# 対称群の線形表現の性質，スピン表現の性質に関する Schur の２論文について

平井　武　（京都）

ここでは Schur の次の２つの論文について検討する：

**[S11, 1908]** I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.664–678.

**[S58, 1927]** J. Schur, Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **158** (1927), 63–79.

[S11, 1908] では，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の線形表現について次を示した：

（１） $\mathfrak{S}_n$ の既約線形表現が整数環 $\boldsymbol{Z}$ 上の行列で与えられる.

19 年後の論文 [S58, 1927] では，$\mathfrak{S}_n$ のスピン表現（＝射影表現）について次を与えた：

（２） $\mathfrak{S}_n$ の既約スピン表現が $\boldsymbol{R}$ 上の行列で与えられるための必要十分条件.

この２論文を比較研究する．線形表現とスピン表現とでは，何故これらの違った結果が出るのか？ 結果が出るのに何故そんなに時間差があるのか？

それと同時に，先行する Frobenius の「有限群の表現論」に関する数論的結果，Frobenius-Schur [F75] の共著論文における同方向の結果，についても並行して論ずる.

## Contents

# 1 Frobenius による有限群の指標と表現の一般理論における数論的側面

**[F53]** F. Frobenius, Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.985–1021.

**[F54]** —, Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.1343–1382.

**[F56]** —, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1897, pp.944–1015.

([F54] は Frobenius 全集における論文番号 54 を表す)

**(1)** Frobenius は論文 [F53, 1896] で，一般の有限群 $\mathfrak{H}$ に対して，Charakter（現代用語では既約指標）を方程式で定義した．それを現代風に解釈すると，群環 $\boldsymbol{Z}[\mathfrak{H}]$ で，不変元（共役類上の関数に対応）の生成する部分環が可換になるが，その可換多元環の（1次元）表現を指標と定義している．

そして（可換多元環の理論を使って）その方程式の解の個数が，$\mathfrak{H}$ の共役類の個数 $k$ に等しいことを示した．

また，$\mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}_5$, および $\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{Z}_p)$ ($p$ 奇素数) に対して，すべての指標を具体的に計算した．

**(2)** 論文 [F54, 1896] では，群行列式の研究を通して，既約指標の性質，例えば，直交性，$\ell^2$ ノルムなど，を示した．その最終節 §12 で，一般の有限群 $\mathfrak{H}$ に対して，「その既約指標 $\chi^{(\kappa)}$ $(1 \le \kappa \le k)$ の値 $\chi^{(\kappa)}(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ をすべて $\boldsymbol{Q}$ に添加した体は何か」を問うて研究し，次の定理を示した．

**定理 1.1.** 有限群 $\mathfrak{H}$ の $\boldsymbol{C}$ 上の線型既約表現 $\pi$ に対して，商 $|\mathfrak{H}|/\dim\pi$ は整数である（すなわち，次元 $\dim\pi$ は位数 $|\mathfrak{H}|$ を割る）．

**(3)** 論文 [F56, 1897] では，群の線形表現を導入し，[F53] で方程式で定義した指標が，既約線形表現のトレースに他ならないことを示した．

**定理 1.1 の証明.** Frobenius のもともとの証明 [F54] は，その §12 (pp.1369–1362) にあるが，これをコンパクトに再現するのは難しい．

そこで，後に **Schur** が表現論の基本を再構成した論文

[S7, 1905] I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.406–432.

の §5, pp.413–417, から該当部分を抜き出して意訳してみよう．まず命題(p.416)は，

**(XV)** *Der Grad jeder irreduziblen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{H}$ ist ein Divisor der Ordnung der Gruppe.*

証明. 非常に簡明な証明である．$\chi$ を任意の既約指標とする．$\chi$ は p.425 (VIII.) により，次を満たす．$E \in \mathfrak{H}$ を単位元とすると，$f := \chi(E)$ は $\chi$ に対応する既約線形表現 $\pi$ の次元 $\dim \pi$ であり，

$$\text{(VIII.)} \qquad \sum\nolimits_{R \in \mathfrak{H}} \chi(SR^{-1})\chi(R) = \frac{h}{f}\chi(S), \quad h := |\mathfrak{H}|, \quad (S \in \mathfrak{H}).$$

$\varepsilon_S$ を $E \in \mathfrak{H}$ で値 1 をとる $\mathfrak{H}$ 上の $\delta$ 関数とし，上を書き直すと，

$$\sum_{R \in \mathfrak{H}} \Big(\chi(SR^{-1}) - \frac{h}{f}\,\varepsilon_{SR^{-1}}\Big)\chi(R) \;=\; 0.$$

従って，$S, R \in \mathfrak{H}$ を動かしたときの $h \times h$ 型の係数行列式をとって，

$$\left|\chi(SR^{-1}) - \frac{h}{f}\,\varepsilon_{SR^{-1}}\right| = \left|\big(\chi(SR^{-1})\big)_{S,R\in\mathfrak{H}} - \frac{h}{f}\,E_h\right| = 0,$$

ここに，$E_h$ は $h \times h$ 型単位行列．よって，$x = h/f$ は方程式

$$\text{(1.1)} \qquad x^h + c_1 x^{h-1} + \cdots + c_{h-1}x + c_h = 0$$

の解である．ここに，係数 $c_1, \ldots, c_h$ は $\chi(R)$ の多項式で表される．

**補題 1.2.** 任意の $R \in \mathfrak{H}$ に対し，指標値 $\chi(R)$ は代数的整数である．

証明. $R^m = E$ とすると，$\pi(R)^m = E_f$. $\pi(R)$ は対角化可能だから，対角化すると $\mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_f)$, $\rho_j^m = 1$, である．各 $\rho_j$ は代数的整数であり，その和 $\chi(R) = \rho_1 + \cdots + \rho_h$ もそうである． □

Schur の証明が拠り所としている初等数論の命題は次である：

**命題 1.3** (根拠命題). 変数 $x$ の方程式 (1.1) において，係数 $c_1, \ldots, c_h$ が代数的整数とすると，その根は代数的整数である．

この命題により，$x = h/f$ は代数的整数である．しかも有理数でもある．従って整数である． 【定理 1.1 証了】

# 2 Frobeniusの証明[F54]の根拠，Dedekind の定理

定理1.1の，Frobeniusのもともとの証明（[F54], §12）の根拠は下のDedekindの論文に現れる **Satz V** である：

**[Dede]** R. Dedekind, Über einem arithmetischen Satz von Gauß, Mitteilung der Deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag, **1892**, pp.1–11 (Werke **2**, 28–38).

この論文はなかなか面白いので，原文を意訳してみよう（なお以下で H1, H2, .... は Hirai が勝手に作った見出しである）．

## 2.1 Gauß, Disquisitiones Arithmeticae, Art. 42

まず，Gaußの次の定理の観察から始める．

**Satz I.** *Wenn die Koeffizienten der beiden ganzen Funktionen*

$$P = x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \cdots + p_m,$$
$$Q = x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \cdots + q_n$$

*der Variablen $x$ rationale, aber nicht sämtlich ganze Zahlen sind, so können auch die Koeffizienten ihres Produkts*

$$PQ = x^{m+n} + r_1x^{m+n-1} + \cdots + r_{m+n}$$

*nicht sämtlich ganze Zahlen sein.*

対偶. $P, Q$ を最高次係数が1の $\boldsymbol{Q}$-係数多項式とする．
積 $PQ$ が $\boldsymbol{Z}$-係数 $\Longrightarrow$ $P, Q$ ともに $\boldsymbol{Z}$-係数．

証明. $p_i$ を既約分数に書いて，$p_i = p_i''/p_i'$，としたときに，分母 $p_i'$ の最小公倍数（すなわち，共通分母）をとって，$a_0$ とする．$Q$ および $PQ$ についても同様の共通分母をそれぞれ $b_0, c_0$ とする．共通分母を払うと，

$$A := a_0P = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m,\ a_i = a_0p_i\ (i \in \boldsymbol{I}_m),$$
$$B := b_0Q = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_m,\ b_i = b_0q_i\ (i \in \boldsymbol{I}_n),$$
$$C := c_0PQ = c_0x^{m+n} + c_1x^{m+n-1} + \cdots + c_{m+n}.$$

主張 **H1.** $A, B, C$ はいずれも原始多項式である．

定義 **H1.** $\boldsymbol{Z}$-係数多項式

$$A = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_m$$

が原始的 (ursprüngliche, primitive) とは，$a_0, a_1, \ldots, a_m$ に共通因数が無いこと.

証明. $A$ につき述べる. 素因数 $r$ に対し，$a_0$ は，$r^\nu$ $(\nu > 0)$ で割れるが $r^{\nu+1}$ では割れないとする. このとき，どれかの分母 $p'_i$ が $r^\nu$ で割れるが $r^{\nu+1}$ では割れない.

$a_i = a_0 p_i = \dfrac{a_0}{p'_i} \cdot p''_i$ において，$\dfrac{a_0}{p'_i}$ にはもはや素因数 $r$ は現れない. また，$p''_i$ は $p'_i$ と互いに素なので，$r$ を含まない. よって，この $i \in \boldsymbol{I}_m$ に対し，$a_i$ は素因数 $r$ を含まない. □

**主張 H2.** $a_0 b_0 = c_0$.

証明. $a_0 b_0$ に入っている素因子の冪 $r^\kappa$ をとる. 多項式 $A$ の係数を mod $r$ で考えると，

$$A \equiv \alpha_0 x^a + \alpha_1 x^{a-1} + \cdots + \alpha_a,$$
$$B \equiv \beta_0 x^b + \beta_1 x^{b-1} + \cdots + \beta_b,$$

とおくと，$\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$. すると，

$$AB \equiv \alpha_0 \beta_0 x^{a+b} + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)x^{a+b-1} + \cdots + (\alpha_{a-1}\beta_b + \alpha_a\beta_{b-1})x + \alpha_a\beta_b \neq 0.$$

従って，$a_0 b_0$ の任意の素因子 $r$ に対し，多項式 $AB$ の係数でそれを含まないものが 1 つはある. $AB$ は $\boldsymbol{Z}$-係数であり，

$$PQ = \frac{1}{a_0 b_0} \cdot AB$$

よって，$c_0 = a_0 b_0$ を得る. □

**Satz I の証明.** 仮定により，$c_0 = 1$. 主張 H2 により，$a_0 b_0 = c_0 = 1$ $\therefore$ $a_0 = b_0 = 1$. □

**Satz II.** 2 つの原始多項式の積は，また原始的.

**主張 H3.** Satz II $\Longleftrightarrow$ 「主張 H2」

**定義 H2.** $\boldsymbol{Z}$-係数多項式

$$A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m$$

の共通因数（Teiler）とは，係数 $a_0, a_1, \ldots, a_m$ の共通因数のことである.

**Satz III.** (Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie)

２つの $\boldsymbol{Z}$-係数多項式 $P, Q$ の積 $PQ$ の共通因数は，$P, Q$ それぞれの共通因数の積である．

証明．$A, B$ それぞれの共通因数を横に除ければ，Satz II になる． □

**Satz IV.** ２つの多項式 $A, B$ の係数 $a, b$ は有理数とする．積 $AB$ の係数 $c$ がすべて整数ならば，積 $ab$ はつねに整数．

証明．主張 H2 による． □

## 2.2 代数的数と代数的整数の場合，Satz V

**定義 H3.** 代数的数とは，$\boldsymbol{Q}$-係数多項式の根，代数的整数 (ganze algebraische Zahl) とは，整係数で最高次係数=1 の多項式の根．

**(1)** 代数的整数の全体は環をなす．

**(2)** ある数 $a$ に対して，$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ $(\exists \mu_j \neq 0)$ と整数行列 $Z = (z_{ij})_{i,j \in \boldsymbol{I}_n}$ が存在して，

$$a\mu_i = \sum_{j \in \boldsymbol{I}_n} z_{ij}\mu_j \quad (i \in \boldsymbol{I}_n),$$

となっているならば，$a$ は代数的整数．

$(\because)$ $\det\big(Z - aE_n\big) = 0.$ □

**Satz V.** *Wenn das Produkt AB aus zwei Funktionen A, B lauter ganze algebraische Koeffizienten besitzt, so ist jedes aus einem Koeffizienten von A und einem Koeffizienten von B gebildeten Produkt eine ganze algebraische Zahl.*

意訳．多項式 $A, B$ の積 $AB$ の全ての係数が代数的整数だとすると，$A$ の任意の係数と $B$ の任意の係数との積はつねに代数的整数である．

【この定理が，定理 1.1 の根拠定理である．】

これの簡単な，拡張可能な証明を与えるのが本論文 [Dede] の目的．

## 2.3 代数的数・代数的整数の場合の証明

特別な場合として，次を示し，それから Satz V を出す (難しいことを使わない)．

**Satz VI.** *Wenn die ganze Funktion $f(x)$ lauter ganze algebraische Koeffizienten hat, und wenn $\omega$ irgendeine Wurzel der gleichung $f(\omega) = 0$ bedeutet,* *so hat auch die ganze Funktion*

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x-\omega}$$

*lauter ganze algebraische Koeffizienten.*

証明.
$$f(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \cdots + c_k = (x-\omega)f_1(x),$$
$$f_1(x) = a_0x^{k-1} + a_1x^{k-2} + \cdots + a_{k-1},$$

とおくと，$c_0 = a_0$, $c_1 = -a_0\omega + a_1$, $c_2 = -a_1\omega + a_2$, …, $c_k = -a_{k-1}\omega$.

$$a_r = c_0\omega^r + c_1\omega^{r-1} + \cdots + c_r \quad (0 \le r \le k-1), \tag{2.2}$$

$$c_0\omega^k = -c_1\omega^{k-1} - \cdots - c_k, \tag{2.3}$$

$$\therefore \quad a_r\omega^s = c_0\omega^{r+s} + c_1\omega^{r+s-1} + \cdots + c_r\omega^s \qquad (r+s<k),$$
$$a_r\omega^s = -c_{r+1}\omega^{s-1} - c_{r+2}\omega^{s-2} - \cdots - c_k\omega^{s-(k-r)} \quad (r+s \ge k).$$

故に，§2, (3) により，$a_r$ は代数的整数. □

$$f(x) = c_0(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_k)$$

を勝手な，$(x-\omega_{i_1}), (x-\omega_{i_2}), \ldots$ で逐次割ると，勝手な $c_0\,\omega_{j_1}\omega_{j_2}\cdots\omega_{j_p}$ が代数的整数であることが分かる.

主張 **H4.** $c_0(1+\omega_1)(1+\omega_2)\cdots(1+\omega_k)$ の勝手な展開項が代数的整数.

◆**主張 H4 による Satz V の証明.**

$$A = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m),$$
$$B = b_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n),$$

と分解し，$k := m+n$, $c_0 := a_0b_0$,

$f(x) := AB = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \cdots + c_k$ とおく.

このとき，$f(x) = a_0b_0 \prod_{i\in \boldsymbol{I}_m}(x-\alpha_i)\cdot\prod_{j\in \boldsymbol{I}_n}(x-\beta_j)$

であるから，任意の積

$$c_0\cdot\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}\cdot\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_q} = \big(a_0\,\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}\big)\cdot\big(b_0\,\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_q}\big)$$

は，代数的整数である．他方，任意の 2 つの係数の積 $a_ib_j$ はこれらのものの和であるから，代数的整数である． **【Satz V の証明終わり】**

注. Satz V のこの証明では，$A, B$ の一次因子への分解を使っている．論文 [Dede] ではこの「分解可能性」を使わない証明をこの後で与えている．それは代数関数の場合にも使える.

# 3 Frobenius による $\mathfrak{S}_n$ の既約線形表現と指標に対する数論的側面

**[F60]** F. Frobenius Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1900, pp.516–534.

**[F68]** —, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1903, pp.328–358.

## 3.1 論文 [F60, 1900] での結果

Frobenius は論文 [F60] で，対称群 $\mathfrak{S}_n$ に対し，その既約指標を分類し，既約指標の計算法も与えた．まず，$n$ の分割

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m > 0,\ \sum_i \lambda_i = n,$$

をとり，その全体 $P_n$ が既約表現の同値類を径数付けする．$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in P_n$ に対して，直積群

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_m} \tag{3.1}$$

を標準的な方法で $\mathfrak{S}_n$ に埋め込み，これと同一視する．$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の自明表現を $\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ とおき，誘導表現を作る：

$$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}} \tag{3.2}$$

これは，$\boldsymbol{\lambda} = (n), \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathfrak{S}_n, \Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_n}$，場合以外は可約である．$\boldsymbol{\lambda} \in P_n$ の逆辞書式順序に従って，帰納的に証明されるのだが，$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ には既約成分のうちのトップのものが重複度 1 で入っている．これを既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ とよぶ．$\boldsymbol{\lambda} \in P_n$ に対する逆辞書式順序を具体的に書くと，

$$(n) < (n-1,1) < (n-2,2) < (n-2,1,1) < (n-3,3) < (n-3,2,1) < \ldots$$
$$\ldots < (2,1,1,\ldots,1) < (1,1,1,\ldots,1,1).$$

**定理 3.1.** $n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標の値はつねに整数である（すなわち，$\boldsymbol{Z}$-valued）．

原文： [F54, 1896], §12, p.77, ↓ 8−10:

$\cdots$ . Daher sind die Charactere der symmetrischen Gruppe sämtlich ganze rationale Zahlen (vergl. die Beispiele $n = 4$ und 5, [F53, 1896], §8).

### 3.2 論文 [F68, 1903] での結果

論文 [F68] で，$\mathfrak{S}_n$ に対し，次の結果を得た：

**(3.2.a)** $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ に対し，$\boldsymbol{\lambda}$ および その転置 ${}^t\boldsymbol{\lambda}$ を用いて，$\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の指標 $\chi_{\pi_{\boldsymbol{\lambda}}}$ を計算する第 2 の方法（[F60] における第 1 の方法より簡単な第 2 の方法），を与えた．

**(3.2.b)** 群環 $\boldsymbol{C}[\mathfrak{S}_n]$ 内の，$\boldsymbol{\lambda}$ に対応する不変原始冪等元（charakteristische Einheit, 現在で言う Young symmetrizer）を与えた．

それには A. Young の論文 [You1,1901], [You2, 1902] を大いに参考にした．[F68], §8, p.265, ↑9–6, に次のように書かれている：

Die Eigenschaften der in Satz III definirten Function $\zeta(R)$ hat Hr. A. Young untersucht in zwei sehr beachtenswerthen Arbeiten *On Quantitative Substitutional Analysis*, Proceedings of the London Math. Soc., vol. 33 und 34, im Folgenden *Y.* I und *Y.* II citirt. $\cdots\cdots\cdots$

**定理 3.2.** $n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の任意の既約表現の行列要素をすべて有理数に出来る．

原文： [F68, 1903], in Introduction, p.245 ↓ 5–6,

$\cdots$. Wie sich dabei zeigt, kann man die $h$ linearen Substitutionen jeder primitiven Darstellung der symmetrischen Gruppe so wählen, dass ihre Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind.

《旧正書法にて，sämmtlich = sämtlich》

## 4 有限群の線形表現における数論的問題

上の論文 [F60], [F68], あとで論評する論文 [S9], [S11] に見るように，Frobenius や Schur は数論的な視点からも表現や指標を見ている．Schur はとくに，論文

**[S9, 1906]** I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.164–184.

において，有限群の線形表現の数論的局面を論じている．

有限群 $\mathfrak{H}$ の $\boldsymbol{C}$ 上の既約線形表現 $\pi$ をとり，その指標を $\chi$ とする．指標値 $\chi(R)$ $(R \in \mathfrak{H})$ を有理数体 $\boldsymbol{Q}$ に添加した代数的数体を $\boldsymbol{Q}(\chi)$ と書く．指標 $\chi$ の（または表現 $\pi$ の）**Schur index** とは，$\boldsymbol{Q}(\chi)$ の $m$ 次の拡大体 $L$ で，$\pi$ が $L$ 上実現出来る，すなわち，基底をうまくとればすべての $\pi(R)$ $(R \in \mathfrak{H})$ の行列要素が $L$ から取れる，ような $m$ の最小値 $m(\chi)$ である．

(一般の基礎体 $\Omega$ の場合も同様である.)

$\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_n$ の場合には，上述のように，Frobenius [F68] により，つねに $\boldsymbol{Q}(\chi) = \boldsymbol{Q}$, $m(\chi) = 1$, である.

上の Schur index の定義をより現代的に述べよう．有限群 $G$ の体 $K$ 上の既約線形表現 $\rho$ が $K$ の任意の拡大体においても既約であるとき，絶対既約という．$G$ の $K$ 上の任意の既約線形表現が絶対既約であるとき，$K$ を $G$ の分裂体 (splitting field) という．$K$ を $G$ の分裂体とすれば，$K$ の任意の拡大体 $L$ に対して，$L$ 上の $G$ の任意の既約表現は $K$ 上で実現可能である.

**定義 4.1.** $G$ を有限群，$K$ をその分裂体，$\chi$ を $K$ 上の既約線形表現の指標，$k$ を指標値 $\chi(g)$ $(g \in G)$ で生成される $K$ の部分体，とする．$\chi$ の **Schur index** $m(\chi)$ は，次の互いに同値なやり方で定義される：

**(1)** $k$ の $m$ 次の拡大体 $L$ で $\pi$ が $L$ 上実現出来るような $m$ の最小値,

**(2)** $k$ 上の既約表現を $K$ 上で考えたとき，$\pi$ を既約成分に含むときの重複度. (Cf. Schur index of irreducible character - Groupprops)

さらに，ここまでのこの報文の流れで次のような問題が提起されている.

**問題 A** (既約表現の実現に関して) 次の条件を満たす最小の体 $K$ を求めよ.
「$G$ の体 $K$ 上の（有限次元）線形表現がすべて完全可約であり，$K$ の任意の拡大体の上の線形表現は $K$ 上の線形表現に同値である.」

**問題 B** (指標環に関して) 次の条件を満たす最小の体 $K$ を求めよ.
「指標の $\boldsymbol{Z}$ 線形結合全体を指標環と呼ぶ．体 $K$ 上の（有限次元）線形表現がすべて完全可約であり，体 $K$ 上の表現の指標環が $K$ の任意の拡大体の上の指標環に等しい.」

標数 0 の場合では，体の代わりに，$\boldsymbol{Z}$ の拡大環を問題にすることも出来る.

**問題 a** 既約表現 $\pi$ の行列表示 $T_\pi$ をうまく実現したとき，その全ての行列要素を含む $\boldsymbol{Z}$ の有限次拡大環，または有理数体 $\boldsymbol{Q}$ の有限次拡大体，で最小のものは何か？

**問題 b** 各既約表現 $\pi$ $([\pi] \in \widehat{G})$ の指標の値 $\chi_\pi(g)$ $(g \in G)$ をすべてを含む $\boldsymbol{Z}$ の有限次拡大環，または $\boldsymbol{Q}$ の有限次拡大体は何か？

注. M. Benard は，論文 [Bena, 1976] において，unitary reflection groups (本書では複素鏡映群という) $G$ に対して，次の結果を与えた.

**Theorem 1.** *Let $G$ be a unitary reflection group and let $F$ be the field generated over $\boldsymbol{Q}$ by the values of the characters of $G$. Then each representation of $G$ is similar to an $F$-represenation.*

# 5 $\mathfrak{S}_n$ の既約線形表現は $\boldsymbol{Z}$ 上の行列で表し得る [S11]

**[S11, 1908]** I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, 664–678.

Schur はこの論文 [S11, 1908] で，次を証明した：

「$n \geq 3$ のとき，対称群 $\mathfrak{S}_n$ のどの既約表現も，すべての行列要素が整数であるような行列表示を持つ」(ただしこれはユニタリ行列による表示ではない)

Frobenius は [F60, 1900] で，各 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{1\leqslant j\leqslant m} \in P_n$ に対して，誘導表現

$$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}, \quad \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_m} \hookrightarrow \mathfrak{S}_n,$$

のトップ既約成分として，既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ を与えたが，$\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の表現空間は，$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の表現空間の商空間であり，使いやすい基底を厳密には書き下せない.

そこで，Schur は $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の表現空間を，ある多項式の空間の商空間として実現し，良い性質を持つ基底を具体的に構成し，その基底に関して，単純互換 $s_i$ $(i \in \boldsymbol{I}_{n-1})$ の作用が整数係数で表されることを示した.

[S11] の **Introduction**, 1〜4行目，11〜13行，14〜23行，の原文を引用する.

**(1)** Eine genaue Übersicht über die irreduziblen Gruppen linearer homogener Substitutionen $\mathfrak{G}_n$, die der summetrischen Gruppe $n^{\text{ten}}$ Grades $\mathfrak{S}_n$ isomorph sind, hat zuerst Hr. Frobenius durch Bestimmung der Charactere von $\mathfrak{S}_n$ gewonnen. [F60, 1900]

意訳. Frobenius は [F60] で，対称群 $\mathfrak{S}_n$ と同型な既約線形群 $\mathfrak{G}_n$ についての詳しい結果を，$\mathfrak{S}_n$ の既約指標の研究を通じて，与えた.（これは既約表現の分類を意味する）

**(2)** Eine weitere Methode zur Berechnung der Charaktere von $\mathfrak{S}_n$ und der Gruppen $\mathfrak{G}_n$ hat Hr. Frobenius in seiner Arbeit [F68] gegeben. In dieser Arbeit, hat Hr. Frobenius auch zuerst den Satz ausgeprochen, daß

*jede der Gruppen $\mathfrak{G}_n$ bei passsender Wahl der variabeln als eine Gruppe mit rationalen Koeffizienten geschreiben werden kann.* [F68, 1903, p.328]

意訳. さらに，論文 [F68] において，Frobenius は，$\mathfrak{S}_n$ の既約指標と（行列）群 $\mathfrak{G}_n$（平井注. 対応する既約表現による $\mathfrak{S}_n$ の像）の別の計算法を与えた，また初めて次の定理を証明した：既約表現は適当な基底を選べば，有理数係数（有理数行列）で書ける.

**(3)** In der vorliegen Arbeit soll nun genauer gezeigt werden, daß sich jede der irreduziblen Gruppen $\mathfrak{G}_n$ bei geeingner Wahl der Variabeln auch als eine Gruppe mit *ganzzahligen* rationalen Koeffizienten darstellen läßt. ........., so ergibt sich zugleich der Satz:

*Jede Gruppe linearer homogener Substitutionen, die der symmetrischen Gruppe $n^{ten}$ Grades isomorph ist, läßt sich durch eine lineare Transformation der Variabeln in eine Gruppe mit ganzzahligen rationalen Koeffizienten überführen.*

意訳. 当論文では，より詳しく，「$\mathfrak{S}_n$ の任意の既約表現は適当な基底に関して，$\boldsymbol{Z}$ 係数で書ける」を示した．（平井注．$\mathfrak{S}_n$ の任意の既約線形表現は $\boldsymbol{Z}$ 上の行列で書ける．）

**[11, 1908] の記号に関する注意.** $n$ の分割 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ に対して，[11] では，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式の空間に具体的な基底を決める都合で，成分 $\lambda_j$ の大小順を $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m$ としてある（ここでは Schur 方式という）．これを，Frobenius 方式 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$ に従って書き直して行くことを試みたが，途中で断念せざるを得なかった．Frobenius 方式の $(\lambda_j)$ と Schur 方式とを移り合うには，$\lambda_j$ の添字を $j \leftrightarrow m+1-j \ (1 \leq j \leq m)$ と付け換えればよい（すなわち，成分の並べ方＝添字の付け方，を左右反転すればよい）．

## 5.1 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標

$n$ の分割 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ に対して，$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m$ (Schur 方式) としておく．

$R \in \mathfrak{S}_n$ の共役類 $[R]$ は $R$ のサイクル分解におけるサイクルの長さの組 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots n^{\alpha_n}$ により決まる．表現 $\Pi$ に対して，指標 $\chi_\Pi(R) =: \chi_\Pi(\alpha)$ の **Charakteristik**（指標の母関数ともいう）とは，

$$\Phi_\Pi(s) := \sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n} \frac{\chi_\Pi(\alpha)}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{n}\right)^{\alpha_n}. \tag{5.1}$$

$\boldsymbol{\lambda} \in P_n$ に対応する既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ の指標を $\chi_\alpha^{\boldsymbol{\lambda}} := \chi_{\pi_{\boldsymbol{\lambda}}}(R)$ とおく．その **Charakteristik**（母関数）は，

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}(s) := \sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n} \frac{\chi_\alpha^{\boldsymbol{\lambda}}}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{n}\right)^{\alpha_n}, \tag{5.2}$$

であり，$\quad \Phi_{\boldsymbol{\lambda}}(s_1, 0, \ldots, 0) = \dfrac{\chi^{\boldsymbol{\lambda}}_{[n,0,\ldots,0]}}{n!}s_1^n = f_{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \dfrac{s_1^n}{n!}, \quad f_{\boldsymbol{\lambda}} := \dim \pi_{\boldsymbol{\lambda}}.$

$$f_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{n!}{\lambda_1!(\lambda_2+1)!\cdots(\lambda_m+m-1)!}\prod_{\alpha<\beta}(\lambda_\beta+\beta-\lambda_\alpha-\alpha).$$

(5.3) $$p_n := \sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{n}\right)^{\alpha_n} \quad (n\geq 1),$$

[$\mathfrak{S}_n$ の自明表現 $\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_n}$ の指標 $1_{\mathfrak{S}_n}$ の Charakteristik]

$p_0 := 1$, $p_n := 0\ (n<0)$, とおけば,

(5.4) $$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}(s) = \begin{vmatrix} p_{\lambda_1} & p_{\lambda_1-1} & \cdots & p_{\lambda_1-m+1} \\ p_{\lambda_2+1} & p_{\lambda_2} & \cdots & p_{\lambda_2-m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{\lambda_m+m-1} & p_{\lambda_m+m-2} & \cdots & p_{\lambda_m} \end{vmatrix} \quad \text{(Schur の学位論文).}$$

$\dfrac{\partial p_\nu}{\partial s_1} = p_{\nu-1}$ であるから, 上式の両辺を微分して,

$$\frac{\partial \Phi_{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial s_1} = \Phi_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m} + \Phi_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_m} + \cdots + \Phi_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_m-1},$$

(5.5) $$f_{\boldsymbol{\lambda}} = f_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m} + f_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_m} + \cdots + f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_m-1}.$$

◆ 誘導表現 $\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n}\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ の Charakteristik は $p_{\boldsymbol{\lambda}} = p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_m}$ であると言ってよい (実際にはこれからすぐ決まる).

<<§2, §3 は省略>>

## 5.4 既約表現の実現（表現空間の基底の選定）のための補題

$\boldsymbol{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ の $\mathfrak{S}_n$-部分環

(5.6) $$\begin{aligned}\Gamma^{(p)} &:= \left\langle\, x_1x_2\cdots x_{p-1}(x_p+x_{p+1}+\cdots+x_n)\,\right\rangle_{\boldsymbol{C}[\mathfrak{S}_n]} \\ &= \left\langle\, x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{p-1}}(x_{j_1}+x_{j_2}+\cdots+x_{j_{n-p+1}})\,;\right. \\ &\qquad \left.\{i_1,\ldots,i_{p-1},j_1,\ldots,j_{n-p+1}\} = \{1,2,\ldots,n\}\,\right\rangle_{\boldsymbol{C}}. \\ \Gamma^{(1)} &= \boldsymbol{C}(x_1+x_2+\cdots+x_n).\end{aligned}$$

(5.7) $$\begin{aligned}C^{(p)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r} &:= \sum_{\{i_1,\ldots,i_p\}\subset\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r\}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p} \quad (r\geq p), \\ C^{(p)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r} &:= 0 \qquad (r<p).\end{aligned}$$

**補題 5.1.** $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_{n-p}\} = \{1,2,\ldots,n\}$ とすると,

(5.8) $$x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\cdots x_{\alpha_p} \equiv (-1)^p C^{(p)}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-p}} \pmod{\Gamma^{(p)}}.$$

証明. $p=1$ では, $\Gamma^{(1)} = \boldsymbol{C}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$, $C^{(1)}_{2,3,\ldots,n} = x_2+x_3+\cdots+x_n$, なので OK.

あとは, Induction on $p$. □

## 5.5 誘導表現 $\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ の空間の基底の選定

$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant m} \in P_n$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m$, に対し,

$$X = X(\boldsymbol{\lambda}) := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = (x_1 \cdots x_{\lambda_1})^{m-1} (x_{\lambda_1+1} \cdots x_{\lambda_1+\lambda_2})^{m-2} \cdots,$$

$(\alpha_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ は始めの $\lambda_1$ 個が, $\alpha_j = m-1$, 2 番目の $\lambda_2$ 個が $\alpha_j = m-2$, $\ldots$, $m$ 番目の $\lambda_m$ 個が $\alpha_j = 0$. この $X$ を $\mathfrak{S}_n$ で動かしたもの全体

$$(5.9) \qquad X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(N)}, \quad N = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_m!},$$

の張る $\mathfrak{S}_n$-module (symmetric module) を $\mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と書く. これが誘導表現 $\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ の表現空間である. その表現作用素全体を $\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\lambda}} := \Pi_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathfrak{S}_n)$ と書く.

$\Pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ のトップ既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ が働くのは $\mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の商空間である.

◆ $\mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$ には, 次の元が含まれている：

$$Y_1 := \frac{X(\boldsymbol{\lambda})}{x_{\lambda_1}} (x_{\lambda_1} + x_{\lambda_1+1} + \cdots + x_{\lambda_1+\lambda_2}),$$

[$x_{\lambda_1}$ 1 個を $(x_{\lambda_1} + x_{\lambda_1+1} + \cdots + x_{\lambda_1+\lambda_2})$ で置き換える]

$$Y_2 := \frac{X(\boldsymbol{\lambda})}{x_{\lambda_1+\lambda_2}} (x_{\lambda_1+\lambda_2} + x_{\lambda_1+\lambda_2+1} + \cdots + x_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}),$$

$$\ldots := \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_{m-1} := \frac{X(\boldsymbol{\lambda})}{x_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}}} (x_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}} + x_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}+1} + \cdots + x_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}+\lambda_m}).$$

$Y_1$ の固定化群は, $\mathfrak{S}_{\lambda_1-1, \lambda_2+1, \lambda_3, \ldots, \lambda_m}$,
$Y_\nu$ の固定化群は, $\mathfrak{S}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu-1, \lambda_{\nu+1}+1, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_m}$,
$Y_{m-1}$ の固定化群は, $\mathfrak{S}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-2}, \lambda_{m-1}-1, \lambda_m+1}$,
従って, それらは $\mathfrak{S}_n$-module $\Pi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu-1, \lambda_{\nu+1}+1, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_m}$ を生成する.

$Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ の生成する $\mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の部分 $\mathfrak{S}_n$-module を $\mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と書き,

$$\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}} \bmod \mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}},$$

とおく. 各 $\Pi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu-1, \lambda_{\nu+1}+1, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_m}$, 従って, $\mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は既約成分として, $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ を含まないので, quotient module $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}}$ が $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ を含む： $\dim \mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}} = f_{\boldsymbol{\lambda}} =: f$.

◆ そこで, $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}} \bmod \mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の基底のために,
(5.9) の $N$ 個の単項式の中から $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ 個を選ぶ. そのために, 正整数係数の多項式 $F^{\boldsymbol{\lambda}}$ を帰納的に作り, それに現れる単項式を拾う.

**公式 5.1.** 変数 $x_1$ の現れ方：

$$F^{\boldsymbol{\lambda}} = F_1^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)} := x_1^{m-1}F_2^{(\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)} + x_1^{m-2}F_2^{(\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_m)} + \cdots + x_1F_2^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}-1,\lambda_m)} + F_2^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_m-1)}, \tag{5.10}$$

ここに，$\lambda_1 = 1$ のとき，$F_2^{(\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)} := F_2^{(\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}$

$\lambda_{\kappa-1} = \lambda_\kappa$ のとき，$F_2^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\kappa-1},\lambda_\kappa-1,\ldots,\lambda_m)} := 0$,

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

変数 $x_{n-2}$ の現れ方：

$F_{n-2}^{(3)} := 1,\ F_{n-2}^{(1,2)} := x_{n-2}F_{n-1}^{(2)} + F_{n-1}^{(1,1)} = x_{n-2} + x_{n-1},$

$F_{n-2}^{(1,1,1)} = x_{n-2}^{\ 2}F_{n-1}^{(1,1)} = x_{n-2}^{\ 2}\,x_{n-1},$

変数 $x_{n-1}$ の現れ方：　$F_{n-1}^{(2)} := 1,\ F_{n-1}^{(1,1)} := x_{n-1}.$

変数 $x_n$ は現れない．

**例 5.1.** $F^{(1,n-1)} = x_1+x_2+\cdots+x_{n-1},\quad \mathrm{A}^{(1,n-1)} = \langle x_1+x_2+\cdots+x_n\rangle_{\boldsymbol{C}}$,

$f_{(1,n-1)} = n-1,\quad \big\langle x_j\,;\,1 \le j \le n-1\big\rangle_{\boldsymbol{C}} \quad \mathrm{mod}\ \mathrm{A}^{(1,n-1)}.$

$$F^{(2,n-2)} = x_1(x_2+\cdots+x_{n-1}) + x_2(x_3+\cdots+x_{n-1}) + \cdots + x_{n-3}(x_{n-2}+x_{n-1}),$$

$$\mathrm{A}^{(2,n-2)} = \big\langle x_i(x_1+\cdots+x_n)-x_i^2\,;\,1 \le i \le n\big\rangle_{\boldsymbol{C}},$$

$$f_{(2,n-2)} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1 = \frac{1}{2}n(n-3),$$

$$\big\{x_\alpha x_\beta\,;\,1 \le \alpha < \beta < n,\ \alpha \le n-3\big\} \quad \mathrm{mod}\ \mathrm{A}^{(2,n-2)}.$$

**補題 5.2.** 多項式 $F^{\boldsymbol{\lambda}}$ に現れる単項式を $X_1, X_2, \ldots, X_{f'}$ とすると，$f' = f_{\boldsymbol{\lambda}} = \dim \pi_{\boldsymbol{\lambda}}$.

証明. $F^{\boldsymbol{\lambda}}$ の帰納的構成法から $f'$ の帰納公式を書き下すと，

$$f' = f_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m} + f_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_m} + \cdots + f_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_m-1}.$$

(5.5) 式により，$f' = f_{\boldsymbol{\lambda}} = f$ を得る． □

**Satz I (§5, p.674).** 単項式 $X^{(\alpha)}$ は mod $\mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ によって，$X_1, X_2, \ldots, X_f$ の整係数 1 次結合に合同である．

### 5.6 Satz I の証明のための主定理

**主定理 (Satz IV, §6, p.677).** $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ $(\boldsymbol{\lambda} \in P_n)$ は次のように実現出来る．$\mathfrak{S}_n$-module $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathrm{M}_{\boldsymbol{\lambda}} \bmod \mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の基底は，多項式 $F^{\boldsymbol{\lambda}}$ に現れる単項式を $X_1, X_2, \ldots, X_f$ $(f = f_{\boldsymbol{\lambda}})$ を $\bmod \mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ で考えれば得られる．このとき，任意の $R \in \mathfrak{S}_n$ に対して，整数 $c_{\alpha\beta}$ が存在して，

$$\pi_{\boldsymbol{\lambda}}(R)X_\alpha \equiv c_{\alpha 1}X_1 + c_{\alpha 2}X_2 + \cdots + c_{\alpha f}X_f \pmod{\mathrm{A}_{\boldsymbol{\lambda}}}.$$

上でいろいろ準備してあるが，この定理の証明を最後まで書くのは，長くなり過ぎるので省略する．

## 6 Frobenius-Schur の共著 [F75, 1906] の結果

**[F75]** G. Frobenius und I. Schur, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin 1906, pp.186–208.

序文. 表現 $\pi(R)$ $(R \in \mathfrak{H})$ の共役表現 (**konjugierte Darstellung**) とは，$\pi^t(R) := {}^t\pi(R^{-1})$ $(R \in \mathfrak{H})$ である．

(平井注. $\pi$ がコンパクト群の有限次元行列表現のとき，$\overline{\pi}(R) := \overline{\pi(R)}$ $(R \in \mathfrak{H})$ [各行列要素の複素共役] とおけば，$\pi^t \cong \overline{\pi}$ である．)

**(1)** 群 $\mathfrak{H}$ の $\boldsymbol{C}$ 上の既約表現は次の 3 種に分けられる [F75, §2].

**1.** $\boldsymbol{R}$ 上の既約表現に同値なもの (1 種とよぶ),
**2.** $\boldsymbol{R}$ 上の既約表現に同値でないが，$\pi^t \cong \pi$ のもの (2 種とよぶ),
**3.** $\boldsymbol{R}$ 上の既約表現に同値でなく，$\pi^t \not\cong \pi$ のもの (3 種とよぶ).

**(2)** 有限群 $\mathfrak{H}$ の既約表現 $\pi$ に対して，

**(2a)** $\chi_\pi(\mathfrak{H}) \subset \boldsymbol{R} \iff \pi$ は 1 種または 2 種,

**(2b)** (§4) $\pi$ が 1,2,3 種に従って，$c_\pi = +1, -1, 0$ とおくと，

$$\sum_{R \in \mathfrak{H}} \chi_\pi(R^2) \;=\; c_\pi h, \quad h = |\mathfrak{H}|. \tag{6.11}$$

**(2c)** (§4) $\zeta(R) := \sharp\{S \in \mathfrak{H}\,;\, S^2 = R\}$ とおくと，

$$\sum_{[\pi] \in \widehat{\mathfrak{H}}} c_\pi \chi_\pi(R) \;=\; \zeta(R), \tag{6.12}$$

# 7 $\mathfrak{S}_n$ の既約スピン表現が $\boldsymbol{R}$ 上で実現出来るための必要十分条件 [S58]

**[S58, 1927]** J. Schur, Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **158** (1927), 63–79.

対称群 $\mathfrak{S}_n$ のスピン既約表現 $\pi$ が実数体 $\boldsymbol{R}$ 上での行列表示 $T_\pi$ を持つための必要十分条件を与えている.

Shifted Young diagram of degree $n$ (= strict partition of $n$):

(7.1) $\quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_j)_{1 \leqslant j \leqslant m},\ n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m,\ \nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_m > 0$

その全体を $SP_n$ とおく. $\boldsymbol{\nu} \in SP_n$ に対応する ([S16, 1911] での) スピン既約表現を $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ と書く. $\mathrm{sgn}_{\mathfrak{S}}$ を $\mathfrak{S}_n$ の符号表現とするとき, $\mathrm{sgn}_{\mathfrak{S}} \cdot \tau_{\boldsymbol{\nu}} \cong \tau_{\boldsymbol{\nu}}$, または, $\not\cong \tau_{\boldsymbol{\nu}}$, に従って, $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ を自己同伴または非自己同伴という. $\pi_{\boldsymbol{\nu}}$ が自己同伴であるための必要十分条件は, "$n-m$ が偶数" である.

序文. $\mathfrak{S}_n$ の線形既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ ($\boldsymbol{\lambda} \in P_n$) は, 整数環上の行列で, 実現出来る [S11]. しかし, スピン既約表現については, この種の研究は非常に難しい. そこで, $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ ($\boldsymbol{\nu} \in SP_n$) に対しては, 実数体上で実現出来るかどうかを問う. そこでは Frobenius-Schur [F75, 1906] の判定法 (2b) を使う.

**Satz I (in Introduction).** $\tau_{\boldsymbol{\nu}}$ が実数体上実現可能であるための必十条件は, $n - m \equiv 0, 1, 2, 6, 7 \pmod 8$, である.

系. $\mathfrak{S}_n$ のすべてのスピン既約表現が実数体上で実現可能であるのは, $n = 1, 2, 3, 9, 10, 11, 19$, に限る.

**Satz V (in §7).** 交代群 $\mathfrak{A}_n$ のスピン既約表現で, $\boldsymbol{\nu} \in SP_n$ に対応するものが, 実数体上実現可能であるための必十条件は, "$n - m \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$" である.

例 **7.1.**

| $n$ | $SP_n$　($n$ の厳格分割) |
|---|---|
| 5 | $(5),\ (4,1),\ (3,2)$ |
| 6 | $(6),\ (5,1),\ (4,2),\ (3,2,1)$ |
| 7 | $(7),(6,1),(5,2),(4,3),(4,2,1)$ |
| 8 | $(8),(7,1),(6,2),(5,3),(5,2,1),(4,3,1)$ |
| 9 | $(9),(8,1),(7,2),(6,3),(6,2,1),(5,4),(5,3,1),(4,3,2)$ |
| 10 | $(10),(9,1),(8,2),(7,3),(7,2,1),(6,5),(6,4,1),(6,3,2),(5,4,1),(5,3,2),(4,3,2,1)$ |
| 11 | $(11),(10,1),(9,2),(8,3),(8,2,1),(7,4),(7,3,1),(6,5),(6,4,1),(6,3,2),(5,4,2),$ $(5,3,2,1),(5,4,2),(5,3,2,1)$ |
| 12 | $(12),\ldots,(5,4,2,1)$ |
| 13 | $(13),\ldots,(5,4,3,1)$ |
| 14 | $(14),\ldots,(5,4,3,2)$ |
| 15 | $(15),\ldots,(5,4,3,2,1)$ |
| 16 | $(16),\ldots,(6,4,3,2,1)$ |
| 17 | $(17),\ldots,(6,5,3,2,1)$ |
| 18 | $(18),\ldots,(6,5,4,2,1)$ |
| 19 | $(19),(18,1),(17,2),(16,3),(16,2,1),(15,4),(15,3,1),(14,5),(14,4,1),(14,3,2),$ $(13,6),(13,5,1),(13,4,2),(12,7),(12,6,1),(12,5,2),(12,4,3),(12,4,2,1),(11,8),$ $(11,7,1),(11,6,2),(11,5,3),(11,5,2,1),(11,4,3,1),(10,9),(10,8,1),(10,7,2),$ $\ldots,(9,4,3,2,1),(8,5,3,2,1),(7,6,3,2,1),(7,5,4,2,1),(6,5,4,3,1)$ |
| 20 | $(20),\ldots,(6,5,4,3,2)$ |
| 21 | $(21),\ldots,(6,5,4,3,2,1)$ |

# 参考文献

Frobenius 全集での論文番号 53 は [F53] と記し，Schur 全集での論文番号 4 は [S4] と記す．

**[Bena,1976]** M. Benard, Schur indices and splitting fields of the unitary reflection groups, J. Algebra, **38**(1976), 318-342.

**[Dede]** R. Dedekind, Über einem arithmetischen Satz von Gauß, Mitteilung der Deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag, **1892**, pp.1–11 (Werke **2**, 28–38).

**[F53]** F. Frobenius Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.985–1021.

**[F54]** —, Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.1343–1382.

**[F56]** —, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1897, pp.944–1015.

**[F60]** —, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichle der Königlich Preußifchen Akademie der Wissenshaften zu Berlin 1900, pp.516–534.

**[F61]** —, Über die Charaktere der alternierenden Gruppe, Sitzungsberichle der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin 1901, pp.303–315.

**[F68]** —, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1903, pp.328–358.

次の [F75], [F76] は，Schur との共著（Frobenius 全集第 3 巻より）

**[F75]** —, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin 1906, pp.186–208.

**[F76]** —, Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1906, pp.209–217.

**[S1]** J. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

**[S4]=[Sch1]** J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **127** (1904), 20-50.

**[S6]** J. Schur, Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.77–91.

**[S7]** I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.406–432. [§2 に **Schur の補題** あり]

**[S9]** I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.164–184. [**Schur index** の研究]

**[S10]=[Sch2]** J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **132** (1907), 85-137.

**[S11]** I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.664–678.

**[S14]** I. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, American Mathematical Society Transactions, **10** (1909), 159–175.

**[S16]=[Sch3]** J. Schur, Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **139** (1911), 155-255.

（注： [S4], [S10], [S16] は射影表現三部作である）

**[S58, 1927]** J. Schur, Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind, ibid., **158** (1927), 63–79.

**[You1, 1901]** A. Young, Quantitative substitutional analysis, Proc. London Math. Soc., **33**(1901), 97–146.

**[You2, 1902]** A. Young, Quantitative substitutional analysis (2nd paper), Proc. London Math. Soc., **34**(1902), 361–397.