_8	−	1 3 2 4 5	$K_{2,4}$	I_{10}		
M_9	+	1 2 5 3 4	$K_{3,1}$	I_5	S_9	T_9
M_{10}	−	1 5 3 4 2	$K_{3,2}$	I_{11}		T_7
M_{11}	+	1 3 4 2 5	$K_{3,3}$	I_6	S_{11}	
M_{12}	−	1 4 2 5 3	$K_{3,4}$	I_{12}		
$M_{\overline{1}}$	+	1 5 4 3 2			S_4	
$M_{\overline{2}}$	−	1 2 5 4 3				
$M_{\overline{3}}$	+	1 3 2 5 4			S_2	T_2
$M_{\overline{4}}$	−	1 4 3 2 5				T_{12}
$M_{\overline{5}}$	+	1 3 5 4 2			S_8	
$M_{\overline{6}}$	−	1 2 3 5 4				
$M_{\overline{7}}$	+	1 4 2 3 5			S_6	T_6
$M_{\overline{8}}$	−	1 5 4 2 3				T_4
$M_{\overline{9}}$	+	1 4 3 5 2			S_{12}	
$M_{\overline{10}}$	−	1 2 4 3 5				
$M_{\overline{11}}$	+	1 5 2 4 3			S_{10}	T_{10}
$M_{\overline{12}}$	−	1 3 5 2 4				T_8

交級

$M_1 = +12345$　　$M_6 = -\ 14532$

星觜奎女心 $_1$　　星觜奎女心 $_1$
柳畢壁牛房 $_2$　　井胃危箕亢 $_4$
鬼昴室斗氐 $_3$　　參婁虚尾角 $_5$
井胃危箕亢 $_4$　　鬼昴室斗氐 $_3$
參婁虚尾角 $_5$　　柳畢壁牛房 $_2$

左斜乘

+ 心牛室胃參　　+ 心箕虚昴柳
+ 女壁昴井角　　+ 女危婁鬼房
+ 奎畢鬼亢尾　　+ 奎胃參氐牛
+ 觜柳氐箕虚　　+ 觜井角斗壁
+ 星房斗危婁　　+ 星亢尾室畢

右斜乘

+ 心柳昴危尾　　+ 心井婁室牛
+ 女房鬼胃虚　　+ 女亢參昴壁
+ 奎牛氐井婁　　+ 奎箕角鬼畢
+ 觜壁斗亢參　　+ 觜危尾氐柳
+ 星畢室箕角　　+ 星胃虚斗房

変斜乘

− 心牛室井婁　　− 心箕虚鬼畢
− 女壁昴亢參　　− 女危婁氐柳
− 奎畢鬼箕角　　− 奎胃參斗房
− 觜柳氐危尾　　− 觜井角室牛
− 星房斗胃虚　　− 星亢尾昴壁

1　行列式の展開が得られる証明のあらすじ

まず、与えられた交式に対する「右斜乗」は, この交式を行ベクトルとして右から置換行列

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & 0 & \iddots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

を掛けて得られる交式に対する左斜乗であり、「変斜乗」は、右から置換行列

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

を掛けて得られた交式に対する左斜乗であることに注意する。

Q は常に奇置換であるから、これを偶順列に施したものはすべての奇順列を尽す。従って、關の交式である偶順列全体に対する左斜乗と変斜乗の差の総和は行列式の現在の定義 (6) と一致する。

他方、R は $n \equiv 3 \text{ or } 4 \mod 4$ の時のみ奇置換となる。この場合には全ての偶順列に対する左斜乗と右斜乗の差の総和は、同じ理由で行列式の展開となる。

しかし、$n>2$ が $\equiv 1 \text{ or } 2 \mod 4$ となる場合は、 R は任意の偶順列を別の偶順列に移し、これにもう一度 R を施せば元の偶順列に戻る。この結果、移った先の偶順列に対する關の斜乗 (= 左斜乗 − 右斜乗) は元の偶順列に対する關の斜乗の符号を変えたものになる。これが全ての偶順列に対して關の斜乗を足し併せたものが 0 となる理由である。

他方、松永良弼 [1] は、「諺解」という表題が意味する關 [0] の解説書では全くなく、新しく彼独自の「交式」の定義を与えた書物である。

1 次の行列式に対しては (1) のみを交式とする。$(n-1)$ 次の行列式に対する交式である $\{1,2,\cdots n-1\}$ の順列 $(1,k_2,\cdots,k_{n-1})$ が与えられたとき、これを添一 [0] したものである $(1,2,k_2+1,\cdots,k_{n-1}+1)$ を「基式」とする n 次の交式を、基式及びこれに

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

の冪を右から掛けて得られる第 2 項以下の巡回置換の結果全体と定義する。例えば、$n = 1,2,3$ に対しては、 $(1),(1,2)$ 及び $(1,2,3)$ がただ一つの交式である。$n = 4$ に対しては $(1,2,3,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3)$ の三つがある。ここまでは、松永の交式も全て偶順列であり、闕のものと一致する。$n = 5$ に対しては、 2 ページの左の表でいろいろな定義に基づく交式の比較をしてある。上の定義でいう松永の交式はこの表左端の列の M_{12} までの上半分 12 箇である。下半分にある $M_{\overline{k}}$ は M_k に R を施して得られる順列である。加藤 [8] には、$n > 5$ の場合を込めて、このようにして 1 を固定する全ての順列が重複なく得られることが証明されている。菅野 [3-4] と石黒 [5-6] の交式も集合としては松永のものと同じであるが、それぞれの交式の順番と番号付けは異なる。

戸板 [2] の内題には「解伏題之解 附正ス㆓傳書之謬ヲ㆒也」と書かれており、この書が闕 [0] の誤りを訂正する意図で書かれたことは明らかである。主に 5 次の場合を扱っている。松永 [1] はこの場合に闕と異なった「交式」を導入したが、闕の方法が間違っているとまでは言っていないので、この書が多分闕の誤りを公言した最初のものである。しかし、この場合の闕の最も重要な誤りであった「斜乗」の間違いには気付いておらず、闕に替って正しい理論を作ることに成功したとは言えない。

そもそも「解伏題之法」[0] は文字通り伏題を解く法を述べた書物であって「行列式」はこの中で二つの代数方程式から共通の未知数を消去した結果を簡潔に表示する為の手段に過ぎない。闕は「行列式」の主要な性質を論ずることはおろか、これに固有の名前を付けることもしていない。

二つの方程式 ($n \geq m > 0$, 係数 a_i, b_j は x 以外の変数を含んでいて差支えない)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 0, \tag{1}$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n = 0, \tag{2}$$

から共通の未知数 x を消去するのに、闕 [0] はまず n 箇の「換式」と呼ばれるこれらの方程式の 1 次結合からなる連立方程式

$$\begin{cases} h_1(x) = c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1,n-1}x^{n-1} = 0, \\ h_2(x) = c_{20} + c_{21}x + \cdots + c_{2,n-1}x^{n-1} = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ h_n(x) = c_{n0} + c_{n1}x + \cdots + c_{n,n-1}x^{n-1} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

を導き、次いでこの係数からなる行列の行列式

$$\begin{vmatrix} c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{20} & c_{21} & \cdots & c_{2,n-1} \\ & & \vdots & \\ c_{n0} & c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1,n-1}x^{n-1} & c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{20} + c_{21}x + \cdots + c_{2,n-1}x^{n-1} & c_{21} & \cdots & c_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ c_{n0} + c_{n1}x + \cdots + c_{n,n-1}x^{n-1} & c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

が消去の結果であるとした。これは 80 年後に E. Bézout が発表した理論と同一と言ってよい [10]。

關は換式の作り方を文章で書くと共に例でもって計算してみせた。実は言葉で表したものには誤りがあるのであるが、計算例はすべて正しい。この文章の誤りは『大成算經』にも引き継がれたが、すべての人は実例の正しい計算法に従っている。

古代中国や江戸時代日本では、方程式は最上段に定数項 a_0、次に線形項の係数 a_1, その下に 2 次の項の係数 a_2 等を縦に並べて表したから、(1) ~ (4) のような方程式は、これらを右に 90° 回転させ、未知数及びその冪を消したものになる。また、$=0$ も書かなかったので、(3) は 2 ページ右の上段のように書かれた。これを升目に囲うことも行われたから、これは連立方程式 (3) というよりは行列もしくは行列式を意味するであろう事は明治以後早くに気付かれた。しかし、人々が關の真意を理解するまでには長い時間を必要とした。

2　従来の研究の問題点

最初に「解伏題之法」を世界に紹介した論文は林鶴一 [11] である。[0] を含む三冊の手持ちの「解伏題之法」を基に、石黒信由著『解伏題數解』菅野 [3, 4] なども参照して、「解伏題之法」の内容を紹介している。但し、最初に “these ⋯ are very difficult to understand, like riddle-books, or secret marks.” という断わり書きがあるのでも分かるように、今われわれが問題としている所まで深くは扱っていない。それでも、これはその後イタリア語とドイツ語に翻訳されそれぞれの国で発表された。それだけの価値はあったのである。

これに対して、わずかに遅れて研究を開始した三上義夫 (1875–1950) は、その後驚くべき多数の文献を発掘、読破し、これらの包括的な研究で關孝和の業績に関する定説を打立てた人と評価されている。初期の成果は雑誌 Isis への招待論文 [12] となり、円熟期の [7] は 1949 年東北大学から理学博士の学位を得たときの主論文となった。この時、田中由真に関する論稿 5 篇、行列式論についての論稿 8 篇等も参考論文として提出した。これらは、残念ながら今なお出版されていないが、写しが東北大学及び国会図書館に所蔵されていて閲覧可能である。

三上は生前既成の学界、特に数学者たちと軋轢があり、研究成果の出版が難しかったことで知られているが、この参考論文などを読むと三上の方にも問題があったことがわかる。数学は、「定義」や公理によって言葉の意味を限定し、それらの術語を用いて表された「命題」を述べ、これを定義を根拠として「証明」することで成り立っている。江戸の数学はそれほど厳格ではないと言われればそれまでであるが、三上の論文にはそれ以上に曖昧なところがある。例えば、彼が「行列式」で何を意味したか私にはわからない。博士論文の「六、行列式」は次のように書き出されている:

「演段術の一種に西洋の行列式に相当する算法がある。關孝和編「解伏題之法」(元和三年、一六八三) に之を見る。又大坂の島田尚政門弟井關知辰編「算法発揮」(元禄三年、一

六九〇) にも矢張り行列式の算法を記るす。此両者は同じく行列式の算法でありながら、算法の方面を異にする。「解伏題之法」には行列式を構成した上で、逐式交乗之法に依って展開の諸項を得べき事を言ひて、其諸項を列挙し、然る後に交式及び斜乗と云ふ二種の方法を用ひて展開を行ふべき手段を試みたのである。」

ここで『行列式を構成し』というのは連立方程式 (3) を和風に書いたという意味で、形の上だけである (Isis 論文 [12] も参照)。続いて斜乗と交式についての簡単な説明の後、

「然るに惜しむべし、其の交式にも又斜乗にも共に誤りがある。交式の方は松永 [1] に於て訂正されているが、斜乗の誤りに至っては、其後と雖も戸板 [2]、有馬頼徸等が誤った侭に之を解説して居たのであり、遥かに降って寛政十年 (一七九八) に至り、菅野 [3] と石黒]5] とが、此の同じ年に而も僅かに一ヶ月違ひで其誤りを指摘し、且つ正しい斜乗圖の作成を記して居る。」

と続け、更に

「關孝和の「解伏題之法」には交式斜乗の方法は誤りながらに解説して居るが、前に言へる逐式交乗之法なるものは之を説いて居らぬ。$\cdots$」

と書いている。これでは、關はまったくでたらめを書いたように聞こえるが、本当であろうか。これは關 [0] 第十三～十七丁にある「生剋第五」をどのように読むかに係っている。後藤–小松 [10] は「逐式交乗法」を行列式の帰納的な定義

$$\begin{vmatrix} d_1 & c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \\ d_2 & c_{21} & \cdots & c_{2,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ d_n & c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} c_{21} & \cdots & c_{2,n-1} \\ c_{31} & \cdots & c_{3,n-1} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{31} & \cdots & c_{3,n-1} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots\cdot+(-1)^{n-1} d_n \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{21} & \cdots & c_{2,n-1} \\ & \cdots & \\ c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad n > 1. \tag{5}$$

と解釈した。關はここで $n = 2, 3, 4$ の場合に (5) の d_i に (3) の換式 h_i を代入したもの、即ち (4) の右辺が、左辺に等しい、即ち (4) が連立方程式 (1), (2) から共通の未知数 x を消去して得られた結果であることを証明している。しかも、n が大きくなると (4) の左辺の計算も面倒になるので、(5) の替りに交式斜乗法を使うと言ってその準備になるように計算の順序を変えた。即ち、一つの逐式交乗法に三役をさせたのである。これが読者の理解を難しくした事は否めない。

三上の名誉の為に付け加えるならば、彼は同じ論文の第十三章の末尾に次の訂正を加えている：

「訂正。「解伏題之法」の逐式交乗に就いて、如何なる算法であるか記していないと述べたのは少し不正確であった。如何にも其算法の性質は記してない。けれども行列式の展開結果を記したものは各行の首項の小行列式とも称すべきもの〻展開結果を此行の各項へ乗じ、諸行に就いて凡て右云ふ如きものを作り、中に就いて、符号を考慮して相殺するものは棄て去り、残存の諸項を取るべきことを示して居るのである、従って逐式交乗と云ふのは、右云ふ算法を指すものであること、極めて明瞭である。」(後略)

これによって三上は逐式交乗の第二の役割、即ち換式の係数を成分とする行列式 $=0$ が本来の連立方程式 (1), (2) から未知数 x を消去した結果であることを理解していたことが分かる。しかし、数学における定義の意義を理解していたかどうかは分からない。今後「交式」と「斜乗」を論ずるにも同じ疑惑が付きまとう。

ところで、定義 (5) からすぐに分かることは、行列式を単項式の和

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \sum \pm\, c_{1j_1}\, c_{2j_2} \cdots\, c_{n,j_n} \tag{6}$$

と展開したときに現れる $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の順列全体に亘り、$\pm$ は $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ が偶順列、即ちこれが $(1, 2, \cdots, n)$ から偶数回の互換によって得られるものであるときは $+$、奇順列、即ち奇数回の互換によって得られるものであるときは $-$ を取る。關は、$+$ の項を「生」、$-$ の項を「剋」と呼んだ。但し、これが順列 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ の偶奇によって定まることを明記した江戸時代の文献は見付かっていない。ただ、關 [0] の「交式」は 1 を保つ偶順列全体からなり、彼はそれらが $(1, 2, \cdots, n)$ から二つの互換によって次々に構成できる表を作っているから、あるいは知っていたのかもしれない。

松永は關の交式の構成法が理解できないために別の構成方法を考え出したのであろうが、肝心の斜乗は変えなかったから、松永 [1] に書かれた方法で正しい行列式を計算できるのは、$n = 1, 2, 3$ または 4 の場合に限られる。關の方法でも無限の n に対して正しい答えがでるのとは大違いである。それにも拘わらず松永の構成法を、訂正と評価した關流の事実上の始祖山路主住、有馬頼徸、三上義夫たちの大家は、逆に 5 次以上の行列式を計算したことがなかったことを露呈している。

三上は、また多くの場合、「左斜乗」と「右斜乗」を關とは反対の意味に取り違えている。これで行列式の展開の各項の生、剋を論ずるのはいくら何でも乱暴である。特に博士参考論文では、自身の定義で計算して作った図と文献のものが違ってしまったことに気付きながら、なお誤魔化しの文を書いて取り繕っているのは、例えこれが草稿の段階であったにしても、見苦しい。

三上は次の章「七、關孝和の逐式交乘之法」を、

「關孝和の「解伏題之法」に於ける逐式交乘之法と云ふのは其方法が記載していない。けれども島田尚政門流の「算法発揮」に見る如き展開方法であろうと思はれる、」

と書き出し、

「「解伏題之法」に於いては」n 個の式 (3) から「x の冪乗を凡て消去して、諸係数間に成立つ所の関係を求めようと云ふのである。此の消去は恰も支那伝来の算法たる方程の解法の如くして之を行ふ事が出来る。」

と続く。即ち、(3) の冪乗 x^j を未知数 x_j に置き換えた連立一次方程式を、紀元前後に成立した中国の古典「九章算術」の第八章「方程」にある解法で x_j を消去した結果が (4) の左の行列式 $=0$ となると述べている。実際、これらの主張は、ここに現れる術語を現代の定義に従って解釈すれば全て正しい。しかし「算法発揮」での行列式の定義は關の行列式の定義で行と列の役割を取り換えたものになっており、二つの定義に基づく行列式の値が等しいことは直ちには分からない。

また、三上がここで紹介する方程の解法では 2 行 2 列の小行列式を係数とする $n-1$ 個の未知数に関する連立一次方程式に帰着させただけで、この小行列式を成分とする行列式と元の方程式の行列式との関係について三上は何も云っていない。実際には Sylvester の定理[1]により二つの行列式 $=0$ は一般的な条件の下で同等になる。しかし、これを關あるいは「算法発揮」にある行列式の定義から証明することは簡単でない。それにも拘わらず、「…… 此算法を称して逐式交乘と云ふのは、次々の諸式に就て互いに掛け合せて何とかすると云ふ意味で、其名称は適切な様に見える。」と述べた後、直ちに改行して

「故に關孝和の行列式の算法が其根本に於て支那の古算法たる方程から出たものである事に疑ひはない。」

と断言するのはいくら何でも乱暴である。

3　戸板保佑の生剋因法伝

三上は「關孝和の交式斜乘の方法は、行列式の展開方法としては誠に巧妙なりと謂うべきである。」といいながらも、直後に「然るに惜しむべし、其の交式にも又斜乘にも共に誤りがある。」と書いている。この内、交式の誤りというのは戸板保佑の『生剋因法伝』[2] の交式の理論と矛盾するからである。しかし、博士論文 [7] にはこれについての記述はなく、これより 20 年前に発表された Isis 論文 [12] にある解説も簡単過ぎて戸板の真意が伝わり難いと思うので、ここでは原典に従って若干の紹介をする。

戸板は最初 $n=3$ の場合に關 [0] の復習をする。行列式の定義はほぼ同様で実級 = 定数項に関する余因子分解．

[1]高木貞治著「改訂代数学講義」を見よ。この本にはこの他にも和算の理解に必要だが普通の教科書には扱われていない結果が数多く紹介されている。

$$
\begin{vmatrix} d_1 & c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \\ d_2 & c_{21} & \cdots & c_{2,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ d_n & c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} c_{21} & \cdots & c_{2,n-1} \\ c_{31} & \cdots & c_{3,n-1} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} d_2 \begin{vmatrix} c_{31} & \cdots & c_{3,n-1} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} \\ c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots + (-1)^{(n-1)(n-1)} d_n \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{21} & \cdots & c_{2,n-1} \\ & \cdots & \\ c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad n > 1. \tag{7}
$$

を用いる。但し、ここで見るように余因子の定義は關 (5) と微妙に違う。初項 d_1 に対するものは同じであるが、第2項以降はその前の第一行であった第一式を末尾に移し、行列式の符号が変らないように符号の補正をした上で新しい初項に対する余因子を取る。本の中では「札を三枚拵えて始めの札を終に置き又次の札を末に廻し、廻し々々」と書いてある。勿論、これは關の定義と一致する。書名にある「因法」は本文では「カケヤウ」と振仮名が付けられていて、余因子を計算するという意味で使われている。

「解伏題之法」には「順」と「逆」という説明不足の術語あって、昔からその意味が争われてきたが、これらは定義式 (7) の符号法則をいうのかもしれない。n が奇数または掛ける実級の係数が奇数番目の時は、実級の係数に小行列式を掛ける時生剋を変える必要はない。これを順という。n も、実級の係数の順番も偶数の時は、生を剋、剋を生にしなければならない。これを逆という。

次には、(4) の左の等式が、「行列式」の定義とは独立に述べられ、証明されている。因法の後、符号だけが違う同類項が二つづつ出てくるという關の証明と同じものである。關が色違いの数字で示していたことを、図形を使ってより抽象的に表している。これは、未知数 x とその冪 x^j も同時に消去されることを明確にするためであったかもしれない。

次に戸板は n 文字 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の順列を「變數」と名付け、その全体を調べている。これらをもれなく数え上げるために、まず1に始まる順列全体を辞書式順序に並べ、これらの一つづつを今度は上の行列式の計算のように巡回させた結果を $n = 5$ まで表にしている。そして、關と同じ方法で、二つの立方方程式から三つの換式を導き、4次行列式を計算した後に、これが解伏題の御伝書に謂う「逐式交乗之法」であるが、繁多故「交式斜乗之法」を用いるといってようやく本題に入る。

まず、「斜乗」としては、$n = 2, 3, 4, 5$ まで關 [0] と同じものを採用した。

戸板としては、定義は研究者の自由に任せられていると信じて行った決断だったかもしれないが、実のある結果を生むためにはよい定義を選ばなければならない。この本を最後まで読むとこの研究は失敗であったことを戸板も自覚していたことがわかる。そこで立ち

止まって失敗の原因を追及することをしなかったために、彼は第一級の数学者になる機会を失ってしまった。それは、5次の行列式展開の為の斜乗の定義が軽率であったことであるが、この点を除けばこの研究は斜乗について、和算家たちの中で最も深い考察をしている。

戸板は「斜乗図」を、本来の行列の主対角線と反対角線からなる十字図形と、これを左右に平行移動して互いに重複しないように最大限に重ねた図形と見做した。そして、この上の主対角線とその平行移動にはそれらに沿った左斜乗とその平行移動に対する關の生剋に応じた色をつける。また、ここでの反対角線は、これまでわれわれが右斜乗を計算するため使ってきた右上端から右下に向かうものより一つだけ右に移動しているが、この平行移動と共に、關の生剋に応じた色をつける。こうして出来た図形は、われわれが右上段の隅から出発させてきた左斜乗、右斜乗とそれらを左に一つづつ動かして得られる斜乗全体の合併と同じになることは容易に読み取れよう。戸板は $n=3,4,$ に対してはこれらを図示するまでしたが、$n=5$ に対してはしなかった。

以上のように「斜乗図」が定められた後、与えられた行列乃至は連立方程式 (3) の行列式を計算するには、この行列を斜乗図と重ねて斜乗図を構成する色つき斜線上の要素の積を取り色に応じて必要ならば符号を変えて総和を取る。そしてこれと同じことを予め定められた「交式表」によって変換した行列に対しても行い、全ての和として行列式を得る。この置換を關 [0][2] と後藤–小松 [10] 以外は行列の行、即ち方程式を置換することと解釈しているが、われわれは行列の列、即ち方程式達の同次項からなる級の置換と解釈している。誤解を避ける為には「交式」に換えて「交級」という術語を使う。

これを關 [0] にある4次の行列式の計算と比較しながら見てみよう。「斜乗図」は [0] 第十七丁にあるように縦横四つずつ16個の小円でできており、主対角線にも反対角線にも生を意味する朱線が引かれている。これに隣接する平行線は剋を意味する黒線、その隣りは朱線となっている。そしてそれぞれの斜線上には4項の積が載り、うち四つは生項、四つは剋項である。

「交式表」は次の三っつの順列からなる：

$$\mathrm{M}_1 : + \quad 1\,2\,3\,4 \qquad \mathrm{M}_2 : + \quad 1\,3\,4\,2 \qquad \mathrm{M}_3 : + \quad 1\,4\,2\,3.$$

下の左端の行列が与えられたとき、上の「交式表」に従って「交級」した行列とそれらの左右の斜乗は次の通り：

婁危斗房 $_1$	婁危斗房 $_1$	婁危斗房 $_1$
奎虚箕氐 $_2$	壁女尾亢 $_3$	室牛心角 $_4$
壁女尾亢 $_3$	室牛心角 $_4$	奎虚箕氐 $_2$
室牛心角 $_4$	奎虚箕氐 $_2$	壁女尾亢 $_3$

[2] この解釈は [0] にあらわに書かれているわけではないが、現行の關 [0] 第十四～十五丁にある表の順序が他人の手で乱されてしまったとすれば理解できる [10]。

左斜乗

+	房箕女室	+	房尾牛奎	+	房心虚壁
−	斗虚壁角	−	斗女室氐	−	斗牛奎亢
+	危奎亢心	+	危壁角箕	+	危室氐尾
−	婁氐尾牛	−	婁亢心虚	−	婁角箕女

右斜乗

−	房奎女心	−	房壁牛箕	−	房室虚尾
+	斗氐壁牛	+	斗亢室虚	+	斗角奎女
−	危箕亢室	−	危尾角奎	−	危心氐壁
+	婁虚尾角	+	婁女心氐	+	婁牛箕亢

以上24項の和が行列式である。右斜乗の代りに下の変斜乗を使っても同じ結果が得られる：

変斜乗

−	房箕壁牛	−	房尾室虚	−	房心奎女
+	斗虚亢室	+	斗女角奎	+	斗牛氐壁
−	危奎尾角	−	危壁心氐	−	危室箕亢
+	婁氐女心	+	婁亢牛箕	+	婁角虚尾

戸板の最大の功績は、行列式の展開に現れる項が全て一度づつ現れるような「交式表」の必要条件を与えたことである。それは符号の違いを除いて同じ項を定める交式は一つに限るというもので、斜乗図が主対角線と反対角線からなる十字図形とその平行移動で作られ、かつわれわれのように実級を動かさない交級しか許さない場合には、ある順列が「交式表」に入っているときは1を除く後の順列で単に順序が逆転しているものは同じ「交式表」に入ることは許されないという制限になる。これは2ページの交式表では松永の番号 M_k と $\mathrm{M}_{\bar{k}}$ のものが同時に入ることはできないという制限である。ところが關の交式はことごとくこの制限を破っている。戸板は半数は關の交式と一致し、残りも末尾の二つの字のみが互換されているという交式表を作り、「此數與二傳書一小異也傳書ハ蓋誤也末辨スレ之」と注記した。三上はこれを根拠に關は間違っていると断じている。ところで、われわれの変斜乗を計算する斜乗図は始め三つの小円は左斜乗と同じで、あと二つはこれと直交する形をとっており、戸板の理論と矛盾しない。戸板は、また、松永の交式図も許されるとしている。

4　菅野元健と石黒信由の斜乗の訂正

第6ページに引用したように、三上 [7] は關の交式斜乗法のうち交式の誤りは松永 [1] によって正されたが、「斜乗の誤りは遥かに降って寛政十年 (一七九八) に至り、菅野 [3] と石

黒]5] とが、此の同じ年に而も僅かに一ヶ月違ひで其誤りを指摘し、且つ正しい斜乗図の作成を記して居る。」と書き、これが現在も人々の信ずるところとなっている。

この二つの本と關 [0] を較べて最初に気付くのは、5 次の行列式の計算に用いる斜乗図の色の違いである。關のものは左斜乗とその平行移動は朱、右斜乗とその平行移動には黒が用いられているが、菅野のものは共に朱、石黒のものには共に朱のものと、共に黒の二つの図がある。關には 6 次の図はないが、菅野のものは主対角線が朱、反対角線は黒で、これらは一つ平行移動する毎に色が変わる。これは關が述べている一般法則に一致する。石黒には此の場合も菅野と同じものと反対に色付けされた二つの図がある。「交式表」は二人共に松永のものを使っているが、番号づけには各自の工夫がある。

菅野は交式表にある交式ごとにその偶奇に応じて生剋を区別し、剋であれば、結果の生剋を取り換えた。一方、石黒は交式の番号を付ける際に偶のものには若い番号を割り当て、これらの番号の交式には菅野と同じ図を参照させ、奇の交式には符号を変えた方の図を参照させたから、二人とも展開の結果は同じになり、正しい結果が得られた。二人はこれを關が [0] で彼の定義によって行列式を計算し、同時に二級以下の未知数を含む項の消去を確かめたのと同じ計算をして確認している。

現在の教科書の執筆者は、順列の偶奇など、最初にきちんとした定義を与えておけば、計算の途中ではそれがどうなろうか心配はせずに読者に任せておける。しかし、江戸時代の生剋は、これと同じものであるにも拘わらず、どういう経過で今の順列乃至は符号が得られたのかを知っていなければ計算ができなかった。その為に事前に細かく場合分けをしてそれぞれの場合に応じて手続きを決めて計算をさせる必要があった。關は $n = 1, 2, 3, 4$ までは同じ手続きで計算できたものが、まさか $n = 5$ で破綻するとは思わなかったのであろう。菅野 [4] は $n \equiv 1 \bmod 4, 2 \bmod 4, 3 \bmod 4, 4 \bmod 4$ の場合に分けて手続きを与えたが、加藤 [8[によれば、7 次の展開で既に破綻する。石黒 [5, 6] は、上に述べた交式の番号の付け替えのおかげで、ただ 1 人いつでも正しく計算することができた。

戸板 [2] は折角正しい交式表の作り方を見つけ、5 次の場合に新しい「交式表」を作りながら、適切な斜乗図を知らなかった為に 5 次の行列式の計算に役立てることはできなかった。しかし、菅野と石黒のものを使えば正しく計算できる。このことは、次ページからの表を使って、実際に確かめて頂きたい。

これらの表は変斜乗に対するものを除き、菅野 [3]、石黒 [6] などにあるものと本質的に同一である。しかし、交式の作用を、われわれは關にならって交級としているのに対し、彼らは方程式の置換としていることに注意されたい。行列式は行と列を置換させても値が変わらないから、どちらの解釈をとっても行列式の計算結果は変わらない。しかし、度々注意するように、行列式の行列置換による不変性を明記した江戸時代の文献は見付かっていないことも事実である。

5次行列式に対する交式と斜乗

交級

$M_1 = +12345$	$M_2 = -13452$	$M_3 = +14523$	$M_4 = -15234$
星觜奎女心$_1$	星觜奎女心$_1$	星觜奎女心$_1$	星觜奎女心$_1$
柳畢壁牛房$_2$	鬼昴室斗氐$_3$	井胃危箕亢$_4$	參婁虚尾角$_5$
鬼昴室斗氐$_3$	井胃危箕亢$_4$	參婁虚尾角$_5$	柳畢壁牛房$_2$
井胃危箕亢$_4$	參婁虚尾角$_5$	柳畢壁牛房$_2$	鬼昴室斗氐$_3$
參婁虚尾角$_5$	柳畢壁牛房$_2$	鬼昴室斗氐$_3$	井胃危箕亢$_4$

左斜乗

＋心牛室胃參	＋心斗危婁柳	＋心箕虚畢鬼	＋心尾壁昴井
＋女壁昴井角	＋女室胃參房	＋女危婁柳氐	＋女虚畢鬼亢
＋奎畢鬼亢尾	＋奎昴井角牛	＋奎胃參房斗	＋奎婁柳氐箕
＋觜柳氐箕虚	＋觜鬼亢尾壁	＋觜井角牛室	＋觜參房斗危
＋星房斗危婁	＋星氐箕虚畢	＋星亢尾壁昴	＋星角牛室胃

右斜乗

＋心柳昴危尾	＋心鬼胃虚牛	＋心井婁壁斗	＋心參畢室箕
＋女房鬼胃虚	＋女氐井婁壁	＋女亢參畢室	＋女角柳昴危
＋奎牛氐井婁	＋奎斗亢參畢	＋奎箕角柳昴	＋奎尾房鬼胃
＋觜壁斗亢參	＋觜室箕角柳	＋觜危尾房鬼	＋觜虚牛氐井
＋星畢室箕角	＋星昴危尾房	＋星胃虚牛氐	＋星婁壁斗亢

変斜乗

－心牛室井婁	－心斗危參畢	－心箕虚柳昴	－心尾壁鬼胃
－女壁昴亢參	－女室胃角柳	－女危婁房鬼	－女虚畢氐井
－奎畢鬼箕角	－奎昴井尾房	－奎胃參牛氐	－奎婁柳斗亢
－觜柳氐危尾	－觜鬼亢虚牛	－觜井角壁斗	－觜參房室箕
－星房斗胃虚	－星氐箕婁壁	－星亢尾畢室	－星角牛昴危

交級

$M_5 = +12453$	$M_6 = -14532$	$M_7 = +15324$	$M_8 = -13245$
星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$
柳畢壁牛房 $_2$	井胃危箕亢 $_4$	參婁虛尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$
井胃危箕亢 $_4$	參婁虛尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$	柳畢壁牛房 $_2$
參婁虛尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$	柳畢壁牛房 $_2$	井胃危箕亢 $_4$
鬼昴室斗氐 $_3$	柳畢壁牛房 $_2$	井胃危箕亢 $_4$	參婁虛尾角 $_5$

左斜乘

＋心牛危婁鬼	＋心箕虛昴柳	＋心尾室畢井	＋心斗壁胃參
＋女壁胃參氐	＋女危婁鬼房	＋女虛昴柳亢	＋女室畢井角
＋奎畢井角斗	＋奎胃參氐牛	＋奎婁鬼房箕	＋奎昴柳亢尾
＋觜柳亢尾室	＋觜井角斗壁	＋觜參氐牛危	＋觜鬼房箕虛
＋星房箕虛昴	＋星亢尾室畢	＋星角斗壁胃	＋星氐牛危婁

右斜乘

＋心柳胃虛斗	＋心井婁室牛	＋心參昴壁箕	＋心鬼畢危尾
＋女房井婁室	＋女亢參昴壁	＋女角鬼畢危	＋女氐柳胃虛
＋奎牛亢參昴	＋奎箕角鬼畢	＋奎尾氐柳胃	＋奎斗房井婁
＋觜壁箕角鬼	＋觜危尾氐柳	＋觜虛斗房井	＋觜室牛亢參
＋星畢危尾氐	＋星胃虛斗房	＋星婁室牛亢	＋星昴壁箕角

変斜乘

－心牛危參昴	－心箕虛鬼畢	－心尾室柳胃	－心斗壁井婁
－女壁胃角鬼	－女危婁氐柳	－女虛昴房井	－女室畢亢參
－奎畢井尾氐	－奎胃參斗房	－奎婁鬼牛亢	－奎昴柳箕角
－觜柳亢虛斗	－觜井角室牛	－觜參氐壁箕	－觜鬼房危尾
－星房箕婁室	－星亢尾昴壁	－星角斗畢危	－星氐牛胃虛

交級

$M_{\bar{1}} = +\ 1\ 5\ 4\ 3\ 2$　$M_{\bar{2}} = -\ 1\ 2\ 5\ 4\ 3$　$M_{\bar{3}} = +\ 1\ 3\ 2\ 5\ 4$　$M_{\bar{4}} = -\ 1\ 4\ 3\ 2\ 5$

星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$
參婁虛尾角 $_5$	柳畢壁牛房 $_2$	鬼昴室斗氐 $_3$	井胃危箕亢 $_4$
井胃危箕亢 $_4$	參婁虛尾角 $_5$	柳畢壁牛房 $_2$	鬼昴室斗氐 $_3$
鬼昴室斗氐 $_3$	井胃危箕亢 $_4$	參婁虛尾角 $_5$	柳畢壁牛房 $_2$
柳畢壁牛房 $_2$	鬼昴室斗氐 $_3$	井胃危箕亢 $_4$	參婁虛尾角 $_5$

左斜乘

+ 心尾危昴柳	+ 心牛虛胃鬼	+ 心斗壁婁井	+ 心箕室畢參
+ 女虛胃鬼房	+ 女壁婁井氐	+ 女室畢參亢	+ 女危昴柳角
+ 奎婁井氐牛	+ 奎畢參亢斗	+ 奎昴柳角箕	+ 奎胃鬼房尾
+ 觜參亢斗壁	+ 觜柳角箕室	+ 觜鬼房尾危	+ 觜井氐牛虛
+ 星角箕室畢	+ 星房尾危昴	+ 星氐牛虛胃	+ 星亢斗壁婁

右斜乘

+ 心參胃室牛	+ 心柳婁危斗	+ 心鬼畢虛箕	+ 心井昴壁尾
+ 女角井昴壁	+ 女房參胃室	+ 女氐柳婁危	+ 女亢鬼畢虛
+ 奎尾亢鬼畢	+ 奎牛角井昴	+ 奎斗房參胃	+ 奎箕氐柳婁
+ 觜虛箕氐柳	+ 觜壁尾亢鬼	+ 觜室牛角井	+ 觜危斗房參
+ 星婁危斗房	+ 星畢虛箕氐	+ 星昴壁尾亢	+ 星胃室牛角

変斜乘

− 心尾危鬼畢	− 心牛虛井昴	− 心斗壁參胃	− 心箕室柳婁
− 女虛胃氐柳	− 女壁婁亢鬼	− 女室畢角井	− 女危昴房參
− 奎婁井斗房	− 奎畢參箕氐	− 奎昴柳尾亢	− 奎胃鬼牛角
− 觜參亢室牛	− 觜柳角危斗	− 觜鬼房虛箕	− 觜井氐壁尾
− 星角箕昴壁	− 星房尾胃室	− 星氐牛婁危	− 星亢斗畢虛

交級

$M_9 = +1\ 2\ 5\ 3\ 4$　$M_{10} = -1\ 5\ 3\ 4\ 2$　$M_{11} = +1\ 3\ 4\ 2\ 5$　$M_{12} = -1\ 4\ 2\ 5\ 3$

星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$
柳畢壁牛房 $_2$	參婁虚尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$	井胃危箕亢 $_4$
參婁虚尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$	井胃危箕亢 $_4$	柳畢壁牛房 $_2$
鬼昴室斗氐 $_3$	井胃危箕亢 $_4$	柳畢壁牛房 $_2$	參婁虚尾角 $_5$
井胃危箕亢 $_4$	柳畢壁牛房 $_2$	參婁虚尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$

左斜乘

＋心牛虚昴井	＋心尾室胃柳	＋心斗危畢參	＋心箕壁婁鬼
＋女壁婁鬼亢	＋女虚昴井房	＋女室胃柳角	＋女危畢參氐
＋奎畢參氐箕	＋奎婁鬼亢牛	＋奎昴井房尾	＋奎胃柳角斗
＋觜柳角斗危	＋觜參氐箕壁	＋觜鬼亢牛虚	＋觜井房尾室
＋星房尾室胃	＋星角斗危畢	＋星氐箕壁婁	＋星亢牛虚昴

右斜乘

＋心柳婁室箕	＋心參昴危牛	＋心鬼胃壁尾	＋心井畢虚斗
＋女房參昴危	＋女角鬼胃壁	＋女氐井畢虚	＋女亢柳婁室
＋奎牛角鬼胃	＋奎尾氐井畢	＋奎斗亢柳婁	＋奎箕房參昴
＋觜壁尾氐井	＋觜虚斗亢柳	＋觜室箕房參	＋觜危牛角鬼
＋星畢虚斗亢	＋星婁室箕房	＋星昴危牛角	＋星胃壁尾氐

変斜乘

－心牛虚鬼胃	－心尾室井畢	－心斗危柳婁	－心箕壁參昴
－女壁婁氐井	－女虚昴亢柳	－女室胃房參	－女危畢角鬼
－奎畢參斗亢	－奎婁鬼箕房	－奎昴井牛角	－奎胃柳尾氐
－觜柳角室箕	－觜參氐危牛	－觜鬼亢壁尾	－觜井房虚斗
－星房尾昴危	－星角斗胃壁	－星氐箕畢虚	－星亢牛婁室

交級

$M_{\bar{5}} = +\ 1\ 3\ 5\ 4\ 2$ $M_{\bar{6}} = -\ 1\ 2\ 3\ 5\ 4$ $M_{\bar{7}} = +\ 1\ 4\ 2\ 3\ 5$ $M_{\bar{8}} = -\ 1\ 5\ 4\ 2\ 3$

星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$
鬼昴室斗氐 $_3$	柳畢壁牛房 $_2$	井胃危箕亢 $_4$	參婁虚尾角 $_5$
參婁虚尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$	柳畢壁牛房 $_2$	井胃危箕亢 $_4$
井胃危箕亢 $_4$	參婁虚尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$	柳畢壁牛房 $_2$
柳畢壁牛房 $_2$	井胃危箕亢 $_4$	參婁虚尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$

左斜乘

+ 心斗虚胃柳	+ 心牛室婁井	+ 心箕壁昴參	+ 心尾危畢鬼
+ 女室婁井房	+ 女壁昴參亢	+ 女危畢鬼角	+ 女虚胃柳氐
+ 奎昴參亢牛	+ 奎畢鬼角箕	+ 奎胃柳氐尾	+ 奎婁井房斗
+ 觜鬼角箕壁	+ 觜柳氐尾危	+ 觜井房斗虚	+ 觜參亢牛室
+ 星氐尾危畢	+ 星房斗虚胃	+ 星亢牛室婁	+ 星角箕壁昴

右斜乘

+ 心鬼婁危牛	+ 心柳昴虚箕	+ 心井畢室尾	+ 心參胃壁斗
+ 女氐參胃壁	+ 女房鬼婁危	+ 女亢柳昴虚	+ 女角井畢室
+ 奎斗角井畢	+ 奎牛氐參胃	+ 奎箕房鬼婁	+ 奎尾亢柳昴
+ 觜室尾亢柳	+ 觜壁斗角井	+ 觜危牛氐參	+ 觜虚箕房鬼
+ 星昴虚箕房	+ 星畢室尾亢	+ 星胃壁斗角	+ 星婁危牛氐

変斜乘

− 心斗虚井畢	− 心牛室參胃	− 心箕壁鬼婁	− 心尾危柳昴
− 女室婁亢柳	− 女壁昴角井	− 女危畢氐參	− 女虚胃房鬼
− 奎昴參箕房	− 奎畢鬼尾亢	− 奎胃柳斗角	− 奎婁井牛氐
− 觜鬼角危牛	− 觜柳氐虚箕	− 觜井房室尾	− 觜參亢壁斗
− 星氐尾胃壁	− 星房斗婁危	− 星亢牛昴虚	− 星角箕畢室

交級

$M_{\overline{9}} = +1\ 4\ 3\ 5\ 2$	$M_{\overline{10}} = -1\ 2\ 4\ 3\ 5$	$M_{\overline{11}} = +1\ 5\ 2\ 4\ 3$	$M_{\overline{12}} = -1\ 3\ 5\ 2\ 4$
星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$	星觜奎女心 $_1$
井胃危箕亢 $_4$	柳畢壁牛房 $_2$	參婁虚尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$
鬼昴室斗氐 $_3$	井胃危箕亢 $_4$	柳畢壁牛房 $_2$	參婁虚尾角 $_5$
參婁虚尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$	井胃危箕亢 $_4$	柳畢壁牛房 $_2$
柳畢壁牛房 $_2$	參婁虚尾角 $_5$	鬼昴室斗氐 $_3$	井胃危箕亢 $_4$

左斜乘

+ 心箕室婁柳	+ 心牛危昴參	+ 心尾壁胃鬼	+ 心斗虚畢井
+ 女危昴參房	+ 女壁胃鬼角	+ 女虚畢井氐	+ 女室婁柳亢
+ 奎胃鬼角牛	+ 奎畢井氐尾	+ 奎婁柳亢斗	+ 奎昴參房箕
+ 觜井氐尾壁	+ 觜柳亢斗虚	+ 觜參房箕室	+ 觜鬼角牛危
+ 星亢斗虚畢	+ 星房箕室婁	+ 星角牛危昴	+ 星氐尾壁胃

右斜乘

+ 心井昴虚牛	+ 心柳胃室尾	+ 心參畢危斗	+ 心鬼婁壁箕
+ 女亢鬼婁壁	+ 女房井昴虚	+ 女角柳胃室	+ 女氐參畢危
+ 奎箕氐參畢	+ 奎牛亢鬼婁	+ 奎尾房井昴	+ 奎斗角柳胃
+ 觜危斗角柳	+ 觜壁箕氐參	+ 觜虚牛亢鬼	+ 觜室尾房井
+ 星胃室尾房	+ 星畢危斗角	+ 星婁壁箕氐	+ 星昴虚牛亢

変斜乘

− 心箕室參畢	− 心牛危鬼婁	− 心尾壁井昴	− 心斗虚柳胃
− 女危昴角柳	− 女壁胃氐參	− 女虚畢亢鬼	− 女室婁房井
− 奎胃鬼尾房	− 奎畢井斗角	− 奎婁柳箕氐	− 奎昴參牛亢
− 觜井氐虚牛	− 觜柳亢室尾	− 觜參房危斗	− 觜鬼角壁箕
− 星亢斗婁壁	− 星房箕昴虚	− 星角牛胃室	− 星氐尾畢危

参考文献

[0] 關孝和, 解伏題之法, (1683 重訂), 東北大学図書館, 林集書 648/松永文庫 2490 ; 小松彦三郎校, 『解伏題之法』山路主済本の復元と「關孝和全集」との比較, 数理解析研究所講究録, **1392**(2004), 225–245.

[1] 松永良弼, 山路主住訂, 解伏題交式斜乗之諺解, (1715), 東北大学図書館, 岡本文庫/写 180/17101.

[2] 戸板保佑, 生尅因法傳, 關算前傳第三, (1759), 宮城県図書館, 伊達文庫 1682 KD090/セ 5/474·4.

[3] 菅野元健, 補遺解伏題生剋篇, (1798), 東北大学図書館, 岡本文庫/写 182/17103.

[4] 菅野元健, 補遺解伏題生剋篇, (1798), 東北大学図書館, 岡本文庫/写 170/17091.

[5] 石黒信由, 交式斜乗逐索, (1798), 新湊博物館, 高樹文庫 十五/下/20.

[6] 石黒信由, 交式斜乗生剋補義, 前編, 後編, (1798), 新湊博物館, 高樹文庫 十五/下/8&9.

[7] 三上義夫, 關孝和の業績と京阪の算家並びに支那の算法との関係及び比較, 六. 行列式, 七. 關孝和の逐式交乗之法, 東洋學報, **20**(1932), 236–249.

[8] 加藤平左衛門, 和算ノ行列式展開ニ就テノ検討, 東北數學雑誌, **45**(1939), 338–353.

[9] 佐藤賢一, 関孝和の行列式の再検討, 科学史・科学哲学, **11**(1993), 3–13 ; 下の講究録に再録.

[10] 後藤武史–小松彦三郎, 17 世紀日本と 18–19 世紀西洋の行列式、終結式及び判別式, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録, **1392**(2004), 117–128 ; 西北大学学報, **33**(2003), 363–367&376–380.

[11] Tsuruichi Hayashi, *The "Fukudai"*(伏題) *and Determinants in Japanese Mathematics*, Proc. Tokyo Mathematico-Physical Society, Ser. 2, **5**(1910), 254–271.

[12] Yoshio Mikami, *On the Japanese theory of determinants*, Isis, **2**(1914), 9–36.

[13] Daviid Eugene Smith and Yoshio Mikami, A history of Japanese mathematics, Open Court Pub. Co., 1914.