Abstract

## Short history of large numbers

Suzuki Shinji

This paper primarily aims to depict a history of large numbers in the 20th century through the developmental viewpoint of the theory of computation. In this context, the Ackermann function, Goodstein function, Busy-Beaver function, and Knuth's up-arrow notation are properly positioned. In addition, this paper presents some unique and interesting findings that are listed as follows:

1. The guiding principle of the modern theory of large numbers, "the method of expressing large numbers boils down how to find the fast growing functions, and such functions are constructed by the iteration whose mechanism is regulated by the ordinal numbers," was first given by J.E. Littlewood, who also had the prototype of the fast-growing hierarchy.
2. The scientific notation (a $\times$ $10^{\pm n}$) was created in 1862 by Ernest Esselbach, who was a well-known 30-year-old electrician. As a result, it had an impact on J.C.Maxwell. I revealed the reason why more than 200 years after the announcement of Cartesian exponential notation the invention of this concise and meaningful notation was needed.
3. According to David Gregory's book "The Elements of Astronomy, Physical and Geometrical," which was translated by E.Halley and published in 1715, "Magnus Annus" has been estimated to be 25,000 or 26,000 years. Although he was a professor of mathematics at the University of Edinburgh, Savilian Professor of Astronomy at the University of Oxford, and a commentator on Isaac Newton's Principia, his estimates were nearly similar to those of the ancient and too small according to the current common sense.
4. There is a possibility that "The Sand Reckoner" by Archimedes had an impact on the Lotus Sutra. (It was reprinted in part from my paper in 2013.)

Moreover, a variety of interesting articles related to the history of large numbers, which are not original researches of the author, are listed in this paper. e.g.

5. In ancient Babylonia, large numbers such as $3^{92}$, $9^{11} \cdot 12^{39}$, which are rarely used even now, had been calculated precisely at 60 hexadecimal notation.

Furthermore, the comparison problem of historically famous large numbers (Graham's number, Steinhaus number, Ackermann number, etc.) that cannot be represented with an exponential notation is listed in the Appendix with proofs.

# 巨大数小史

## 有限と無限の狭間の揺らぎ

鈴木　真治[1]

### 目次



---

1 2016 年 1 月 30 日投稿　suzuki-zeta.888@gol.com

# 0 はじめに

巨大数は，無限と同様に，太古から多くの人々を魅了し続けて止まない人気のテーマの一つである．ところが，無限論が，現在においても真っ当な専門書[2]から啓蒙書[3]，果ては哲学書[4]に至るまで幅広く新著が出版され続けているのに対し，巨大数論を主題とした邦書を寡聞にして著者は１冊しか知らない[5]．後はせいぜい，数学者のエッセイ集の１トピック[6]として紹介されているか，比較的小さな記事[7]が，発表されているくらいではなかろうか．このような差が生まれた最大の理由は，無限が，数学の発展において不可欠な概念であり続けて来たと云う歴史的重みと，門外漢からの安易な接近を拒む深淵を内包しながら発展を維持しているのに対し[8]，巨大数の方は，一見，鬼面人を嚇すと云った意外性から歴史的に語り継がれているものがあるにしても，現代数学はそれを必要とせず，将来も必要とされることはないと考えられているからかもしれない．本質論から比較するなら，無限が，多様性を保持しつつも，数学的に明確な定義が与えられるようになったのに対し，巨大数に対しては，精確で有効な定義がないことが致命的な差であろう．このような対象を，大抵の数学者は，研究対象にはしたがらないからである[9]．

一方，グーゴロジスト（巨大数愛好家）と呼ばれる人々が，主にネットの世界[10]で，様々な巨大数を発表し，競争し合うと云う面白い現象が起こっている．彼らの問題意識は，基本的には，具体的な問題から離れて，ひたすら「効率的により巨大な有限の数を体系的に定義する方法を考案する」ことにあり，何となく江戸時代の和算家達を彷彿させるものがある．

---

2 例えば，『巨大基数の集合論』[Kanamori]

3 例えば，『無限を読み解く数学入門』[小島]，『なっとくする無限の話』[玉野]

4 例えば，『無限 その哲学と数学』[Moore]，『無限論の教室』[野矢]

5 一応，『大きな数』[Davis]があるが，原書第一版が 1961 年であることもあり，当然，クヌースやコンウェイの表記方法は疎か，グラハム数にも言及されていない．日本語訳版の最後にスタインハウスのメガとモーザー数について脚注で触れられている程度であるから，現代的な巨大数論としては，啓蒙書のレベルであっても不十分と言わざるを得ない．

6 例えば，『リトルウッドの数学スクランブル』[Littlewood]，『数のエッセイ』[一松]

7 例えば，『超巨大数への挑戦.』[Crandall]

8 例えば，上記の『巨大基数の集合論』に対し，次のような感想を述べる数学者もいる．「専門家以外には決して読破できないが，現代集合論の最先端の息吹が感じられる」『なっとくする無限の話』[玉野]

9 「大ていの数学者は，論駁の余地なく一刀両断に問題の解決ができそうもないと見てとると論争に入っていかない」『ブルバキ数学史』[Bourbaki]p.38

10 少なくとも，2016 年 1 月 27 日現在，英語，日本語，フランス語，ドイツ語，オランダ語，中国語版の「巨大数研究 Wiki」がある．

著者は，当初，このような問題意識に対し，どちらかと言えば否定的で，「問題のための問題を解こうとしている」ように捉えていた．しかし，「数と無限の多面的アプローチ」を主たる研究テーマにしている関係上，擬無限としての「巨大数」は，無視できない存在であった．そこで，断続的に巨大数の歴史を調べていたのだが，ここからビジービーバーと云うチューリングの停止問題とも関連のある非常に興味深い関数や第一不完全性定理の具体的な例ともなったグッドステイン数列の終結定理，非原始帰納関数の典型例であるアッカーマン関数，証明論や計算理論に現れる急増加階層(F.G.H)とも密接に関わっていることを知るに及んで見えていた風景が一変した．20 世紀以降の巨大数の歴史は，このような文脈のなかで，計算理論の発展 — 原始帰納関数から多重帰納関数の発見，一般帰納関数への拡張，計算可能関数との同定，非計算可能関数の発見等 — を主軸に添えて，様々な表記方法の創出と具体的問題への応用を付記しつつ語られるべきものと考えるようになった．

このような状況を想起するならば，標準的なカッツの数学史でもテーマ別に編集されているオックスフォード数学史でも，巨大数が全く触れられていないと云う過小評価振りには，違和感を持たずにはいられない．世の中には，既に数多の数の歴史本 — 「無理数の歴史」，「零の発見」，「π の歴史」，「不思議な数 e の物語」「負の数学」，「虚数の歴史」，「小数の歴史」，「指数と対数」，「素数の音楽」… — があるのだから一つくらい正面から「巨大数の歴史（古代から 20 世紀）」を論じたものがあっても良いのではないか，と感じたことが本論執筆の最大の動機である．

本論を書くにあたって事前に課した制約として，グーゴロジストが最も興味を持つであろう現在の巨大数の状況については触れないことと，逆に，彼らの興味の射程外と思われる理念的なボレルによる到達不能数やヴィドゲンシュタインのパラドックス，ミシェルスキーの巨大定数を含んだ自然数論に言及することであった．前半部分の制約は，著者自身がその分野に不案内であり，かつネット上に既にいくつもの力作[11]が掲示されていること，及びその多くが今世紀に入ってから発表されたものであり，「歴史」として語るには未だ新しすぎる話題だと思われたからである．後半部分は，巨大数を「有限と無限の狭間の揺らぎ」として捉えたい著者の志向性から

[11] 例えば，量子コンピュータ複雑性理論学者の Scott Aaronson 氏の HP にある "Who Can Name the Bigger Number?" http://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html や Robert Munafo 氏の HP 上の "Large Numbers" http://www.mrob.com/pub/math/largenum.html にある関連リンクを参照のこと．
日本語では，巨大数研究 Wiki, http://gyafun.jp/ln/が詳しい．
ネット上の巨大数論にも巨大数の歴史は掲示されているが，本論では，これらのネット情報で入手できるものは簡単に触れるに留め，独自の内容に力点を置くように努めた．

は，どうしても触れておきたいテーマであったことによる．

また，本来の数学史からは若干外れるかもしれないが，附録において，ギネス登録されていることから歴史的に有名であり，しばしば巨大数の代名詞として扱われることの多いグラハム数と，出自を全く異にする他の巨大数であるアッカーマン数，スタインハウス数との比較証明を与え，F.G.H による巨大数規模の計量化の初歩を説明しておいた．

一般には，際物扱いにされがちな巨大数の魅力を，どこまで引き出せたかは心もとない限りではあるが，本論を読まれて巨大数史に興味を感じていただけたなら，著者の喜びはこれに勝るものはない．

**【読者への注意 1】**

本論の主旨は，上述の通りであるが，読者諸子への便宜を考え，本論で扱っている巷説とは異なる歴史的事実や邦書では触れられる機会の少ない話題を中心に，設問形式で列記しておいた．適宜参照・活用されたい．

(1) **アルキメデス**が有名な「砂の計算者」を書く前に，$\mathbf{3^{92}}$や$\mathbf{9^{11}\cdot 12^{39}}$と云う驚く程巨大な数を精確に計算していた人々がいた．それは誰か？

第 1 章第 1 節参照

(2) 紀元前 8 世紀頃，**古代ユダヤ**では**60 万を超える数**が旧約聖書に記されているが，現在の聖書学では，それは誤読によるものであったとする説が有力である．それはどの部分か？

第 1 章第 2 節参照

(3) 巨大な数や微小な数を簡潔に表現出来る**科学的表記（指数表記とも言う：$\boldsymbol{a\times 10^n}$）**は，現在では自然科学のみならず，社会科学やビジネスの世界でも不可欠な表記方法であるが，この表記方法は，いつ，誰が，どのような理由で始めたのか？ 但し，デカルトではない．

第 6 章第 2 節参照

(4) 現在，**数字を 3 桁毎にカンマで区切ること**の表面な理由は，国際度量衡会議での決議によるが，そのような取決めになった根本的な原因は，カエサルがヨーロッパを制圧したことにある．もし，アルクサンダーが先に制圧していたら，4 桁毎にカンマで区切ることになった可能性が高い．(そうなっていれば，日本や中国にとっては好都合だったのだが)

第 4 章第 2 節参照

(5) **永劫回帰**は，古代から語り続けられてきたメジャーな思想の一つであ

るが，具体的に何年後に世界が再スタートするかについては，インドの**劫（カルパ）**のような比喩的なものを除けば，現在の眼から見ると，驚く程小さく見積もられていた．例えば，ハレーが活躍していた時代のオックスフォード大学の天文学教授は，この期間をどの程度と見積もっていたか？

第 5 章第 3 節参照

(6) 力学系理論では，ポアンカレの回帰定理に基づく回帰期間を**ポアンカレ周期**と呼んでおり，これを現代版永劫回帰期間と解釈することも出来る．歴史上，初めてポアンカレ周期の具体的な評価式を与えて，物理学の問題に適用したのは誰か？

第 5 章第 3 節参照

(7) ディラックは，陽子と電子の間に働くクーロン力と万有引力の比が，宇宙の直径とほぼ同じ程度の大きさであることに注目して，「**巨大数仮説**」を 1937 年に提唱した．ところで，この不思議な一致を最初に注意したのは誰か？　但し，ディラックではない．

第 5 章第 2 節参照

(8) **原始帰納関数**は，デデキントの歴史的名著「数とは何か，そして何であるべきか」(1888 年) で初めて定義されたとされることが多いが，実は，二人の先駆者がいた．それは誰か？

第 8 章参照

(9) 1925 年，ヒルベルトは加法，積，冪，超冪…よりも能率よく大きくなるある具体的な関数が，原始帰納関数ではないと予想した．3 年後に弟子のアッカーマンが，この関数がいかなる原始帰納関数よりも増加スピードの速い関数，いわゆる**アッカーマン関数**，であることを証明することでヒルベルトの予想を肯定的に解決した．彼の証明は，本質的には対角線論法であったが，彼の証明の 50 年以上も前に，対角線論法を使って，可算個の増加関数列に対して，そのどれよりも増加スピードの速い関数を構成して見せた数学者がいた．それは誰か？

第 8 章第 1 節参照

(10) 19 世紀後半，カントールの実無限とは別の意味で「実無限」を標榜し，系統的に研究した数学者がいた．それは誰か？

第 8 章第 5 節参照

(11) アッカーマン関数は，2 重帰納関数だが，より増加スピードの速い**多重帰納関数**（3 重，4 重…）を定義し，系統的に研究していた研究者がいた．それは誰か？

第 8 章第 1 節参照

(12) $\mathrm{H}_0(a,b) = a+1$ 後者関数(successor)

$\mathrm{H}_1(a,b) = a+b$ 加法関数(addition)

$\mathrm{H}_2(a,b) = a \cdot b$ 乗法関数(multiplication)

$\mathrm{H}_3(a,b) = a^b$ 冪指数関数(exponentation)

$\mathrm{H}_n(a,b) = \mathrm{H}_{n-1}\big(a, \mathrm{H}_n(a,b-1)\big)$ $(n \geq 4,, b \neq 0)$

$= 1$ $(n \geq 4, b = 0)$

によって通常の 2 項演算の拡張を原始帰納関数として定義した数学者は誰か？

また，$n=4$ の演算に対し **tetration**，$n=5$ に **pentation**，$n=6$に **hexation** と名付けた数学者は誰か？

第 8 章参照

(13) **順序数定理**「順序数の減少列は，必ず有限回で終結する」を利用して作られた超高速増加関数がある．これは何という関数か？

第 8 章第 2 節参照

(14) 傑出した解析学者**ラドー**は，晩年，**いかなる計算可能な関数よりも増加スピードの速い計算不能関数**を定義した．その関数はなんと呼ばれているか.

第 8 章第 3 節参照

(15) **ハーディー**が，対角線論法を使って構成した急増加関数の族をなんというか？

第 8 章第 4 節参照

(16) 人間の持つ有限性に起因する「**到達不能な数**」は存在すると主張する数学者がいた．それは誰か？

第 9 章第 5 節参照

(17) **リトルウッド**は，巨大過ぎて表現出来ないような数については，それが本当に必要になれば，数学者は，なんとかして対応することが出来ると考えた．彼がそのように考えた根拠は何か？

第 8 章第 4 節，第 9 章第 5 節参照

(18) 1960 年代に，**『非有限集合』と『無限集合』が区別され得る**ことを注意した日本の基礎論学者がいた．それは誰か？

第 9 章第 5 節参照

(19) クリプキが，「**ヴィドゲンシュタインの背理**」で展開した「クワス算」を彷彿させるような手法で巨大定数を公理として導入した基礎論学者がいる．それは誰か？

第 9 章第 4 節参照

(20) いくつかの有名な巨大数の大小関係

$A(4,4)$＜googol＜アルキメデスの巨大数＜不可説不可説轉＜
googolplex＜スキューズ数＜スタインハウスの mega＜
$3\uparrow^3 3$（tori-tori）＜$A(5,5)$＜モーザー数＜**アッカーマン数**＜
**スタインハウス数**＜**グラハム数**　但し，$A(x,y)$はアッカーマン関数.

附録 3.参照

**【読者への注意 2】**

本文中に散見する「ボルツマン(52)はツェルメロ(25)の異議申立に反論した.」のような名前の後の括弧数字は，そのときの年齢を指すものとする.

# 1 古代の巨大数

古代の巨大数と言えば，たいていの場合，アルキメデスの巨大数について語るところから始めるのが常である．実際，アルキメデスのこの分野での業績は傑出していて，彼を抜きにして巨大数史を語ることは不可能とさえ思われる．しかしながら，アルキメデス以前に，巨大数が全くなかったのかと言えばそんなことはない．ここでは，邦書ではあまり目にすることのない二つの巨大数を取り上げておく．

## 1.1 バビロニアの巨大数

高度な計数能力を持つ書記官たちを多数擁する古代バビロニアでは，$3^{92}$や$9^{11}\cdot 12^{39}$と云った[12]，現在でも滅多に使用されることのないような巨大数が，精確に 60 進法表記で計算されていた.

次に示す連結粘土板の最初の二つの図は，ヨラン・フライベルグの著書[Friberg:2007,p.457]から引用したものである．この連結粘土板は，後期バビロニア/セレウコス朝(B.C.305-141)に作成されたもので，サックスのLBAT[Sachs]で no.1644 として，1955 年に公開された.

この連結粘土板は，ジョン･ブリットンやヨラン・フライベルグといった研究者の永年の努力により，前世期末になってようやく解読された．そ

12 [Ossendrijver]によれば「古代で最長(書き下した数の表示の長さのことを意味していると思われる)」の巨大数である．最大としないのは，恐らく，やや理念的に表示されたアルキメデスの巨大数があるからであろう.

れは高度な推理力と計数能力と根気強さが要求されるものであった．詳しくは，彼らの著書や論文を紐解いてもらうとして，ここでは解読結果を下表に簡単にまとめておいた．尚，図中の３種類の下線は，下記のまとめ図との関連性を見やすくするために著者が付したものである．

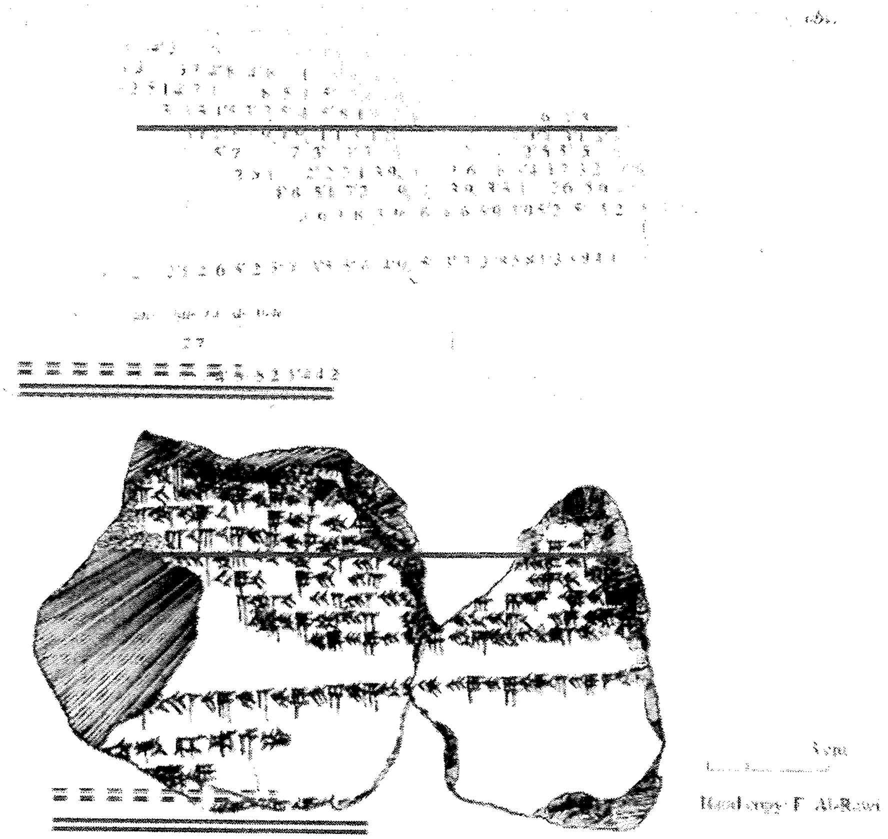



Fig. A9.4. BM 34601. An algorithm for the computation of the square of the square of a 7-place number.

| | |
|---|---|
| | 4 04 17 40 45 13 17 45 52 14 42 12 09 |
| × | |
| 4 | 16 17 10 43 00 53 11 03 28 58 48 48 36 |
| 04 | 16 17 10 43 00 53 11 03 28 58 48 48 36 |
| 17 | 1 09 13 00 32 48 46 01 59 48 09 57 26 33 |
| 40 | 2 42 51 47 10 08 51 50 34 49 48 08 06 00 |
| 45 | 3 03 13 15 33 54 58 19 24 11 01 39 06 45 |
| 13 | 52 55 49 49 47 52 50 56 19 11 08 37 57 |
| 17 | 1 09 13 00 32 48 46 01 59 48 09 57 26 33 |
| 45 | 3 03 13 15 33 54 58 19 24 11 01 39 06 45 |
| 52 | 3 31 43 19 19 11 31 23 45 16 44 34 31 48 |
| 14 | 57 00 07 30 33 06 08 42 11 25 50 50 06 |
| 42 | 2 51 00 22 31 39 18 26 06 34 17 32 30 18 |
| 12 | 48 51 32 09 02 39 33 10 26 56 26 25 48 |
| + 09 | 36 38 39 06 46 59 39 52 50 12 19 49 21 |
| | 16 34 39 52 40 21 26 52 57 35 56 49 50 37 38 58 13 38 04 44 57 15 03 37 21 |

粘土板で判読出来た数値は下線付
その他は推測値

学生が誤って複写時に飛ばした3行

$16 \times 60^{24} + 34 \times 60^{23} + \cdots + 37 \times 60^{1} + 21 \times 60^{0} = 3^{92}$

・・・・・・*ta-am-hu-ra-a-tum*
(「平方数」の複数形)

2 01 04 08 03 00 27 ⇒ $2 \times 60^{6} + \cdots + 00 \times 60^{1} + 27 \times 60^{0} = 3^{23}$

4 04 17 40 45 13 17 45 52 14 42 12 09 ⇒ $4 \times 60^{12} + \cdots + 12 \times 60^{1} + 09 \times 60^{0} = 3^{46}$

実は，このような巨大な指数計算が，他の粘土板でも発見され，そこでも同じく$3^{92}$が計算されていたことが，近年になって確認された．2014年の報告論文[Ossendrijver]の中で，同じ巨大指数が計算されている理由について，両方の粘土板が同じ書記官によって書かれた可能性が大いにある，とコメントされている．更に，別の粘土板では，復元の結果，$9^{11}\cdot12^{19}$から$9^{11}\cdot12^{39}$までの計算がされていたことが明らかになった．これは当時の数理的天文学の必要性を大幅に上回るもので，後期バビロニア純粋数学の一つの到達点と言って良かろう．

## 1.2 ユダヤの巨大数

旧約聖書の出エジプト記や民数記には，当時のイスラエルで兵士になれる成人男性の数が，603,550人であったと記載されている．これは，旧約聖書の中に現れる最大の数なのだが，その数字を額面通り受け取るのは，宗教的信仰心だけを拠り所とするならともかくとして，歴史的には，以下に述べるように，いろいろと問題がある．

民数記[13]はモーゼの五書の一つで，もともとは口承によって受け継がれ，早くても紀元前8世紀頃になってから文字に落とし込まれたものと考えられている．アルキメデスが活躍した紀元前3世紀頃のギリシャでも，せいぜい1万までしか数単位を持っていなかったことを考えれば，当時としては相当大きな数であったものと推察される．もちろん，この当時は，未だアラビア数字は現れていない．彼らがどのような表記方法でこの巨大な数を表現したかは，興味を惹かれる話題であろう．実は，彼らは，バビロニア人ともエジプト人とも違う方式，アルファベットで数を表す方式を採択していた．この方式は，大きな数を表すには恐ろしく不便な方法であったが，なぜかギリシャ人もヘブライ方式を踏襲している．以下に，民数記第1章46節の部分だけを示しておく．ヘブライ文字は，右から左に読む．従って，最初の2文字は「46」を表す．対応をとるため単語毎に訳語の日本語も右から左に書いておいた．参考として下に付記した数表を見るとこれがמו(ﾒﾑ ｳﾞｧｳﾞ)であることが，見て取れるであろう．

尚，下記のヘブライ語の読み方と文法的注釈は，『ヘブライ語聖書対訳シリーズ7　民数記Ｉ』[ﾐﾙﾄｽ]による．

---

[13] もともとのヘブライ語ではבמדבר（荒野にて「ベミドゥバル」）であったが，旧約聖書の最古のギリシャ語訳である「七十人訳聖書」でἈριθμοί（数「アリスモイ」）と訳されたことから，このような書名になった．英語ではNumbersと訳されている．

מו וַיִּהְיוּ, כָּל- הַפְּקֻדִים--שֵׁשׁ-מֵאוֹת אֶלֶף, וּשְׁלֹשֶׁת אֲלָפִים;

ムーィフらア　トッエシろュシウ　フれエ　トッオメ　ュシェシ　ムーィデクペハ　るコ　ーユフイァヴ

千　三と　千　百　六　は達者たれられ入に数　のて全　たっあで〜てしそ　六四

男複　連数・接　単男　複女　連数　複男分受・パ・冠　連単男　複男３未・パ・倒

וַחֲמֵשׁ מֵאוֹת, וַחֲמִשִּׁים.

ムーシミはァヴ　トッオメ　ュシッメはァブ

十五と　百　五と

数・接　複女　連数・接

46　その数えられた者は合わせて六十万三千五百五十人であった．

『聖書［口語］』日本聖書協会(1955 年)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | א アレフ | 6 | ו ヴァヴ | 20 | כ カフ | 70 | ע アイン | 300 | ש シン |
| 2 | ב ベート | 7 | ז ザイン | 30 | ל ラメド | 80 | פ ペー | 400 | ת タヴ |
| 3 | ג ギーメル | 8 | ח ヘット | 40 | מ メム | 90 | צ ツアデイー | 500 | ת"ק タブ クフ |
| 4 | ד ダレット | 9 | ט テット | 50 | נ ヌン | 100 | ק コフ | 600 | ת"ר タブ レッシュ |
| 5 | ה ヘー | 10 | י ヨッド | 60 | ס サメフ | 200 | ר レーシュ | 700 | ת"ש タブ シン |

実は，この巨大数については聖書学で様々な解釈が，昔から並立しているのだが，素直にその数字をそのまま受け入れようとする研究者は，むしろ少数派であることは注目に値する[14]．参考までに，異なる学説による主な解釈のいくつかを，コリン・ハンプリーズ[Humphreys]に従って，以下にまとめておく：

(1) この数字は精確である．

(2) この数字は精確であるが，だいぶ後の時代，例えばダビデの時代，の人口を表している．

(3) “千”と訳されているヘブライ語の単語('lp)は，誤訳されてきたもので，本来は“族”，“群”または“団”と訳すべきだった．

(4) この数字は，天文暦に基づくものである．

---

[14] 七十人訳ギリシャ語聖書からの単独翻訳を試みられている宗教学者の秦剛平氏は，603,550 人について，次のような注釈を付している．「この数は，ギリシャ語訳出エジプト記 39-3(ヘ⇒エジプト記 38-26)と一致する．後出 26-51 は，登録された数を 60 万 1730 とする．なお，出エジプト記 12-37 は，女・子供を別にした出エジプトのイスラエルの子らの概数を『約 60 万』とする．いずれも奇想天外で荒唐無稽な数字．」[秦]

(5) この数字は，象徴であり，ゲマトリアに基づいている．つまり，それぞれのヘブライ語のアルファベット文字に，数値が与えられている．
(6) この数字は，全くの創作であり，神学的な目的を果たすためにかなり誇張されている．

(3)が最も信憑性が高いとされている．例えば，フリンダース・ピートリー[15]は，ルーベン族の数が 46,500 人である（民数 1 章 21 節）として翻訳された場合について，正しくは，500 人の成人男性を含む 46 家族である，と翻訳すべきだった，と示唆している．

確かに，数学史の立場からも，この当時のユダヤ人の計数能力が，円周率を 3 であると見なす程度であったことを考慮するならば[16], 60 万以上の数字を正確に数えられたかどうかには，再考の余地があるかもしれない．

# 2 アルキメデスの 4 つの巨大数

前章でも触れたが，巨大数史でアルキメデスを避けるわけにはいかない．しかし，著者は，本件に関して，とりたてて，目新しい話題を持たないので，主な結果だけを列記するに留めることにする．[17]

## 2.1 砂の計算者

アルキメデスは，『砂の計算者』と云う論文で，宇宙空間を埋め尽くす砂粒の数を，現代の表記で，$8\times10^{63}$ であると試算している．この当時，指数法則は原論にそれとなく潜んではいたが，これを巨大数表現のためのツールとして捉え，

$$(10^{8\times10^8})^{10^8}$$

までの数を定義して見せたのは，アルキメデスの傑出した才能の発露である．これは，日常的な計算技術である「算術（ロギスティケー）」を商人

---

[15] Sir William Matthew Flinders Petrie(1853.6.3 – 1942.7.28)イギリスにおけるエジプト学の第一人者．

[16] また海を鋳て造った．縁から縁まで十キュビトであって，周囲は円形をなし，高さ五キュビトで，その周囲は綱をもって測ると三十キュビトであった．(列王記上 7−23)
『聖書［口語］』日本聖書協会(1955 年)

[17]『ギリシヤの科学（世界の名著 9）』[田村],『解析入門　アルキメデスからニュートンへ.』[Hahn],『数のエッセイ.』[一松],『解読　アルキメデスの写本』[Netz]

や職人が使う野卑な技芸と見なしたギリシャ数学では，非常に特異なことであり，彼が若い頃にアレクサンドリアに留学して，プラトン主義的数学観とは異なる，実学を下賤なものとして切り捨てない文化に接していたからではないか，[18]と考えられている．

## 2.2 牛の問題

アルキメデスは，エラトステネス宛ての手紙の中に，エピグラム（寸鉄詩）の様式で，興味深い問題を提示した．現在の方程式に翻訳しておくと，白，黒，斑色，黄の牛の牡の数をそれぞれ W,X,Y,Z,牝の数を w,x,y,z としたとき，次のような不定方程式となる．

$$W = Z + \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right\}X \qquad X = Z + \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right\}Y \qquad Y = Z + \left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right\}Y$$
$$w = \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right\}(X + x) \qquad x = \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right\}(Y + y) \qquad y = \left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right\}(Z + z)$$
$$z = \left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right\}(W + w)$$
$$W + X = 17826996k \quad \text{は完全平方数} \quad Y + Z = 11507447k \quad \text{は三角数}$$

これを解くことは，ペル方程式を解くことに帰着され，連分数による一般的解法も判っているから，理論的には解けることは明らかである．但し，実際に実行するとなると，凄まじい労力を要する．1889 年から A.H.ベル主催のイリノイ数学クラブが，4 年がかりで 206,545 桁の数になることを弾き出した．但し，1895 年の報告論文は，たったの 2 ページであった．

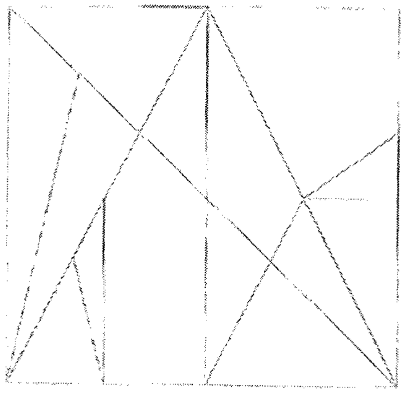
## 2.3 ストマキオン（アルキメデスの小筥（こばこ））

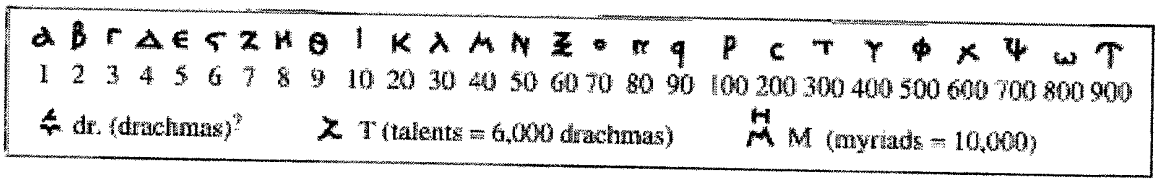
21 世紀に入ってから，ギリシャ数学史の研究者であるリベル・ネッツは，次頁の図とハイベアの解読した不完全な序文から，アルキメデスの真意が「同じピースを使って同じ正方形を作る方法は何通りあるか？」を問

[18] 一説によると，彼はインド数学を学んでいて，それで巨大な数を考察することに他のギリシャ数学者程抵抗がなかったと言われている．後節で触れるサンユッタ・ニカーヤ（阿含経　相応部）にある巨大数表現も紀元前 3 世紀頃のものであり，Archimedes が活躍した頃と大体一致する．

うことであることを突き止めた．

このアルキメデスの遺題に対し，コンピュータが弾き出した答えは，17,152 通りであった．先の二例と比較すると，大して大きくないと思いがちだが，この当時のギリシャ人が，1 万を意味するミリヤード(myriad)を超える数を表す用語を持っていなかったことを考えると，十分に巨大数と言って良かろう．そして，これが史上初の本格的な組合せ論の問題であったことも明らかになった．この事実は象徴的である．なぜなら，現在の数学で現れる巨大数の多くは，組合せ理論から生み出されているからである．





| α | β | γ | δ | ε | ϛ | ζ | η | θ | ι | κ | λ | μ | ν | ξ | ο | π | ϙ | ρ | σ | τ | υ | φ | χ | ψ | ω | ϡ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |

dr. (drachmas)[2]　T (talents = 6,000 drachmas)　M (myriads = 10,000)

Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics. [Friberg:2005] p.21

## 2.4 法華経への影響

本章第 1 節の脚注で，アルキメデスが，インド数学を学んでいた可能性があることについて触れたが，逆に，アルキメデスのこの傑出した論法が，インドでも知られていて，法華経のなかの巨大数表現に影響を与えた可能性があることを拙論[鈴木:2013]で触れた．但し，インド数学へのギリシャ数学，特にアルキメデスの数学，の影響についてのはっきりした定説はなく，叙上の説もあくまでも著者の仮説であることを注意しておく．[19]

[19] ギリシャ自然哲学が，インド自然哲学に与えた影響で，状況証拠はあるものの，確証にまでは至っていない例としては，アリストテレスの元素説とヴァイシェーシカ哲学の元素説の酷似性などがある．　『須弥山と極楽』[定方:1973] pp.94-96

| | アリストテレス | | | ヴァイシェーシカ哲学 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 感覚 | 運動 | 触覚 | 色 | 業 | 触 |
| 地 | 触 | 下降 | 冷・乾 | 色味香触 | 重体 | 不熱不冷 |
| 水 | 視 | 中間 | 冷・湿 | 色味触 | 重体 | 冷 |
| 火 | 嗅 | 上昇 | 熱・乾 | 色触 | 上昇 | 熱 |
| 風 | 聴 | 中間 | 熱・湿 | 触 | 水平 | 不熱不冷 |

ヴァイシェーシカ哲学だけではなく，仏教にも元素論や原子論があり，やはりギリシャ哲学との強い類似性が見られる．我々になじみの深い「五輪塔」や「卒塔婆」も，上記の四元素に「空」が加わって出来た「五大説」に由来するものと考えられている．

# 3 仏教やジャイナ教に現れた巨大数

仏教とジャイナ教は，始まりがほぼ同じ頃であり，教義も類似する点が多い．従って，巨大数の取り扱いについても，しばしば同じ用語を使用している場合がある．ここでは，仏教に現れる様々な巨大数を時間，空間，数，単位の視点から，その一部を紹介し，最後に，現代集合論を彷彿させるジャイナ教の無限階梯に触れておく．

## 3.1 劫（カルパ）

仏教では，巨大数に独特の比喩による定義付けが，与えられることが多い．例えば，大乗仏教の注釈書である『大智度論』巻第五には，次のような「劫（カルパ）」の定義が，述べられている．気の遠くなるような永い時間を表した，インド式巨大数表現の最高傑作の一つであろう．

> カルパの意味については，仏はこういう喩えを説いておられる． 四千里にわたる石の山に長寿の人がいて，百年を過ぎるごと，細くて軟らかい衣を持って来て，一度これを払い拭う．そのようにしてこの大石山が無くなってしまっても，一カルパの時間にはまだ尽きない[20]．あるいは，四千里もある大きな城の中に芥子の粒を満たし，ならして平らにしないでおく．長寿の人がいて，百年経つと一度来て，一粒の芥子を取って行く．こうして芥子が無くなっても，一カルパはまだ尽きない，と． 『大乗仏典1 大智度論』[梶山] p.113

初期の仏典『サンユッタ・ニカーヤ（『阿含経』相応部）』にも，同様の「劫」の定義が存在している．この経典は，5世紀頃に成立したと言わ

---

[20] 多くの本はこの部分が，「天女が3千年に一度天界から舞い降りてきて羽衣で須弥山を一撫でする．これを延々と繰り返して巨大な須弥山が無くなるのにかかる時間が，一劫である．」と云った表現になっている．著者も高校時代にそのように教わった記憶がある．個人的には，こちらの方が艶めかしさも与って，永劫の時間をより良く表しているように感じる．

一方，Littlewoodは，この大きく感性に訴える表現を無機的な指数表現に変換して，直観の危うさを次のように指摘している．

「大きさが1立方マイルで，堅さがダイアモンドの100万倍の岩がある．100万年に一度，聖なる人が岩のところに降臨して羽毛で撫でるがごとき一撫でをする．岩は最後には擦り切れてしまうのであるが，それまでに$10^{35}$年ほどかかる．これほど手間のかかる仕事の割には所要年数は思ったより短く，人口に膾炙している，無限の概念などというものは容易に覆されてしまうものだということが分る．」[Littlewood]

れているが，こちらの方が素朴でより原典に近いと思われる．

比丘よ，たとえば縦一ヨージャナ，横一ヨージャナ，高さ一ヨージャナの，割れ目がなく，空洞がない，一塊りの大きな岩の山があるとしよう．それを一人の人が百年を過ぎるごとに，カーシ産の布で一度ずつ撫でるとしよう．比丘よ，この方法によって大きな岩の山は，劫よりも早くなくなり，尽きるであろう．

『相応部経典第二巻』[中村]p.377

落語『寿限無』にでてくる「五劫のすり切れ」も，ここに由来する．

## 3.2 十萬億佛国土

長大な時間の比喩的表現が，極めて感性的なのに対し，巨大な空間の表現は，意外なほど理数的である．五世紀にヴァスバンドゥによって書かれた『倶舎論』から巨大数の一例として，風輪の周囲の長さを挙げてみよう．

先ず，長さの単位としてヨージャナ（由旬《ゆじゅん》）が設定される．これには諸説あるが，だいたい 7 キロメートルとされている．虚空に三重に重なった風輪，水輪，金輪が浮かんでいて，一番下の風輪の周囲が阿僧祇由旬であるとされる．つまり$7 \times 10^{56}$キロメートルである．巨大な数ではあるが，指数表記で表現してしまうと，それ程でもない，と感じられたのではなかろうか．これは，指数表記が極めて優れているからであって，これを使わずに，千，万，億，兆，・・・，阿僧祇と十倍十倍を実際に繰り返して行った昔の人々は，その大きさに驚倒したものと思われる．

これと似たような例として，阿弥陀経などに現れる「十万億佛国土」がある．経典は，我々の住む娑婆から西方に十万億佛国土離れた処に極楽浄土がある，と言っているのだが，この「十万億」の大きさによって，いかに遠いかを表現しているわけである．「十万億」はサンスクリット語の『無量寿経』によるとśata-sahasra-koti-nayuta の翻訳である．śata は 100，sahasra は 1000 を意味するのでśata-sahasra は十万となる．しかし，koti は 1 千万を意味し，nayuta が 1 千億を意味するので，koti-nayuta は，現在の命数法なら 1 垓となるべきところが，なぜか 1 億になっている．定方晟氏は「おそらく，当時，中国で常用されていた最高の数位名が億であったので（?），「十万億」で最大の数字を意味したのではないだろうか．」[定方:1974]と書かれているが，漢訳が現れた後漢の時代よりかなり前の春秋時代に，既に「億」，「兆」，「経」，「姟」が現れている．「十万姟」とすべきところを誤訳したのではなかろうか．

いずれにせよ，原義に戻って指数表現を与えると$10^{26}$，万進法であらわ

しても百秭であり，アボガドロ定数の千倍にも満たない大きさであって，それほど巨大な数とは感じられない．

なまじ理数的であるが故に，現在の指数表記による換算が，簡単に出来てしまい，結果として，その巨大性が，それほどでもないことが透けて見えてしまったと言えるだろう．

## 3.3 恒河沙

永い時間を表していた「劫（カルパ）」に対し，大量の数を表すインド的表現としては，「恒河沙」（ガンジス河の砂）が有名である．平安時代初旬（823 年頃）に書かれた『日本霊異記(にほんりょういき)』に，既に次のような使用例（千手経を念誦する修行者を毆打し悪死の報いを得る話）がある．[21]

> 大神咒[22]は，乾枯れたる樹すら枝柯華菓を生ずること得．若しこの咒を謗る者があらば，すなはちそれは九十九億の恒河沙の諸佛を謗るとなす　　『日本霊異記』[板橋] p.159

恒河沙は，『宇津保物語』(980 年頃)をはじめ，本節の最後で紹介する『平家物語（維盛入水より）』（1309 年頃）や『今昔物語』（1100 年頃），近年では『俊寛』（1921 年，芥川龍之介著），『悟浄出世』（1942 年，中島敦著）にも使用されており，更に，雑誌，歌集からソフト会社や NPO の名前にに至る迄，様々な分野での引用が散見（2016 年現在）される．このように，純粋な数詞として使用は最早ないが，漠然とした無際限性を表す仏教用語として，現代においても死語とならず，社会性を保持し続けている．

厳密な数詞としての恒河沙は，現代の漢字文化圏では $10^{52}$ を指すとするのが通説である．中国での数の単位としての初出は，元の朱世傑(しゅせいけつ)による数学書『算学啓蒙(さんがくけいもう)』（1299 年）[23]であり，日本では吉田光由(よしだみつよし)(29)による和算のベストセラー『塵劫記(じんこうき)』(1627 年)である．しかし，インド的巨大数にはそのよ

[21] 著者は，この用例を多くの古典作品を検索機能で調査することで見つけたのだが，『日本国語大辞典』でも同じ例文が，「恒河沙」の最初の用例として採用されていた．この辞典の用例の選択の基準から言えば，「もっとも古いと思われるもの」と云うことになろう．但し，この辞典と雖も盲信すべきではない．[鈴木:2013]参照

[22] 千手陀羅尼

[23] 『算学啓蒙』上巻 p.12 に「一十百千萬・・・萬萬極曰恒河沙萬萬恒河沙曰阿僧祇・・・」との記述がある．

うな機能的な指数表現は，似合わない．ジャイナ教の経典『バガヴァティー・スートラ』や大乗仏典の『金剛般若経』には，次のような説明がある．

7つのガンジス河(の砂の数)は一つのマハーガンジス河(の砂の数)に等しい．7つのマハーガンジス河(の砂の数)は1つのサーディーナガンジス河(の砂の数)に等しい．7つのサーディーナガンジス河(の砂の数)は1つのマチュガンジス河(の砂の数)に，7つのマチュガンジス河(の砂の数)は1つのローヒヤガンジス河(の砂の数)に，1つのローヒヤガンジス河(の砂の数)は1つのアーヴァティーガンジス河(の砂の数)に，7つのアーヴァティーガンジス河(の砂の数)は1つのパラマーヴァティーに等しい．したがって，後者(パラマーヴァティー)はガンジス河(の砂の数)の7の7乗倍[24]か又は117,649個のガンジス河(の砂の数)に等しいことになる．百年に一度，その河底から砂粒を一つ取り除いたとして，砂が完全になくなるのにかかる時間が1サーラである．そして30万サーラが1マハーカルパに等しい．

『バガヴァティー・スートラ』[Basham]p.254（拙試訳）

世尊が問われた．
「スプーティよ，どう思うか．大河ガンガーにある砂の数と同じだけ，ガンガー河があるとしよう．それら（すべて）にある砂の数もまた多いと言えるだろうか．」

『金剛般若経』[長尾]第11節

やはり，インド的巨大数は，このような比喩的定義こそが真骨頂である．巨大なガンジス河を微小な砂粒で測ると言う行為は，極大世界を極小元素に還元して理解する方法とも考えられる．インド世界観を見事に反映した計数方法とも言えよう．

最後に巨大数が，文学の世界に美しく溶け込んだ有名な例をあげておく．その姿を光源氏にたとえられた平家の貴公子平維盛の入水シーンである．

無二の懇念をいたして，若しは一返も，若しは十返も唱へ給ふ物ならば，弥陀如来，六十万億那由多恒河沙[25]の御身をつづめ，丈六八尺の御形にて観音・勢至，無数の聖衆，化仏菩薩，百重千重に囲繞し，伎楽歌詠じて，唯今極楽の東門を出でて来迎し給はむずれば，御身こそ蒼海の底に沈むと思召さるとも，紫雲のうへにのぼり給ふべし．

またとない真心をこめて，一度，もしくは十度，念仏をお唱えなされば，阿弥陀如来ははかりしれない大きな御身を縮めて，1丈六尺の御形で，観音・勢至をはじめ無数の仏菩薩や化現の菩薩が百重千重ととり囲み，音楽を奏し詠歌をうたって，ただいまにも極楽の東の門を出，お迎えにこられるでしょうから，御身は青い海の底に沈むとお思いになっても，紫雲の上におのぼりになさるでしょう．

『平家物語』[杉本]「維盛入水」

---

[24] 原文に忠実に訳したのでこのようになったが，実際は「7の6乗倍」とすべきであろう．

[25] ここでは，那由多と恒河沙が合成されているが，恒河沙と劫の合成もいろいろな仏典で散見される．例えば，法華経では3カ所現れており，常不軽菩薩品第二十では，「壽四十萬億那由他恒河沙劫」とある．

## 3.4　不可説不可説轉あるいは不可説轉轉

仏教では，既に紹介した劫や恒河沙以外にも那由他，阿僧祇などの巨大数が，数多く定義されており，前節で触れた中国の『算学啓蒙』，日本の『塵劫記』にもその影響が見受けられる．

それでは，仏典に現れる最大の巨大数とは何か？ 恐らく，華厳経に現れる不可説不可説轉であろう．現代の指数表現を与えたならば，次のようになる．[26]

$$\text{不可説不可説轉}：10^{7\cdot 2^{122}}$$
$$=10^{37,218,383,881,977,644,441,306,597,687,849,648,128}$$

これは googol[27]を超えるとんでもない巨大数である．

この巨大数の具体的な計算方法は，脚注にある高杉親知氏の HP に丁寧に解説してあるので，これ以上は触れない．ただ，数学者の末綱如一(58)[28]が 1956 年の著書『華厳経の世界』[末綱]で，

$$\text{不可説轉轉}：10^{5\cdot 2^{120}}$$

を計算していることについては，誤解がないように説明を加えておく．

華厳経の漢訳完本としては，次の二種類があるのだが，

『大方廣佛華嚴經』60 巻（六十華厳），旧訳または晋経
『大方廣佛華嚴經』80 巻（八十華厳），新訳または唐経

不可説不可説轉は，唐経の第 45 巻，阿僧祇品第三十にあり，不可説轉轉は晋経の第 29 巻，心王菩薩問阿僧祇品第二十五にある．内容はほぼ同じだが巨大数の名称・定義が微妙に異なっており，その差が上記のような違

---

26 高杉親知 (2002) http://www.sf.airnet.ne.jp/~ts/language/largenumber.html
27 グーゴル(googol)　10 の 100 乗
この奇妙な用語は，米国の数学者 Edward Kasner(42)が，9 歳の甥子 Milton Sirotta と考えたものである．パリセーズの森を散策中に Kasner が 1 の後ろに 0 が 100 個並ぶような巨大な数の名前を尋ねたところ，Milton が「グーゴル(googol)」と答えたのを Kasner が採用し，「数学と想像力」と云う題名の通俗書で紹介した．この単語に子供らしい，素朴で直観的だが，妙にしっくりくる巨大数らしい「とてつもなさ」を感じるのは著者だけではあるまい．そして，今では有名な話だが，Google の名前はこの googol に由来する．
28 末綱如一(1898～1970)：日本の解析数論の草分け的存在である．著者の学生時代には，高木貞治の『代数的整数論』と末綱如一の『解析的数論』が本屋に並んでいた．仏教や哲学にも造詣が深く，西田幾多郎，鈴木大拙，田辺元と深い親交があった．本著にも「華厳の数論」と題した章が設けられており，数学者らしい鋭い考察が与えられている．

いとなって表れたのである．どちらかが計算違いをしているわけではない．

百洛叉（らくしゃ=十万）を一倶胝とする．倶胝倶胝を一阿庾多とする．阿庾多阿庾多を一那由他とする．那由他那由他を一頻波羅とする．（中略）不可說轉不可說轉を一不可說不可說とする．此れ又不可說不可說(倍)を一不可說不可說轉とする．『華厳経』第 45 巻

ところで，仏教ではなぜこのような巨大数を生み出したのであろうか．もちろん，個々の数字に実用的な意味合いがあるわけではなく，「仏菩薩の徳用は広大無辺で，この大数のように大きく，また更に大きい」ことを表したいだけなのであるが，それにしても，これだけの巨大数を紡ぎだす必要が，どこにあったのか．一つ考えられるのは，信者に対し，圧倒的な非日常を提示することで，判断力を麻痺させ，無条件の帰依を引き出すこと，あるいは通常の疑念や論理的追求の意志を挫くことにあったのかもしれない．ジャイナ教の巨大数階梯にも同様の教学的必要性が，あったと考えられる．このような文脈から，アルキメデスの「砂の計算者」を読むと，「世間で簡単に無限と言っているような巨大数があるが，自分はそれを計算してみせたぞ．」と云う彼の数学者としての矜持が感じられるし，リトルウッドが「劫」に指数表現を与えたのも同様であろう．

## 3.5 ジャイナ教の巨大数階梯

ジャイナ教は，B.C.500 年頃から B.C.400 年頃に，古代インドでマハーヴィーラ（大雄）によって始められ，現在も存続する古い宗教である．マハーヴィーラは，仏教の開祖ゴータマ・シッダルタ（釈迦）とほぼ同時期に同じ地域で活躍し，その教えも双子の宗教と言われるくらい似ている．
ジャイナ教徒は，時間と空間の哲学に関連した巨大な数を扱った．そして，このような巨大数を考えることは，無限の概念を自然に受け入れる素地となったものと推察される．この辺りは，無限を忌避したギリシャ数学とは対称的である．更に言えば，厳密性を追求したギリシャ数学とは異なり，かなり大らかに無限が考察されているが，その方向性は鋭く，19 世紀のカントールの超限数の概念[29]を彷彿させるものであった．ジャイナ数

[29] 林隆夫氏は『インドの数学』[林]p.128 で「その意図するところは，今日の言葉でいえば，自然数全体の個数に等しい「可算無限」（$\aleph_0$）であったかもしれない．」と書かれている．この集合論との類似性は，古くは 1929 年の『ジャイナ派の数学』[Datta]にも見られ，『古代インドの科学思想』[佐藤]p.232，『非ヨーロッパ起源の数学』[Joseph]p.337 にも踏襲されている．興味深い考察であると思うが，著者にはこの構成法から考えて，基数（$\aleph_0$）

学では，最高の不可算数（N）が得られると，次のようなプロセスを経て，無限に達することが，出来るとされている．

上記のクラス分けは，以下の数列によって表現され得ることが,容易に認識されるであろう．
2...N ｜ N+1 { $(N+1)^2-1$ } ｜ $(N+1)^2$...{ $(N+1)^4-1$ }｜
$(N+1)^4$ { $(N+1)^8-1$ }｜$(N+1)^8$ { $(N+1)^{16}-1$ }｜
$(N+1)^{16}$ { $(N+1)^{32}-1$ } ｜ $(N+1)^{32}$
ここでNは，先に定義したように，最高の可算数であるとする．この数列は，その作業の中で記録されたmとして，それぞれのクラスの極限数を含み，異なるクラスは縦線で仕切られている．如上の数たちのクラス分けにおいて，アレフ_0を超える数たちを定義しようとしていることに気付かされるであろう．

『ジャイナ派の数学』[Datta]p.142（拙試訳）

少しカントールの構成方法とは異なるが，かなり似たようなことをやっていたことが，見て取れるであろう．

このようにジャイナ教には，数に関する不思議な予言性があり，他にも現代物理の光年に似た距離の概念も提示していた．[30]

# 4 命数法と巨大数

巨大数の歴史の中で，避けて通れない話題の一つとして，命数法がある．我々が，日常的に，何億，何兆と云った数を容易に使うことが出来るのは，命数法のお蔭である．この辺りの話は，類書やネットで簡単に拾うことが出来るので，詳しくは紹介しないが，比較的目新しい切り口として，中国と欧米における命数法に関する混乱の奇妙な類似性と，それを回避出来た和算家の卓越性，及び数に名前を付けることの重要性を論じた，ロックのエッセイを紹介しておく．

---

ではなく超限順序数（$\varepsilon_0$）とした方が，より適切であるように思われる．

[30] ジャイナ教の宇宙観を特徴づけるものに人間の形をとる宇宙「ローカ・プルシャ」があるのだが，その大きさを測るためにラッジュ(rajju)と云うジャイナ教特有の長さの単位が使われる．1ラッジュは，一瞬間に2,057,152ヨージャナ（yojana,由旬(ゆじゅん)）の距離を進む神が6ヶ月の間進み続けて到達する距離である．1瞬間を1秒，1ヨージャナを15km(仏教の場合は，この半分)，6ヶ月を180日と考えれば，その距離は次のようになる．
2,057,152,×15×180×24×60×60＝479,892,418,560,000km　≒50光年

『インド宇宙論大全』[定方:2011]p.348

このような古代インドの長さの決め方を，前近代的と一蹴すべきではない．神が進む速さが距離を本質的に定義している仕組みは，光速を使って長さの基本単位であるメートルを定義する現代の度量衡（1983年以降）と驚く程酷似している．

## 4.1 中国と日本の命数法

中国では，数の概念は，新石器時代末期に発生し，奴隷時代の初期である商（殷）代(B.C.17 世紀頃－B.C.1046 年)に完成されたと考えられている．この時代に現れた甲骨文の中には，多くの数字が散見され，最大の数を表す字は，「三万」であった．漢数字の前身である甲骨文字には，1から 10 までの数字はもちろんのこと，「百」，「千」，「万」に相当する文字も既にあった．

また，春秋時代(B.C.770 年－B.C.403 年)には，「億」，「兆」，「経」，「姟」などの数詞が現れているが，インド式記数法のように，十ごとに進位している．南北朝時代(439-589)に成立した孫子算経でも，万万を億としているが，兆，京，垓，秭，穰，溝，澗，正，載はすべて十ごとに進位している．6 世紀も後半に入り，北周の甄鸞（しんらん）は，『数術記遺』[31]の中で，上記の大数進法に上数法，中数法，下数法の三種類を導入している．下数法は，十ごとに進位するインド式記数法であり，上数法は「數窮むれば則ち變ず」とし，万万を億，億億を兆，兆兆を京などと進位させる方法である．両方とも使い勝手が悪く，甄鸞は万万を億，万万億を兆，万万兆を京と進位させる中数法が最も望ましいとした．これはヨーロッパで 15 世紀末にニコラ・シュケやヨハン・アダムが行ったことに相当する．しかし，万万進法としての中数法に対し，唐の時代には現在の記数法である万進法が現れ，両者の不統一による混乱した時期が，永く続くことになる．

良く知られているように，和算史上最高のベストセラーである『塵劫記』は，主に明の程大位の『算法統宗』からヒントを得て書かれたものである．そのせいか，初版(1627 年)では，極以下が下数，恒河沙より上を万万進の中数としており，1631 年の版では極以下が，万進の中数に改められたが，恒河沙より上は万万進のままであったので，未だ万万進と万進の「中数」が混在するなど，中国の命数法の混乱が，そのまま反映しているところが見受けられた．しかし，1634 年の版以降は，すべて万進の中数（現在の命数法）に統一され，中国のような混乱が続くことはなかった．このことは，吉田光由(36)の大きな業績と言えよう．また，余談ではあるが，その後中国では，SI 接頭辞の mega に対しても，その訳語として「兆」を当ててしまったので，更に混乱に拍車が掛かった．

---

[31] 銭宝琮は，『中国数学史』の中で，「《数術記遺》一巻は，巻首に“漢の徐岳撰，北周の漢中郡守，前司隷，臣甄鸞注”と題している．だが，書中，劉洪を” 劉会稽 “と称し，天目山の隠者が述べた言葉を引きながら，”刹那”,”大千”などの仏教語彙をもちいており，後漢末年の歴史事実とあわない．したがって本書は，断じて徐岳の原著ではない.」としているが，李迪『中国数学通史』で「その真偽については今後の研究を待つしかない」と書いている．

## 4.2 欧米の命数法

現在，日本も含め世界中に広まっている，3桁毎に区切ることで，数を読み取り易くする方法の直接的な根拠は，第 9 回国際度量衡総会(1948)の決議7と第22回国際度量衡総会(2003)の決議10に依る．しかしながら，それは表面的なことであって，この方法が生まれた本質的な歴史的由来は，カエサルのヨーロッパ制圧に遡る．もしアレクサンダーが，先に制圧していたならば，4桁毎に区切る方式になっていた可能性が高い．

古代ローマ最大の英雄であるカエサルが，ヨーロッパを制圧したことにより，当時蒙昧であったヨーロッパに古代ローマの数体系が齎された．この当時，ギリシャやユダヤは「万」の数詞を有していたが，ラテン語では「千」を意味する mille までしか保持しておらず，これよりも大きな数は，「千」の倍数として表すしかなかった．

スミスによると，million を初めて使ったのは，13 世紀，ビザンツ帝国の著名な学者であるマクシムス・プラニュース（Maximus Planudes）であった．[Smith]　ラテン語で「1000」を意味する mille に「大きな」を意味する on を組み合わせることによって million なる数詞が編み出されたとする説[32]には説得力がある．つまり，もともとの意味は，「大きな千」だった訳である．その後，この数詞は，西ヨーロッパでは比較的経済的に発展しつつあったイタリア，フランスで，何人かの学者たちに使われるようになった．mille では窮屈になったからだと思われる．

1484 年頃，ニコラ・シュケ(39)は，イタリアで使われはじめた million を基にして，その乗冪を byllion,tryllion,quadrillion,quyllion,sixlion, septyllion,octyllion,nonyllion と表すことで，現代に連なる命数法を確立した．この方法の秀逸さを理解するためには，インド命数法の欠点を思い起こせば良い．カジョリは，このような命数法はシュケが嚆矢であると記しているが，実は9年早くヨハン・アダム(Jehan Adam)が，似たようなことをやっていた．

シュケの手稿の内容は，エティエンヌ・デュ・ラ・ロッシュ(50)のものとして 1520 年に出版された本に現れた．1549 年には，ジャック・ペルチエ(32)も milliard を"Million de Millions"として定義した．彼らの大数進法は，千千進法(long scale)であった．１７世紀頃から千進法(short scale)が現れたが，殆どは千千進法が使われていた．

１８世紀中頃に，アメリカのイギリス領で千進法が使われるようになっ

---

[32] 似たような例として，ball＋on⇒balloon がある．

てから，千進法が広まっていったが，現在に至っても，両法の統一は完全には果たされていない．それ故，billion には 10 億（主にアメリカ）と 1 兆（主にイギリス）の両方の意味がある．中国や日本と違って，アラビア数字を用いて表現されていたので，呼び方そのものは，それ程深刻には影響を与えなかったのかもしれない[33]．それでは，数の名前などはどうでも良いのかと言えば，もちろんそんなことはあるまい。寧ろ，名前を有することこそが理解することに直結するのである，とまで熱弁する論客がいた．

１７世紀を代表する哲学者ジョン・ロック(58)は，1690 年に出版された随想録のなかで，ネイティブアメリカンは迅速性や合理性においては十分な能力をもっているにも拘わらず，千まで数えることが出来ないことを指摘し，この現象から転じて，彼らが大きな数に対して名前を持っていないことが，その原因である，と結論付けている．

そして，私は，我々自身が通常行うよりも遥かに大きなものを，それらを表すためのある適切な単位を見つけ出すことによって，言葉ではっきりと数え得ることを疑わない．一方で，我々は，ここで百万の百万倍の百万倍，等を，以下のように，それら（我々自身が通常行うよりも遥かに大きなもの）に対して名付けるための例として挙げておく．混乱することなく，（この操作を）18 桁または多くとも 24 桁の 10 進数を超えて行うのは困難である．しかし，はっきりと**異なった名前を示すことは，我々が上手く数え上げたり**，有益な数の**概念**を有することを齎す．次のすべての数字を，一つの数の印として，一つの連続直線内に設定してみよう．例えば

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Nonillions.* | *Octillions.* | *Septillions.* | *Sextillions.* | *Quintrillions.* |
| 857324 | 162486 | 345896 | 437918 | 423147 |
| *Quatrillions.* | *Trillions.* | *Billions.* | *Millions.* | *Units.* |
| 248106 | 235421 | 261734 | 368149 | 623137 |

この数の英語での通常の名付け方法は，（もう一つの第 6 桁の単位である）百万の，百万倍の，百万倍の，百万倍の，百万倍の，百万倍の，百万倍の，百万倍の繰り返しである．このような方法では，この数のいかなる識別観念を持つことも非常に困難となるであろう：しかし，６桁毎に新しくて順序付けられた単位を与えることによって，おそらく，膨大な次第により大きくなって行く数は，これらが簡単にははっきりと数えることが出来ない可能性があろうとなかろうと，それらの**概念**は我々に対してはより簡単に把握され，かつ他者に対してはより平易に表される，私はそれが考慮されるようにしておく．これは，私が唯一言及するところのもので，私の新しい創案を敢えて導入することなく，特徴のある名前が番号

[33] 「正直にいえば，名前がないということは，たいして重大なことではない．科学者は，だいたいにおいて，おどろくほど大きな数を必要とする唯一の人びとなのだが，それらの数を 10 進法あるいは指数の形でかき，数の固有の名前によって述べることはしない．」『大きな数』[Davis]p.41

付にどのように必要であるかを示すことである.

『人間理解に関する随想：第16章 数 第6節 数に対する名前の必要性』[Locke](拙試訳)

ロックの考察は,名前に愚直にこだわると,現状にそぐわない.例えば,$10^{10000}$に対して,ロックの方法で名前を付けることは,現実的ではないし,その名前が数に対して何か有効な情報を与えるとは思えない. しかしながら,「適切な名前」の代わりに「適切な表現形式」と読み替えれば,現在でも通用するなかなかの卓見であり,巨大数に対する現代的なアプローチにも通じると言えよう.

# 5 自然科学に現れた巨大数

## 5.1 アボガドロ定数

現代の社会人が,一般常識として記憶しておくべき最大の数は,アボガドロ定数 $6.02 \times 10^{23}$ ではなかろうか. 無量大数や googol は,有名ではあるが,高校生の必修学習事項ではない.また,アボガドロ定数なしでは,現代の化学が成り立たないのに対し,後の二者は,クイズ番組に出題されることはあっても,直接的に現代文明を支えている定数ではない.

現在の高校の化学の教科書では,アボガドロ定数の測定方法を紹介しつつ,「1811年,アボガドロ(35)は,気体は原子が結合した分子からなるとする分子説を唱えた.」[34]と云った科学史からのアプローチも明記されている. しかしながら,これは,「デカルトが,直交座標を史上初めて考察した」と同じくらいに歴史的事実としては問題がある.[大野] 学校教育における科学史を科学理論の理解を促進するための補助的手段と割り切るならば,ある程度の歴史の簡易化も致し方ないと思うが,それでも表現方法には気を付けて,「歴史的事実として嘘」にならないようにすべきであろう.

エッセニン・ヴォルピンと云う基礎論学者は,$10^{12}$のような大きな数の実質的な存在に対して,疑問を投げかけたことがあるとのことだが[35],その考えに従えば,アボガドロ定数は,理念的に表記され得ても,人間が実際には把握することが出来ない数であることになる. 彼は,アボガドロ定数をどのように考えていたのだろうか.

---

[34] 高等学校化学Ⅰ　第一学習社（平成14年検定済）p.60

[35] 英語版の Wiki 情報なので,いささか出所はあやしい.

## 5.2　エディントン数とディラックの巨大数仮説

前節では，馴染みの深い巨大数としてアボガドロ定数を紹介したが，物理的な理論面では，この定数は必ずしも適切ではない．なぜなら，この定数は，炭素 12g に含まれる炭素原子の数として定義するのであるが，重さの単位 g に任意性があり，定数の値に恣意性があるからである．もっと判りやすい例を挙げれば，真空中の光速は，相対性理論を知っていれば，一意に決定されるべき物理量であることは当然なのだが，計数単位が，メートル法かポンド・ヤード法かで数値は変わる．つまり，計数単位によって変わり得るような物理量に対して，その値が巨大だと言っても物理的には意味がない．

巨大かどうかは別として，当時の物理学者が，計数単位によらない無次元の物理量に興味を持つことは，自然な態度であろう[36]．このような問題意識から，自然科学屈指の巨大数であるエディントン数やディラックの巨大数仮説　―　それは重力定数(G)が時間と伴に変化すると仮定することで巨大数同志の関係に説明を与える　―　が現れたことを確認しておきたい．

クーロン力と万有引力は，前者が排力と引力の両方があり，後者が引力しかないと云う違いはあるにしても，ともに距離の２乗に比例し，物理法則としては似た構造をしている．しかし，その大きさの比は凄まじく，水素原子における陽子と電子の場合で比較すると，下記に示すように，だいたい宇宙の年齢と水素原子核を光が横切る時間の比程度になる．

$$R_c = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}}{G\cdot\frac{m_p m_e}{r^2}} \propto \frac{e^2}{G}$$

$1/4\pi\varepsilon_0 = 9\times10^9, \mathrm{e} = 1.6\times10^{-19}\mathrm{C}, \mathrm{G} = 6.67\times10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}},$
$m_p = 1836m_e, m_e = 9.1\times10^{-31}\mathrm{kg}$ より $R_c \fallingdotseq 10^{39}$.

$$R_G = \frac{\tau_{cosmos}}{\tau_{nucleus}} = \frac{\tau_{cosmos}}{\frac{2R_{nucleus}}{c}} = \frac{c\cdot\tau_{cosmos}}{2R_{nucleus}} = \frac{\text{宇宙の大きさ}}{\text{原子核の大きさ}}$$

上式で原子核の半径として $R_{nucleus} = 1.2\times10^{-15}\mathrm{m}$，宇宙の年齢として $\tau_{cosmos} = 10^9\times365.25\times24\times60\times60\mathrm{sec}$ より $R_G \fallingdotseq 10^{39}$.

ディラック(35)は，上記のような巨大な二つの無次元物理量のオーダーが単なる偶然によって一致することは有り得ないと考え，この一致を説明

[36] 物理学に次元解析の概念を初めて導入したのは Fourier である．[Maxwell:1873]p.3

付ける物理理論として，重力定数$G$が原子時間に反比例して小さくなると云う「巨大数仮説」を 1937 年に提唱した．

実は，この不思議な一致に対し，最初に注意を促したのはヘルマン・ワイル(34)である． アインシュタイン(38)やド・ジッター(45)が，定常宇宙モデルを提唱した僅か 2 年後の 1919 年のことであった．

> 電子についてのある無次元数値の大きさが，1 から著しく異なるというのは事実である；例えば，電子半径とその質量の重力半径に対する比は，$10^{40}$のオーダーである；電子半径の世界半径に対する比が，（上記の比と）同等のスケールである可能性がある．
>
> 『相対性理論の新しい拡張』[Weyl:1919:p.129]（拙試訳）

彼は，「空間・時間・物質」の第 5 版でも，次のように述べている．

> 大きな渦状星雲までの距離として，新しい仮定にもとづいた光行差による決定法にしたがって，アンドロメダ星雲に対して $10^6$～$10^7$ 光年と仮定すれば，世界の半径$\alpha$はだいたい $10^9$ 光年となる．ここに概算された宇宙半径と電子半径の比は，$10^{40}$ であるが，これが電子半径と電子の質量の重力半径の比に大体等しいことは，注目に値しよう．
>
> 『空間・時間・物質』(付録Ⅲ)[Weyl:1923]

一方，エディントン(56)は，1938 年にケンブリッジ大学のトリニティ・カレッジでの講義(Tarner Lecture) で，宇宙に存在する全陽子の数が

15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044,717,914,527,
116,709,366,231,425,076,185,631,031,296　　(80 桁)[37]

であり，全電子の数も正確に同数であると発表した．これが世に名高いエディントン数誕生の瞬間であった．彼の目的は，上記の数がおおよそ $136 \times 2^{256}$であることに基づいて，重要な無次元物理量である微細構造定数($\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$)の値を説明づける理論を創案することであった．136 は，この当時の微細構造定数の実験値の逆数であった．しかし，実験結果が改善されると，1/136 ではなく 1/137 [38]に近いことが明らかになった．エディン

[37] つまり $10^{80}$に近い数であり，Dirac の巨大数のほぼ 2 乗である．このような宇宙論に現れる巨大数については，"Cosmology" [Harrison] chap23 を参照のこと．
[38] この数を Eddington 数と言うこともある．

トンは，理論を手直しして 137 で成り立つようにしたが，このような後出しジャンケンご都合理論が認められるわけもなく，ディラックからは厳しく批判され，パウリからは数秘術であると揶揄され，後年に至るも，ファインマンに説得力のない物理理論の例として取り上げられている．

1961 年，アメリカの宇宙論学者ディッケ(45)は，この $R_c = R_G$ を証明するために人間原理[39]を提唱した．この原理によれば，人間のような炭素系高等生物が存在し得る為には，宇宙の年齢が 138 億年($\fallingdotseq 10^{10}$)くらいのオーダーであることが必要であり，このことが $R_c = R_G$ を成立させる隠れた要因であるとする．つまり，宇宙の年齢が 100 兆年くらいのオーダーだと $R_c = R_G$ は成立しないが，その時期の宇宙にはそもそも人間が存在し得ないと言うわけである．屁理屈のように聞こえなくもないが[40]，本当なら，この巨大数は，生物としての人間の有限性の産物と言えるであろう．

## 5.3 永劫回帰時間

物理学で考え得る意味のある最大の数とは何であろうか．前節で紹介したエディントン数が，そうであるように書かれている場合が多いが，著者

---

$$\text{微細構造定数} = \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{\frac{e^2}{m_e c^2}}{\frac{\hbar}{m_e c}} = \frac{\text{古典的電子半径}}{\text{量子論的電子半径}}$$

量子論的電子半径＝電子のコンプトン波長

余談であるが，この数に因縁浅からぬ物理学者に Pauli がいる．彼は，この素数がなぜ物理法則の中心に現れるのかを生涯にわたって問い続けた．1958 年 12 月 5 日の午後，講義中に激しい腹痛に見舞われた彼は，翌日，チュウリッヒの赤十字病院に搬送された．見舞いに来た Charles Enz に興奮して「病室の番号に気が付いたか.」と訊いた．特に気に留めていなかった Enz に「137 号室だ．私がここから生きて外に出ることは絶対にない.」その言葉通り，彼はこの病室で 12 月 15 日に息を引き取った．[Miller] pp.422-427

39 Dicke の人間原理は「弱い人間原理」と呼ばれるものの一種で，次のようなテーゼに立脚する．「宇宙における私たちの位置は必然的に，観測者としての私たちの存在と両立する程度に特別である」[三浦] p.153　Dicke による $R_c = R_G$ の証明は『人間原理の宇宙論』[松田]p87-88 に簡単に説明されている．一方，「強い人間原理」のテーゼは「宇宙は，その歴史のどこかにおいて観測者を創りだすことを許すようなものでなければならない」[三浦] p.153

尚，「人間原理 anthropic principle」と云う呼称は，1974 年に宇宙物理学者ブランドン・カーター(Brandon Carter：32)によって与えられたものであり，一方，反対用語としての「宇宙原理 Cosmological Principle：宇宙が等方で一様であると云う仮説」は，イギリスの天文物理学者ミルン(Edward Arthur Milne：37)によって，1933 年に名付けられた．

40 「弱い人間原理」は説明に用いられる場合は反証可能であるが，予測に用いると反証不能な形式科学ルールと言える．

はポアンカレの回帰時間ではないかと考える．[41]

ポアンカレ(36)は，1890 年，三体問題に関する懸賞論文において，次のような「回帰定理」を発表した．

> 空間の位置のみに依存する力が作用している一つの質点系において，座標及び速度が無限大には増大しないことが仮定されていれば，最初仮定された配置と速度によって特徴付られる運動状態は，一般に時間の経過に伴って，正確でないにしても，再び任意に接近し，またしばしば任意に再帰しなければならない．
>
> 『三体と運動方程式について』[Poincaré : pp.67-72]（拙試訳）

ポアンカレ自身は，この定理を上述の論文の中で，統計力学への応用を試みるようなことはしていないが，ツェルメロ(25)は，ボルツマンの H 定理の証明に対する反証として，この定理を取り上げている．このツェルメロの異議申立に対し，ボルツマン(52)が反論した論文で，彼は，体積が$1\mathrm{cm}^3$の容器に通常密度の空気が入っている場合を想定して，具体的にポアンカレ周期を計算している．[Boltzmann]

現在でも「回帰定理」を現実の宇宙に適用し，そこから宇宙が初期状態にまで戻る時間，つまり永劫回帰時間，を計算した物理学者がいる．もちろん，いくつかの前提条件のもとではあるが，この宇宙が永劫回帰するのにかかる時間は，だいたい $10^{10^{10^{10^{10^{1.1}}}}}$ 年であるらしい．これは現代版「一劫」の定義とも言えるであろう．[42]

とは言え，現在の多くの人にとっては，「永劫回帰」と聞いて先ず思い出すのは，おそらくポアンカレではなくニーチェであろう．ニーチェ(37)自身によれば，1881 年に，病気療養で訪れたスイスのシルス・マリアのシルヴァプラナ湖畔を散策した際，巨大な尖った三角岩のほとりで，「永劫回帰」のアイデアが突然襲来した．

> 無限の時間のうちではあらゆる可能な結合関係がいつかはいちど達成されていたはずである．それのみではない，それらは無限回達成されていたはずである．しかも，あらゆる結

---

[41] 前節で次元付の巨大数は単位系の取り方に依存するから意味がないと注意したが，余りに大きいと単位時間を千年としようがプランク時間としようが殆ど影響されない．

[42] この数値は[Page]に依る．計算の前提条件は，以下の通りである．
「結局，大規模なインフレーションを伴うリンデの確率論的インフレーションモデルの一つ，その大きさはプランク単位長でだいたい$m= 10^{-6}$である，に全宇宙であるかもしれない処の物質を取り、そしてこの（物質の）塊を一つのブラックホールにして適当な一個の箱に入れた場合、

$t_{\text{Poincaré}} \sim \exp\exp\exp(4\pi m^{-2}) \sim 10^{10^{10^{10^{10^{1.1}}}}}$ プランク時間，千年，等といった時間単位の規模のポアンカレ回帰時間が必要となる.」[Page]（拙試訳）

合関係とその直後の回帰との間には総じてなお可能なその他すべての結合関係が経過したにちがいなく，これらの結合関係のいずれもが同一系列のうちで生ずる諸結合関係の全継起を条件づけている・・・
『権力への意志』[Nietszche](p.540)

「永劫回帰」は，いろいろなヴァリエーションがあるとの但し書きのもとではあるが，バビロニア，インド，エジプトの古代思想では多数派に属し，始まりと終わりの存在を主張するヘブライ人の時間の観念の方が寧ろ少数派であった．もちろん，現在の欧米文化圏では，ユダヤ教から時間観念を受け継いだキリスト教が，圧倒的主流派となっているので，この状況は完全に逆転している．バビロニアやエジプトから影響を受けた古代ギリシャにおいても，キリスト教が国教とされる前は，「永劫回帰」は普通に語られていた．例えば，ルクレティウスの『物の本質について』を紐解くと下記のような一節を目にするであろう．

ただ，原子は数が多く，かつあらゆる工夫に変化をうけ，無限のかなたから，打撃をうけて運動を起し，宇宙中を駆りたてられて飛んでいるが故に，あらゆる種類の運動と結合の仕方を試みることによって，ついに現在，物のこのような総和が生まれ成立するに至ったこの配置に，はいるのである．宇宙はまた，多数の『劫年』を経て保存された後，ひとたび適合した運動に投じこまれるやいなや，次のような現象を呈するにいたる．
『物の本質について』[Lucretius](p.56)

また，ストア派ではないがキリスト教最高の教父と位置付けられているアウグスティヌスは，ストア派やエピクロス派の宇宙観としてではあるが，主著で次のように論じている．

宇宙そのものはそれ自身の質料からふたたび生じ，かくしてまた，人類も他の諸々の生命体と同様，その元素からふたたび生じ来たり，それからのちは両親から死すべき者たちの増殖がなされるというのである．
『神の国』[Augustinus]第12巻第12章

たとえば，哲学者プラトンが，かれの時代にアテナイのまちでアカデミアと呼ばれたあの学園において弟子たちを教えたように，そのときから数えられないほどの以前の時代に，広大な，けれども一定の時間間隔をおいて，同じプラトン，同じまち，同じ学園，同じ弟子たちが存在していたとし，かつまた，これからさきの数えられないほどの時代をおいてくり返されねばならないとすることである．
『神の国』[Augustinus]第12巻第14章

ストア派では，この宇宙が生誕した当時と全く同じ位置に復帰する期間「劫年(magnus annus)」を見積もっていたらしく，例えば『ヴェルギリウス論評』(J.H.Vossi 1838年) によれば次のような具体的な期間[43]が与

[43] 『物の本質について』[Lucretius]にある樋口勝彦氏の注釈によると「劫年 magnus annus（大きな年の意）ストア一派では，天体をはじめ万物が移行して，この宇宙の生誕した当時

えられている．現在を生きる我々の感覚からはどれも驚く程小さい．

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2,489 | 世界の年齢 | 7,777 | 神秘数 | 15,000 | マクロビウス[44] |
| 3,000 | 世界の年齢 | 12,954 | キケロ | 18,000 | ヘラクレイトス |

彼らに数学の知識が不足していたから，このような見当違いの見積もりをしたのだろうか．1715年に出版されたデヴィッド・グレゴリー[45]による著書では次のように見積もられている．

劫年，または偉大なる年は，ある固定点からの出発が終わってからの，固定された星々の一つの完全な見かけ上の天体の運行を表していて，それらは，25,000年か26,000年またはその付近なのだが，再び同じ位置に戻ってくる．

『天文学の物理的，幾何学的原理 』[Gregory]（拙試訳）

本著は，あのハレーが英訳を行っているのだが，この数値に対して，殊更，異議を与えることもしていない．時代の限界かとも考えたが，そもそも劫年(magnus annus)の意味が変わってきていると見なした方がもっともらしい[46]．

## 5.4 猿の無限定理

ランダムに文字を与え続ければ，十分ながい時間があれば殆ど確実にどのような文字列も実現されるであろう．直観的には受け入れ易い定理だが，ここで言う「十分長い時間」が，驚くべき巨大数を生み出すことになる．

例えば，猿が休みなくタイプライターでキーを叩き続けた結果，偶然にもコナン・ドイルの「バスカーヴィル家の犬」となるには，大体$10^{3,000,000}$年程度の時間がかかる．宇宙の年齢が約$10^{10}$年くらいであることを考え合わせれば，べらぼうに大きいことが分るであろう．この手の計算は，ありそ

---

と全く同じ位置に復帰する「劫年」なる期間を考えていた．太陽年の幾年に当たるか，その数は2,489, 3,000, 7,777, 12,954, 15,000, 18,000など区々である．」

[44] Macrobius Ambrosius Theodosius は400年頃のローマの文筆家で，『スキピオの夢についての注釈』の第2巻第11章にこの年数は出てくる．ちなみに，本著は中世プラトン主義の重要な出所であるとされている．

[45] 彼は傑出した数学者であるJames Gregoryの甥で，オックスフォード大学の天文学教授であった．

[46] 「偉大な年」と云う用語の難しさは，その曖昧さにある．殆ど全ての期間に対し，いろいろな時期のいろいろな場所で，この名前が授けられているのを見出だせる．
[Neugebauer] p.618

うもない現象が起こり得る確率として，いろいろな例に対して取り上げられており，例えばリトルウッドは，セルロイド製のネズミが灼熱地獄（絶対温度 $2.8\times10^{12}$K と設定）で１週間生き延びることの賭け率を$10^{10^{46.1}}$:1と見積もったことがある．[47]

このような起こり得る可能性の極端に小さい事象を巨大数で表現する手法は，進化論への反論や人類が地球で生存していることがいかに奇跡的なことであるかを論証するためによく使われた．これは，ある意味で，仏教やジャイナ教において，巨大数が信徒の帰依を促すために使用されたのと，酷似した使われ方であることに注意すべきである．グレゴリ・チャイティンは，『ダーウィンを数学で証明する』[Chaitin]において，ある種の生物進化の数学的モデルを設定し，DNA の変異の仕方が無作為的であるなら時間(変異回数)$2^N$で適応度 BB(N)に達するが，神の御業とも思しき最適仕様であるならば時間(変異回数)N で同じ適用度 BB(N)に達し，現実の進化のモデルとしてチャイティンが提唱している「累積的な進化」では時間(変異回数)$N^2$から$N^3$で適用度 BB(N)に達すると見積もって見せた．ここでBB(N)とは，後述するビジービーバー関数BBの非負整数Nでの値を表し，長さ N ビット以下のすべてのプログラムの適用度の最大値を意味する[48]．チャイティンの主張の骨子は，「このような精緻で複雑な構造を持つ生命体をDNAの無作為な変異で構成することは宇宙の年齢を遥かに上回る時間が必要になる．しかし，現実には我々の周りには我々を含めて驚く程多種多様な生命体が厳然として存在する．この現状を理解する最も合理的な説明は生命体のデザイナー（神）を想定するである．」を**ダーウィンの進化論を使って論破すること**にある．彼の動機と手法は，既に例示したアルキメデスやリトルウッドに類似しており，巨大数の眩惑に屈しない強い理性への信奉と自負が感じられる．

もっと正当な科学的な裏付けへの適用例としては，統計力学の基礎付けが有名である．ボルツマンは，熱力学の第二法則を分子論的に導出するために，エントロピーが不可逆に増加することを示す H 定理を証明するのだが，これについて，ツェルメロはポアンカレの回帰定理から，力学的状態は初期状態にいくらでも近づくはずであり，不可逆の増加は有り得ないのではないか，と批判した．これに対するボルツマンの反論は，１㎤の気

---

[47] 『リトルウッド　数学スクランブル』[Littlewood] § 12

[48] Rado の原論文による定義とは異なる．(8.3 参照) Chaitin によれば，「本来の BB 関数をより洗練させたものである．」この理論の正当性の判断は著者には出来ない．進化の数学理論としては「集団遺伝学」の方がオーソドックスであるし，そこそこの巨大数も現れるのだが，さすがに BB 関数までは使われていない．Chaitin の理論は，純粋数学でも応用されることが多いとは思えない BB 関数を「進化論の正当化」に応用しており，「法螺」だとしても凄い話である．巨大数の関連テーマとしては興味深いのでこちらの方を紹介しておいた．

体の系についての回帰時間を具体的に計算し，それが途方もなく大きくて我々の現実的な時間の中では観測されることはない，と云う趣旨のものであった．ボルツマンは前節のような宇宙全体の永劫回帰時間（ポアンカレサイクル）を計算したわけではないし，現在の宇宙論による宇宙の年齢なども当然知らなかったが，これらを使って彼の言いたいことを表現するなら，高々$10^{10}$年程度のオーダーの世界の法則を論じているのに$10^{10^{10^{10^{10^{1.1}}}}}$年のオーダーで初めて観測されるかもしれない話をしても意味がないではないか，と云うことであろう．[49]

ここでの論法は，そのまま量子力学の確率的なゆらぎに対する弁明にも使われる．ざらざらな表面をした平らな机の上に固定された缶ビールが，量子のゆらぎによって突然倒れてしまう現象が生じるには$10^{10^{33}}$年程度かかる．従って，机の缶ビールが突然倒れたとしても，それは誰かが机にぶつかったのではないかと疑うべきであって，努々(ゆめゆめ)量子的ゆらぎを引っ張り出すべきではない．

# 6 巨大数の表記法

人間が，現実的になしえる表記を前提とした最大の数と云うものは，与えられるのだろうか？これは，表記方法，もっと具体的に言えば使える関数記号，によって大きく変わってくる．例えば，最も原始的な表現方法である一進法表記[50]，これは 1 を並べた個数で表示するものであるが，であれば，100 くらいは表現出来るだろうが，1000 では現実問題としてはお手上げであろう．まして，$10^{100}$に至っては，書き記す 1 の数が，宇宙の素粒子の数を超えているのだから，書きようがない．

---

[49] この論文の本論の最後は，次のように結ばれている．「それ故，この力学的自然観に対するすべての反論は，無意味でありかつ誤りに基づいている．しかし，この困難を，それは気体理論の原理の発見を明晰に提供するものなのだが，克服することが出来ない者は，実際にツェルメロ氏の忠告に従って，すべてのことを諦める決心をすべきである．」（拙試訳）

[50] レボンボ獣骨やイシャンゴ獣骨の刻みも 1 進表記であると言えよう．(附録 2 参照）漢字，ローマ字をはじめ多くの言語の中でも遺跡のようにその片鱗が残っている．現代においても「正」の字を書いて数えたりしているのはこの一変形と考えられる．Kronecker は自然数の本質を最も体現した表示方法として考えていたようであるし，現代においても，この表記方法に数の本質を求める基礎論学者がいる．ちなみに，Kronecker(63)の有名な言葉「神は自然数を作られた，他はすべて人間が作った．」は 1886 年 9 月 21 日の講演での発言である．

## 6.1 10 進法表記

一般的な 10 進法表記の歴史は，既に様々なところで詳細に論じられている[51]ので，ここでは巨大数表記との関連に焦点を絞ることにする．

現代人には判りにくいことであるが，10 進法と云うものは当たり前ではない．しばしば，人間の指が 10 本であることから必然的に 10 進法が生まれたように書いてある書物を目にするが，史上最初に現れた系統的な数体系は，古代メソポタミア文明で発達した 60 進法であったし[52]，現代においても，我々は，彼らの単位系を踏襲し，1 時間を 60 分，1 分を 60 秒と数えている．10 進法と指の数との因果関係は否定出来ないにしても，数体系をすべて 10 の冪によって統一的に表記するアイデアは，かなり卓越したものであったことは押さえておかねばならない．一方で，巨大数の表現能力においては，10 進法表記が 60 進法表記よりも優れているわけではない．実際，60 進法で$3^{92}$を計算して表現している楔形文字の遺跡があることは，既に紹介したとおりである．

古代の 60 進法の欠陥は，0 記号を持たなかったことであろう．しかし，各冪に対して名前を付けておけば厳密に巨大数を表現することが出来る．実際，インドでは，各冪に個別の名前を付ける方式を取っていたが，この場合，その名前を憶えるが大変であった．このような欠点を補う命名法として，中国や日本では 4 桁毎に，欧米では 3 桁毎に新しい冪数の名前を，多少の歴史的残滓を残しながらも，設定していることは既述の通りである．

さて，10 進法表記と云うテーマを数学史の立場から論ずるとき，シモン・ステヴィン(37)の著書『十分の一法』(1585) を外すことはできない．先ず，注意しておかなければならないのは，ステヴィンが，ライデン大学付設の技術学校で授業を行う地位にありながらも，本質的には伝統的なアカデミズムの徒ではなく，技術者であった，という事実である．それ故，彼は，本著を学者ではなく技術者のために書いた．彼の目的は，明らかに実社会の改善であって，アカデミズムでの認知ではなかった．それは，彼が本著を当時の学術公用語であるラテン語ではなくフランス語と母国語であるオランダ語で書いたこと及び序文にある次の文章から，読み取ることが出来る．

> 天文家，測量士，絨毯計測士，ワイン計量官，体積を測る専門家一般，造幣長官，そしてすべての商人にシモン・ステヴィンは幸運を祈る．　　　　『十分の一法』(山本義隆　訳)

---

[51] 新しいところでは，例えば，『小数と対数の発見』[山本].

[52] 正確には，10 進法と 60 進法の混合体系であった．

有態に言えば，彼は本著を通じて，度量衡の標準化を目指していたのである．[53]ステヴィンがこの本を執筆していた頃は，彼が居たホラント州を含む北部ネーデルランド諸国はスペイン領南ネーデルランドから事実上分離し，一つの国家を形成しようとしていた．このような変革期だからこそ，彼は本著を書いたのであろう．つまり，そのような時期でなければ度量衡の変更は困難であることを彼は熟知していたと思われる．もっとも，彼は早すぎた預言者であり，彼の理想が達成されるのは200年後のフランス革命の銃砲の響きを待たねばならなかった．

この当時の度量衡がどれほど複雑なものであったかを窺わせる資料として，1556年に出版された，ドイツの鉱山業・冶金業・試金業全般について詳述した『デ・レ・メタリカ（金属について）』の一部を『小数と対数の発見』[山本]から引用しておく．

> 分銅のシステムは，常衡と金衡の二種類があり，常衡では，Z を Zentner，P を Pfund，S を Sicilicus として
> 1D=100P，1/2D，1/4D，4/25D，2/25D，1/25D，1/50D，
> 1/100D=1P，1/2P，1/4P，1/8P，1/16P，1/32P，1/64P=1S.
>
> 『小数と対数の発見』[山本]　数学文化．第22号.p77

『十分の一法』は，時代の要請を満たしていたのだろう．様々な言語に翻訳された．1608年に出版された英訳には，60進法の小数を10進法の小数に変換するための表が追記されている．この時代には，未だ60進法の数字が，しばしば利用されていたことに，我々は思いを致さなければならない．

## 6.2 科学的表記（指数表記）

概念としての指数を生み出し，それまで扱えなかったような巨大数の捕捉に成功したのは，アルキメデスであることは既説の通りである．しかし，彼の天才をしても，時代的な制約から，言葉による表現にとどまらざるを得なかった．ここでは，具体的な表記方法について，その発明と影響の歴

---

[53] そしてステヴィンは，『十分の一法』の末尾の「補遺」で，十分の一法のいくつかの分野での応用を，分野ごとに具体的に説明したうえで，度量衡単位系の10進化，つまり度量衡に関するそれまでの複雑で無秩序な単位系をすべて10進法に整理統合すべきことを主張している．
『小数と対数の発見』[山本] 数学文化．第22号．p.88

史について言及する．

よく知られていることではあるが，現在の右肩に小さく指数を表記する方法を初めて世に知らしめたのはデカルト(41)で，1637 年に出版された『幾何学』に初出を見ることが出来る．この指数の表記方法が与えられれば巨大数，微小数を表現するのに有用な科学的表記(scientific notation : a $\times 10^{\pm n}$)に辿り着くことは，現在の我々の感覚から言えば，造作もないことと感じるでろう．しかし，この僅かと思われた進展に，人類はなんと 200 年以上の年数を要している．

前章では，見慣れた巨大数としてアボガドロ定数 $6.02 \times 10^{23}$を引き合いに出したが，実際にはこのような巨大な数を 10 や 100 と同じ水準で把握しているわけではあるまい．我々はアボガドロ定数の場合，6.02 と云う 3 桁の数と 10 の指数 23 の組合せだけでその大きさを把握していると言ってよかろう．つまり，宇宙が誕生した瞬間から，倦まず休まず数え続けたとしても未だ辿り着けない[54]ような巨大数を日常的に利用できるのは，科学的表記と云う非常に便利な表現ツールのおかげなのである．また，この表記方法が，掛け算や割り算において，指数法則の有効性を最も遺憾なく発揮させられる形態であることも論を待たない．

現代社会においては不可欠ともなったこの表記方法であるが，その歴史的由来となった文献を見つけることは，存外難しかった．管見の及ぶ限りではあるが，以下に引用する 1862 年の「英国科学振興協会の標準電気抵抗委員会報告」が初出であろう．更に，具体的に言うと，この委員会から意見を求められた若き電気技師アーネスト・エッセルバッハ[55](30)が書いた手紙のなかで，それは何気なく，しかし，明確な意図をもって導入された．ここでは報告書本文の方ではなく，エッセルバッハ自身の手紙の一部を引用しておく．

---

[54] 一秒間に 1 回ずつ数え続けるとしたら，Robert Hooke の計算値(9.1 参照)と地球の年齢を掛けてみると次のようになる．　31,557,600(回/年)×138(億年)≒$4 \times 10^{17}$(回)

[55] Ernst Esselbach (1832 年 9 月 12 日-1864 年 2 月 6 日)は，ドイツのシュレスヴィヒ生まれの物理学者，技術者で，1855 年には，Helmholtz の助手を務め，1857 年に Kiel 大学で学位を取得する．地中海の Malta(英領)と Alexandria(アフリカ)を接続する海底ケーブルの敷設計画に参画しており，この委員会報告のなかでは，「エッセルバッハ博士は，マルタとアレクサンドリアケーブルの冠水時に電気的試験を担当していた，著明な電気技師である」と紹介されている．彼が参加したときは，この計画は，技術が未熟であったため失敗したが，そこから得た様々な教訓を"On Electric Cables, with reference to Observations on the Malta-Alexandria Telegraph.（1862）"に書き残している．彼は責任ある立場で海底ケーブルの技術的な改善に携わっていたが，31 歳の若さで，パキスタンのクワダル港から西に 180 マイル行った沖合で溺死した．彼の死の 2 年後，1866 年，大西洋横断海底ケーブルは，万雷の拍手に包まれながら完成し，William Thomson はこの功績でナイトに叙せられた．

ウェーバーの絶対単位の実用化に対する二つの異議が，以下の通り十分に指摘されて来た．
1. その細かさ；そして
2. ガルバーニ電池の起電力に変動の余地がなくて（電流，電圧，及び抵抗の強さがそうであるように），自然界においてそれらが固定されるように，いくつかの定数を受け入れなければならないこと．

**絶対単位に平易な掛け算が採用された場合は，絶対単位の基準は信頼性で引けを取らないであろうことを，私は当然のこととして考えている．フランス式の 1 メートル自体が，唯一の地球の四分円の長さである自然単位の$\frac{1}{10{,}000{,}000}$の約数であることを指摘する必要はない．私が実用的な使用のために提案する電磁気の自然単位の倍数は$10^{10}$である．したがって，非常に単純である（それは殆どなんの重要性もない）；それが実際に使用されるこれらの基準に我々を導く倍数（掛ける数）である．**

・・・・・・・・

1862 年 9 月 18 日，ロンドンにて
『附録 F. エッセルバッハ博士からウィリアムソン教授への手紙の抜粋』[Esselbach]（拙試訳）

この委員会が目指したものは，その当時の様々な電気測定における単位系を整理統合することであり，単位系の変換公式を簡潔に表現するために科学的表記が生み出されたことは記憶に値する．また，この報告は当時としても，かなり重要なものとして捉えられており，翌年(1863)に発表された『1862 年の重要な出来事の年次百科と記録一覧』の“Electricity(電気)”に関する記事には次のような一節がある．

その目的は、この[電気抵抗の]標準単位を 1 秒当たり 1 メートルの商によって与えられる値の 10,000,000,000 倍に等しい電流力，すなわちそれは$10^{10}$メートル/秒であるのだが，に対応をさせることにある．[56]

『1862 年の重要な出来事の年次百科と記録一覧』（拙試訳）

この委員会の主要メンバーの一人であった J.C.マクスウェル(29)は，1860 年の論文[Maxwell:1860]では全く科学的表記を使用していないが，同じ主題であるにも関わらず，1866 年の論文[Maxwell:1866]では$10^{10}$を使用している．明らかに 1862 年報告の影響であろう．しかし，この表記方法が即座に科学者の間に広まったわけではない．慣れ親しんだ表記方法をやめて新しいものに移行するには，それなりに時間がかかるものである．例え

[56] この科学的表記の使用例は，“The Story Of Mathematics” [Rooney]にも引用されている．元々は OED2 にある初出例なのだが，先に紹介した標準電気抵抗委員会報告にある Esselbach の手紙の方が早いし，より根源的である．

ば，アヴォガドロ定数を初めて実験的に測定したロシュミットの 1865 年の論文でも指数表記は使われず，未だに次のような表記がされている．

この基礎に基づいて，最終的に，空気分子の直径は
$$s=8\times 0.000866\times 0.000140=0.000000969\text{mm}$$
または概算で，百万分の一ミリメートルとなる．

『空気分子の大きさについて』[Loschmidt]（拙試訳）

ところで，デカルトによる指数記号の発明からエッセルバッハの科学的表記の応用的創案に，200 年以上もの時間を要した理由はなんであろうか．著者が考えるに，メートル法以前の度量衡の殆どが 10 進法基準となっておらず，17 世紀から 18 世紀にかけてはそれが考え出される状況ではなかった．それはポンド・ヤード法や前節で挙げた昔の度量衡の例を参照すれば明らかである．ステヴィンが提言した 10 進法による度量衡は，フランス革命政府と云う尋常ならざる為政者の出現を待って，初めてメートル法として結実するのだが，そのメートル法にしても普及度合いについては，1867 年のパリ万博の一大キャンペーンまでは遅々たるものであった．

また，電磁気学と云う比較的新しい領域における単位系に対して考案されたのも，単なる偶然ではなかろう．たとえ 10 進法基準になっていても質量や長さなどは伝統の桎梏が強く，そうそう簡単には変えられたとは考え難いからである．更に，エッセルバッハが若く，余計な先入観を持っていなかったであろうことも有利に働いたのではなかろうか．いささか後付けのように見えるかもしれないが，大きくは外れていないと思料する．

余談として，“scientific notation” と云う用語がいつ世に出たかについても簡単に説明しておこう．オンライン版の OED によると，この用語は，1824 年には，既に出版物の中に現れてはいるが，その定義は現在のものとは異なっており，現在の定義での使用例は，かなり遅くて，1915 年とある[57]．それは下記のようなものであった．

対数に関する作業は，科学的な研究においてとても一般的な $2.417\times 10^{-8}$,等の表記法を使用することで，始められる．これは，それ自体が便利であり，しかも対数の指標の取扱を明確化する上でも有益である．学生が，すべての数をこの「科学表記(**scientific notation**)」で表現可能であると考えるようになったならば，対数指標のための規則は必要ではない．

『新入生のための数学に関連する新機軸』[Griffin]（拙試訳）

---

[57] Duke University の Mark Huber は，この用語がコンピューターユーザーにより 1940 年代から 50 年代に創設されたのではないかと推測していたが，1915 年の使用例が発見されてしまったので，彼の説はお蔵入りとなった．

著者は，ここで紹介した 1915 年が，初出年であると確信している訳ではない．1862 年の使用時には，特に名前は付けられていなかったにせよ，半世紀以上もその状態が続いていたとは考えにくいからである．

しかしながら，数学教育に情熱を燃やす数学者グリフィンが，高等数学教育の一環として "scientific notation" を導入しようとしたことは示唆的である．この用例が初出でなかったとしても，20 世紀初頭のペリー，ムーア，クラインの教育改革運動に触発された人物が，この用語を導入した可能性は十分あると考えられるからである．

ただ当時は，"scientific notation" は未だ確定した用語として市民権を得ていなかったことは注意しておく必要があろう．例えば，1902 年のエール大学の心理学研究所の紀要にある Phonetic notation（音声表記）と云う論文の中で，この用語が，現在の定義とは全く異なる意味で使われている[58].

## 6.3 クヌースの矢印表記とコンウェイの鎖状矢印表記

現在，指数表記で収まりきらない巨大数を表示する場合に使用される表記方法としては，クヌース(38)が 1976 年に発表[Knuth]した矢印表記が有名である．実際にはこの表記についての説明は，論文全体の 1/10 くらいしか割かれておらず，クヌース自身がこの表記方法をモーザー数(6.4 参照)やグラハム数(7.3 参照)のような具体的巨大数の表記問題に適用することを意識して考案したようには見受けられない[59]．彼の論文の冒頭には，次のような一節がある．これを見る限りは具体的な問題意識と云うよりも，いささか漠然とした巨大数表記に対する興味に由来するように思われる．

> この論文では、大きな量に対して，我々が，ここでどのくらい上手く対処することが出来るかを議論することにより，我々が、どのくらい遠くに来ているかの評価を試みる積りである．我々は確かに 3 と無限大との間のギャップを狭めてきたのだけれど、最近の結果は、我々が，実際のところ，案外とても遠くには行くことが出来ないことを示唆している．私の目的は，これらの発展に照らして，有限と無限の間の関係を探ることである．
>
> 『数学と計算機科学』[Knuth]（拙試訳）

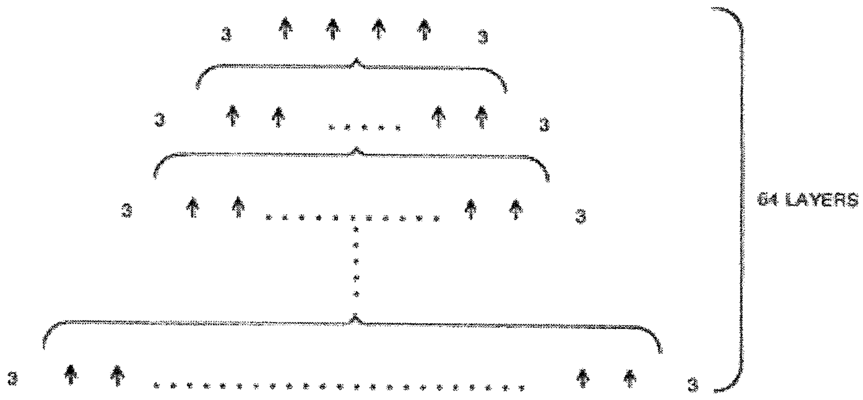
この表記方法を具体的な問題について見事に使ってみせたのは，マルチ

---

[58] Stud. Yale Psychol. Lab. 10 102　A **scientific notation** should be so constructed so as to be capable of providing a suitable transcription for any speech sound.

[59] 少なくとも，具体的な巨大数についての例示はされていない．

ン・ガードナー(63)で，1977 年の論説でグラハム数を次のように明示した．




*Graham's upper bound for the solution to a Euclidean Ramsey problem*

現在ならばより簡潔に，$G(x) = 3 \uparrow^x 3 = 3\underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{x}3$ を使って，$G^{64}(4)$と定義されるべきところであろうが，彼の論文を見れば分るように，クヌース自身は$3 \uparrow^x 3$と云う表記方法を定義していない．

【定義】クヌースの矢印表記

$$x \uparrow y = x^y$$
$$x \uparrow\uparrow y = x \uparrow (x \uparrow\uparrow (y-1))$$
$$x \uparrow\uparrow\uparrow y = x \uparrow\uparrow (x \uparrow\uparrow\uparrow (y-1))$$
$$x \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow y = x \uparrow\uparrow\uparrow (x \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow (y-1))$$

$$x \uparrow^n y = x(n\text{ 個の }\uparrow)y$$

クヌースの矢印表記の登場は，巨大数の表現方法として，指数表記からの決定的な離脱を意味した．もちろん，アッカーマン関数のように，既に指数表記では追いつかないものが現れ始めていたが，それらは多重関数表記で表わされることで済まされていた．これは指数表記 $f(x,y) = x^y$ を加法と乗法を使って定義するようなもので，大変まどろっこしい．

その点，クヌースの矢印表記は，簡潔に巨大数を表現出来る画期的なものであった．しかし，時代の流れは，加速度的に進んでおり，1995 年には，コンウェイ(58)によってクヌースを超える新しい表記方法が提案された．ここでは，コンウェイ自身の言葉を引用することで，彼の鎖状矢印表記の定義を与えておく．

ここで，私たち独自の「矢印の鎖」による表記法を使って，巨大な数を表してみましょう．その表記法では，$a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow b$（矢印はc個）を

$$a \to b \to c$$

と書きます．

$$a \to b \to \cdots \to x \to y \to 1$$

は $a \to b \to \cdots \to x \to y$ のことを表すものとして，

$$a \ldots \to x \to y \to (z+1)$$

を次のように定義します．

$$\begin{array}{ll} a \ldots x & y = 1\text{のとき,} \\ a \ldots x \to (a \ldots x) \to z & y = 2\text{のとき,} \\ a \ldots x \to (a \ldots x \to (a \ldots x) \to z) \to z & y = 3\text{のとき,} \end{array}$$

以下，同様です．ただし，括弧は，その中の数が完全に評価された後で消去するものとします．

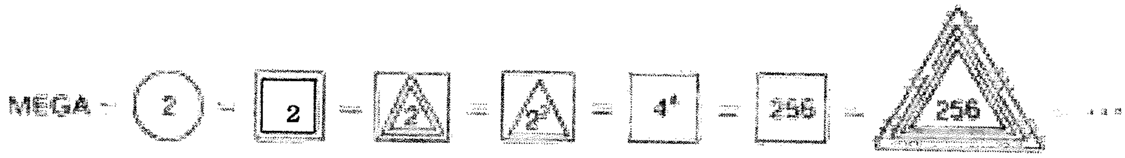
『数の本』[Conway]p.71

クヌースと違って，コンウェイは，既存の巨大数への応用を明確に意識しており，本論でも後述するアッカーマン数，スキューズ数，グラハム数と云った巨大数についても触れている．尚，クヌースの矢印記号の諸性質を少し掘り下げたものとして，Blakley と Borosh の研究論文[Blakley]がある．本論の附録 3 も参考になろう．

## 6.4　スタインハウス・モーザーの多角形表記

ポーランド出身の傑出した数学者スタインハウス(63)は，一般向けの数学啓蒙書，『数学スナップショット』[Steinhaus]，のなかで，次のような巨大数 “Mega” の表示方法を紹介している．

非常に大きな数を書き下すことは簡単なことである．もし我々が$n^n$ と書く代わりに n（三角形）と書き，「$n$個の三角形のなかの$n$」の代わりに$\boxed{n}$と書き，「$n$個の四角形のなかの$n$」の代わりにⓝと書くならばそのような巨大数は簡単に定義することが出来る．そこで数'Mega'=②は次のようになり，既に(30)は大きすぎていかなる物理的な意味付けを持たない．




30

そして我々が通常の数表記を諦めた理由も明らかである．（読者は⑩で与えられる'Megiston'を説明することを試みるのも良いであろう．）

『数学スナップショット』[Steinhaus][60]pp.28-29

カナダの数学者レオ・モーザーは，スタインハウスが，五角形となるべきところを円で表示して多角形表記を終結させてしまっていたものを，一般 n 角形表記にまで定義を自然に拡張した．そして Mega 角形の中に 2 が入って定義される巨大数（Moser 数と呼ばれる）を定義した．[61]

# 7 数学に現れた巨大数

数学の歴史を紐解くと，数学者が，なんらかの具体的な問題を解こうとしたとき，巨大数に巡り合ってしまうことがある．アルキメデスの巨大数などは，その最も有名な例であろう．ただ，彼の場合は，具体的な計算を行う前から，その答えが，相当な巨大数になることは判っていたが，中には，期せずして巨大数を発掘してしまう場合もある．本章では，このような数学者の発見した巨大数の例を集めてみた．

## 7.1 スキューズ数

数論の世界では，素数定理と云う美しい定理がある．その内容は極めてシンプルで，次のように簡潔に書き表すことが出来る．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{Li(x)}=1$$

但し，

[60] (30)の ' MEGA ' の隣の隣にある二重四角の中の数は原著では 4 であった．誤植であろう．また，編集の都合で原文の a をすべて訳文では n に換えた．
[61]『大きな数』[Davis]による．

$$\pi(x) = x\text{以下の素数の個数}$$

$$Li(x) = \int_2^x 1/(\log x)\,dx$$

n が数千万以下と云う小さい数のときは，この近似は過大評価となる．つまり，次のような不等式が成り立つ．

$$\pi(x) < Li(x)$$

リーマンは，有名なリーマン仮説を提唱した論文[62]の中で，この不等式が恒常的に成り立つような所見を述べている[63]．しかし，n がもっと大きくなっていくと，この近似は，過大と過少の間を無限回行ったり来たりすることが，J.E.リトルウッド(29)によって 1914 年に示された．これを受けてリトルウッドの弟子だったスキューズ(34)は，1933 年に，リーマン仮説を認めれば，$n$ が

$$10^{10^{10^{34}}}$$

になる前に，最初の入れ替わり起こることを示した．更に，1955 年には，リーマン仮説抜きで，$n$が下記の数以下で入れ替わりが起こることを証明した．

$$10^{10^{10^{964}}}$$

$10^{10^{10^{34}}}$のことを第一スキューズ数，$10^{10^{10^{964}}}$を第二スキューズ数と言い，後に紹介するグラハム数が現れるまでは，その存在に自明でない証明を要する最大の数であると言われていた[64]．

---

62 『与えられた数より小さい素数の個数について』(ベルリン学士院月報 1895 年 11 月) Riemann は，素数定理を証明する積りでこの論文の研究を始めたと言われている．しかし，Riemann 予想の解決が想定外に困難であったため，この論文の続編は書かれないままとなった．現在の立場から言えば，Riemann は素数定理の攻略について戦略ミスをしたと思われる．つまり，素数定理を証明するだけなら Riemann 予想までは必要なく，ゼータ関数の自明でない零点の実部は決して 1 でないことを示せば十分だったからである．こちらは Riemann 予想よりも遥かに易しい．しかし，Riemann の視線の先は，素数定理を超えて遥か先に向かっており，現在も，最もチャレンジングな問題として，多くの数学者から注目されている．

63 「実際，Gauss と Goldschmidt によって$x = 3{,}000{,}000$までなされた，$x$より小さい素数の個数と$Li(x)$の比較によれば，この個数の方が最初の 100,000 番目まで常に$Li(x)$より小さいことが判明しているし，しかも$Li(x)$とこの個数の差は変動をともないながら$x$とともに次第に増大している．」(平井幹人　訳)[鹿野]p.28

64 Littlewood 自身のエッセイ集[Littlewood]の中の「大きな数」で Skewes 数は紹介され

2000 年のベイズとハドソンの論文によると，スキューズの定理はかなり改良され，リーマン予想を仮定しなくても，$1.397 \times 10^{316}$未満のある$x$に対して，$\pi(x) > Li(x)$となることが判っている．従って，今となっては，スキューズ数には歴史的興味しか残っていない．

## 7.2 モンスター群

群 G は，一般的に，群 G 自身と単位元からなる単位群{1}を正規部分群として持つ．このような正規部分群を自明な正規部分群と呼び，自明な正規部分群の他には正規部分群を持たない群を単純群という．群 G の持つ群論的に重要な性質は，群 G の正規部分群 N と G/N に受け継がれるので，群 G の群論の問題は，G よりも小さな群 N と G/N の対応する問題に帰着する．従って，すべての単純群が分類でき，その各々の単純群についての情報が詳らかになれば，すべての群の性質も本質的には解明されたことになる．このような指導原理により，100 年を超える長い時間と多くの数学者の努力の結果，1981 年に，有限単純群の分類が完成した．その中で，26 個の散在型単純群で位数最大の群であるモンスターが，この名前はコンウェイ(36)が付けたのだが，1973 年に，発見された．その大きさは，以下のように約 $8 \cdot 10^{53}$という巨大なものであった．

$$
\begin{aligned}
&2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \\
&= 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \\
&\approx 8 \cdot 10^{53}
\end{aligned}
$$

数学でその存在に自明でない証明を要する巨大数としては，既に紹介したスキューズ数や次に紹介するグラハム数の方が遥かに大きいが，これらは，求める数の存在する上限値であって，求める数そのものではない．従って，将来的には，証明の評価式が改善されて小さくなっていく可能性があり，実際，当初のものに比べてかなり小さくなっている．その点モンス

---

ている．また，Ian Stewart は『数学の魔法と宝箱』[Stewart]の中で Skewes 数について説明した後，「1969 年の（自分の）博士論文の中で，整数$n$によって決まるある性質をリー代数がすべて，$n$を 5plexplexplex…plex(plex が$n$個)に置き換えたもっと都合のいいもう一つの性質をもっていることを証明した.」と書いている．ここから，Skewes 数をあっさり超える巨大数が作れているのだが，あまり有名ではない．きっと，他にも，巨大数を使った命題や証明が，知られていないだけで，あちこちに潜んでいることだろう．

ターの位数は，未来永劫変わることはない．ただ，コンウェイ(59)は「既にもっとよい候補者によって追い抜かれているはず」と 1996 年時点で言っている．

## 7.3 ラムゼイ理論とグラハム数

現在，「ラムゼイ理論」と呼ばれる離散数学の一分野がある．これは，「集合 X が十分大きければ，ある種の等質性をもった大きな部分集合 Y が生起する（ラムゼイ性）」と云う現象についての研究を指すものとされている．例えば，「$n$個の引き出しに$n+1$個のボールをしまいこめば，少なくとも一つの引き出しには 2 個以上のボールが入っている（部屋割り論法）」や「6 人以上の人がパーティーに参加すると，その内お互いが全て知り合いであるメンバーが 3 人以上いるか，さもなくばお互いが全く知り合いでないメンバーが 3 人以上いるかのいずれかが成立つ（パーティー問題）[65]」なども簡単なラムゼイ性の例となっている．

通説では，1928 年，ラムゼイ(25)が書いた形式論理学の 8 ページの論文が，彼の死後 1930 年に発表されたものなのだが，この理論の嚆矢であるとされている．但し，多くの独創的理論と同様，この理論にもいくつかの先駆的研究があった．アレキサンダー・ソイファは，そのようなものの例として，1892 年のヒルベルトの立体補題，1916 年のシューアの定理，1927 年のボーデット・シューア・ファンデルヴェルデンの定理及び 1928 年の一般化されたシューアの定理を挙げている[Soifer]．[66]

ラムゼイが歴史的論文を書いてから 40 年後の 1968 年に，ロナルド・グラハム(33)は，エルデスとハジナルによって提唱されたラムゼイ理論の次のような未解決問題の，上手い解法を発見した[67]．

**(エルデスとハジナルの問題)**　6 頂点完全グラフ$K_6$を部分グラフとして含まないグラフ G で単三内在のものはあるか．

---

[65] この問題自身の証明は簡単であるが，「必ず 4 人以上がお互いに知り合いであるか，5 人以上がお互いに知らない者どうしであるメンバーがいるためには何人以上をパーティーに呼べば良いか」と云う問題で「25 人」と答えるためには膨大な計算が必要で，110 台のコンピュータを同時作動させて，やっとのことで答えに辿り着いた．ここの 4 人を 5 人にするだけでもう正確な答えは判っていないし，この人数をもう少し増やすだけで，コンピュータによる解決が，絶望的になるほど計算量が膨れ上がってしまう．

[66] 個人的には，Dirichlet の鳩ノ巣論法も含めたいところである．

[67] 実際には，J.H.van Lint によって最初に解決されたのだが，それは出版されていない．

更に，1970 年，彼は，次の定理に関連して，どの程度 $n$ が大きければこの定理が確実に成り立つか，と云う解の上限値を考察することにより，現在，グラハム数と呼ばれる巨大数を導き出した．

| |
|---|
| **(グラハムの定理)**　n 次元超立方体の $2^n$ 個の頂点のそれぞれを互いに全て線分で結ぶ．次に 2 つの色を用いて連結した線分をいずれかの色に塗り分ける．<br>このとき $n$ が十分大きければ，どんな塗り方をしても，ある平面とその平面上にある 4 点が存在して，それら 4 点間を結ぶ 6 本全ての線分が同一の色である． |

実際には，グラハムは，論文ではこの巨大数を発表しておらず，1977 年，マルチン・ガードナーが，「グラハム数」と云う名前を付してサイエンティフック・アメリカン誌に掲載[Gardner]したことで一挙に有名になった．当時としては，「数学的証明のなかで使われたことのある最大の数」であるとみなされ，ギネスにも認定されていた．[68] 既に述べた通り，ガードナーは，クヌースの矢印記号を使ってこの巨大数を表現した．

グラハム自身は，ロートシルトと共著で書いた 1971 年の論文[Graham]で，現在小グラハム数と呼ばれる，より小さな，つまりより精度の高い解の上限値を与えている．この時点では，クヌースの便利な矢印記号は，未だ世に出ていなかったので，グラハムは，次のような回りくどい表現にせざるを得なかった．

$$F(1,n) = 2^n, F(m,2) = 4, \quad m \geqq 1, n \geqq 2,$$
$$F(m,n) = F(m-1, F(m,n-1)), m \geqq 2, n \geqq 3.$$
$$\mathrm{N}^* \leqq F(F(F(F(F(F(F(12,3),3),3),3),3),3),3).$$

一方，クヌースの矢印記号を使えば，下記のように簡潔に書ける．

$$G(x) = 2 \uparrow^x 3 \quad \text{と置いたとき} \quad G^7(12)$$

また，コンウェイは，1996 年に，次のような不等式評価を与えている．

$$3 \to 3 \to 64 \to 2 < \ G^7(12) \ < 3 \to 3 \to 65 \to 2$$

---

68 確かに，1980 年発行の"Guinness book of World Records"には記録されているが，このような記録はしばしば塗り替えられるので，最新の情報にはこだわっていないことを先に明言しておきたい．実際，Graham 数よりも大きな，数学的証明のなかで使用された数は，既に，現れているらしい．個人的には，Graham 数や Skewes 数のような評価式の上限に現れるような数ではなく，位数最大の単純群であるモンスターのように，未来永劫変わらない数で競う方が意味深いと思う．7.2 で触れた Conway の予想が当たっているかどうかについては，著者は知らない．

## 7.4　定理の名前に現れた巨大数

これまでは，問題の答えが巨大数である例を取り上げてきたが，中には，定理の名前に巨大数を見出すことのできると云う面白い例もある．

大数の法則(law of large numbers)の大数(large numbers)は，巨大数(large numbers)と元の名前が同じであり，慣習を無視すれば，「巨大数の法則」と訳せないこともない．

しかしながら，この定理が示唆する大数は，通常の解析学の$\varepsilon-n$論法における $n$ と本質的に変わりはなく，本来は殊更「巨大数」性を強調する必要はない．

この定理は，収束のスピードが，$n$の大きさによって評価されることが一般社会にまで認識されている珍しい例である．ギャンブルや保険といった人間臭い営みの中で根付いた概念だからであろう．

大数の法則は，経験則として古くから知られていたが，証明が与えられたのはヤコブ・ベルヌイの『推論術(Ars Conjectandi)』(1713) が初めてである，と言われている．但し，そこでは「大数の法則」とは呼ばれておらず，この印象的な命名は，悪名高い『確率計算の一般規則に先行する，刑事及び民事事件での判決における確率』(1837)においてポアソン(56)が書いた"la loi des grands nombres"に由来するとされている．

面白いことに，ポアソン分布に由来する「少数の法則」は，ポアソン自身が名付けたものではなく，統計学者 Ladislaus Bortkiewicz が 1898 年に書いた本の題名『少数の法則(Das Gesetz der kleinen Zahlen) 』が，初出らしい．

## 7.5　巨大数と意識されない巨大数

本章の最後に，スキューズ数やグラハム数のように具体的に問題に対する解として顕現するのではないために，それ自身は極めて巨大な数であるにもかかわらず，巨大数として扱われることの少ない二つの例を挙げておこう．

・ゲーデル数
・チューリングの記述数

この二つの数の凄味は，プログラムが見慣れた風景となり，情報の自然数によるコード化を当然のこととして受け入れられている現在では，逆に

判りにくいかもしれない．例えばMicrosoft の Word2003 の実行ファイルWinWord.exe のサイズは，12,047,560 バイトなので，10 進数に換算すると$10^{29,000,000}$くらいの数に相当する．無量大数よりもエディントン数よりも googol よりも遥かに大きい．しかし，現在の我々はプログラムのサイズとして見ている限り，この巨大数をそれほど巨大であるとは感じられないであろう．ゲーデル数もチューリングの記述数も，端折っていえばこのようにソフトウェアのサイズを数で表現したようなものである．

【ゲーデル数】　ゲーデル数が，不完全性定理の発表された 1931 年の論文[69]の中に現れたことは，人口に膾炙する歴史的事実である．ゲーデル(25)は，この論文において，下表のように定記号や型 n の変項を素数冪に対応させることで，原始記号の有限列　$a = a_1 a_2 \dots a_k$　から自然数への巧妙な写像$\Phi(a)$と定義した．

ここで，$a_i$を原始記号とすれば，$a$は原始記号または原始記号の有限列となる．上記の表に従って各$a_i$に自然数$n_i$を対応させ，大きさの順に並べた素数列$p_i$の指数としてこの$n_i$を与えた${p_i}^{n_i}$を掛け合わせた自然数を$\Phi(a)$と書く．すなわち，次のように書ける．

$$\Phi(a) = 2^{n_1} \times 3^{n_2} \times \dots \times {p_k}^{n_k}$$

| 定記号 | 説明 | 対応自然数<br>（奇数） | 型$n$の変項<br>$(n \geq 1)$ | 対応自然数<br>(13 超の素数)$^n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | ゼロ | 1 | $x_n$ | $17^n$ |
| f | 後者関数 | 3 | $y_n$ | $19^n$ |
| ～ | 否定 | 5 | $z_n$ | $23^n$ |
| ∨ | または | 7 | ・・・・・・・ | ・・・・・ |
| Π | すべての | 9 | | |
| ( | 左括弧 | 11 | | |
| ) | 右括弧 | 13 | | |

今日では，この$\Phi(a)$を$a$のゲーデル数と呼ぶ．ゲーデル自身は，ゲーデル数が論理式と１：１に対応する自然数であることは注意していても，それがかなり巨大な数になることには全く触れていない．

---

69 「プリンキピア・マテマティカ」及びその関連体系における形式的に決定不可能な命題について

【チューリングの記述数】　チューリング(24)が記述数を定義するのは，有名なチューリングマシンを世に問うた論文「計算可能数とその決定問題への応用」（1936 年）においてであった．チューリングマシンの定義や計算可能性との関連は，現在では，情報学科で必須テーマとして扱われているので，ここでは詳しく論じないが，記述数の定義に関連するところは，原論文に沿って紹介しておく．

チューリングは，計算可能数を「小数表現が有限の手段で計算できる実数である」と冒頭で簡単な定義を与えている．ここで現れる「有限の手段」の正当性の根拠として「人間の記憶は必然的に有限である」と云う事実に根拠を見出せると明言しており，彼がチューリングマシンを人間の計算者をモデルとしていることが窺われる．チューリングマシンは，人間の脳にあたる制御部と目と手に対応するヘッダー，計算用紙，記録用紙にあたるテープからなる．マシンの「制御部」の記憶内容は現在では「状態」と名付けられているのだが，彼の論文では，「実数の計算をする人間を，『m 配置』と呼ぶ有限個の状態$q_1, q_2, \dots, q_R$だけをとれる機械になぞらえることができる.」と「m 配置」（m は machine を表す）なる用語を使っている．彼が計算者の筆算における心の状態を機械の制御部の内部状態で模写しようとしたことが，見て取れる．このような模写は，更に続き「この機械には（計算用紙に相当する）「テープ」が供給される.」

チューリングは，チューリングマシンで計算可能な数を計算させるだけではなく，チューリングマシンそのものを記述数と云う自然数によって表現してみせた．チューリング自身が論文の中で取り上げた例として，「数 1/3 を計算するチューリングマシン」がある．彼はそれを愚直に計算し，次のような巨大数を算出してみせる．

31332531173113353111731113322531111731111335317

ここでは，数 1/3 を計算するチューリングマシンだったので，上記のような比較的小さな，と言っても 47 桁もあるが，記述数で済んでいるが，これが，π を計算するチューリングマシンであれば，記述数の桁数が，もっと跳ね上がることは，容易に推察出来る[70]．余談ではあるが，π 計算の記述数が，どれほど巨大であったとしても，それは有限であり，π の無限の

[70] チューリングのオリジナルとは異なる定義なので単純な比較は出来ないが，R.Penrose は万能チューリングマシンの記述数を計算して，それが 1653 桁であることを示して見せた．

小数展開の情報が，その有限の数の中に完全に組み込まれていると云う認識は深淵である．巨大数による無限表現とも言い得るであろう．更に，チューリングは，このようにしてチューリングマシンで計算出来る数を計算可能数として定義した後，それらの記述数が可算であるが故に，計算可能数は可算であり，よって，殆どの実数は計算不可能であることを証明した．

# 8 増加関数の視点による巨大数

ここまでは，巨大数を静的(static)なものとして扱ってきたが，その発展の歴史を俯瞰した目で見るならば，巨大数は，新しい数表記が現れたときに，劇的に大きくなってきたことが分るであろう．最初の革命は，アルキメデスによる指数の発明であった．実際のところ，現在でも，指数表記があれば，大抵の数学の問題では事足りているように見える．後で紹介するアッカーマン関数やモーザー数，グラハム数は，その珍しい例外に属し，指数表記では収まりきらなかった．これらの巨大数を適切に表現するために，クヌースの矢印表記，更にコンウェイのチェーン表記などが発案[71]され，そのたびに表現出来る巨大数は爆発的に膨らんでいった．このような歴史的変遷を瞥見すると，その背後にあるのは，より急激に増加する関数をいかに構成するか，と云う dynamic な問題意識であるように見えるかもしれないが，それは，現代を生きる我々の視点である．実際の増加関数の歴史は，どのような問題意識の上に則って進んで行ったのであろうか．

関数概念が精密化するのは，19 世紀における，概念と証明の厳密化運動の一環であるが，ディリクレの与えた超越的な対応関係による定式化とは別に，再帰的な定義付けもこの時代に現れた．ロッド・アダムスの『再帰関数と計算可能性の初期の歴史：ゲーデルからチューリング』[Adams]によると，1861 年に，グラスマン(52)により，1881 年には，パース(72)により，自然数の加法や乗法を定義する際に，再帰的定義が使われた．しかし，二人の先駆的な業績は，彼等の社会的地位や地理的環境からか，殆ど世間に注目されることはなかった．今日，再帰関数の鼻祖は，デデキントであり，1888 年の歴史的名著「数とは何か，そして何であるべきか」において，加法や乗法，指数を厳密に定義する必要に迫られ，これらを完

[71] Knuth が，これらの問題を意識して矢印記号を発案したと云う明白な証拠はないが，巨大な数を表現するために考え出したことは明記されている．一方，Conway は，少なくとも Ackermann 関数については，それも意識した上でチェーン表記を考えたことが窺える．

全帰納法により定義したことが，再帰関数の始まりとするのが通説[72]である．彼は，このアイデアの自然な拡張として，帰納的に定義され得る原始帰納関数を定義した．しかし，本格的な研究は，1923 年のスコーレム(36)を待つことになる．

さて，巨大数史の視点から原始帰納関数を論じるとき，1925 年に発表されたヒルベルト(63)の論文「無限について」が，少なくとも二つの意味で重要な役割を果たしている．一つは，加法，乗法，冪を拡張する$n$階超冪指数関数[73]$\varphi_n(a,b)$を，現在の用語で言うところのハイパー$n$演算子$\mathrm{H}_n(a,b)$を意味するのだが，$a,b$を変数とする原始帰納関数として定義し，その定義出来るための条件まで言及していることである．今一つは，「$\varphi_n(a,b)$は$a,b$を変数とすれば原始帰納関数であるが，$n$を変数とした場合は，原始帰納関数とはなり得ない」と云う予想を提起したことであろう．この予想が，非原始帰納関数であるアッカーマン関数を定義する呼び水となったのである．これについては，次節で詳しく論じることとする．ここでは，この演算子の現在の定義を明示した後で，ヒルベルトの論文の該当部分を紹介し，そこでヒルベルトが注意している内容が，原始帰納関数の定義にどのように対応するかを見ることにする[74]．

【現在の定義】

$$\mathrm{H}_n(a,b)=\begin{cases} a+1 & (n=0)\\ a & (n=1, b=0)\\ 0 & (n=2, b=0)\\ 1 & (n\geq 3, b=0)\\ \mathrm{H}_{n-1}\big(a,\mathrm{H}_n(a,b-1)\big) & (\text{other}) \end{cases}$$

上記のように，帰納的に定義された$\mathrm{H}_n(a,b)$は，下記のような演算を定義していることが，容易に確かめられる．

$\mathrm{H}_0(a,b)=a+1$ 後者関数(successor)
$\mathrm{H}_1(a,b)=a+b$ 加法関数(addition)
$\mathrm{H}_2(a,b)=a\cdot b$ 乗法関数(multiplication)
$\mathrm{H}_3(a,b)=a^b=a\uparrow b$ 冪指数関数(exponentation)

[72] 例えば，“From Frege to Godel” [Heijenoort]では，そのように扱われている．
[73] これに対応する定番の日本語訳を著者は知らないが，このくらいの訳語が適当と考えた．
[74] 原始帰納関数自体の歴史についてならば，Gödel が不完全性定理を証明する際に，形式的体系の算術化を目的として導入したことに触れない訳にはいかないが，本論の主題から外れるので割愛する．

$$
\left.\begin{array}{l}
\mathrm{H}_4(a,b) = a \uparrow^2 b \\
\mathrm{H}_5(a,b) = a \uparrow^3 b \\
\mathrm{H}_6(a,b) = a \uparrow^4 b
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\text{tetration}^{75} \\
\text{pentation} \\
\text{hexation}
\end{array}
$$

・・・・・・・・・

$$\mathrm{H}_n(a,b) = a \uparrow^{n-2} b \qquad (n \geq 3)$$

【ヒルベルトの定義】

関数$a+b$について考察してみよう;この関数から$n$重の繰り返しを行うことで次の等式を得る.

$$a + a + \cdots + a = a \cdot n.$$

同様にして，$a \cdot b$から次式につながり，

$$a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n,$$

そして，更に，$a^b$から次式へとつながる.

$$a^{(a^a)}, a^{\left(a^{(a^a)}\right)}, \ldots$$

$\varphi_4(a,b)$は次の数列の$b$番目である.

$$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{\left(a^{(a^a)}\right)}, \ldots$$

これと対応する方法で，我々は$\varphi_5(a,b)$, $\varphi_6(a,b)$,等に達する.

確かに，代入と帰納によって変数$n$に対して$\varphi_n(a,b)$をここで定義することが出来たのだが，これらの帰納は通常の逐次帰納[76]ではない；むしろ，我々は多様な同時再帰法に導かれるであろう．それは，即ち，異なる変数上の再帰法であり，その解は通常の逐次帰納再帰法に帰着する．それは関数変数の概念が使える場合のみ可能である；関数$\varphi_a(a,a)$は数論的変数$a$の関数の例であり，<u>もし我々が数論的変数だけを認めたならば，それは代入と通常の逐次帰納法だけでは定義され得ない[77].</u> どのように我々が$\varphi_n(a,b)$を関数変数を使って定義するかは下記の公式によって示されている：

$\iota(f,a,1) = a$

$\iota(f,a,n+1) = f\big(a, \iota(f,a,n)\big);$

$\varphi_1(a,b) = a + b,$

$\varphi_{n+1}(a,b) = \iota(\varphi_n, a, b).$

ここで$\iota$は特別な 3 変数の関数を表し，第 1 変数は，それ自体が，二つの通常の数論的変数の関数である.

『無限について』(1925) [Hilbert]（拙試訳）

現在の定義が，ヒルベルトのオリジナルの定義に比べて簡潔で，しかも explicit な表現が与えられているのは，クヌースの矢印表記に依るところが大きいことを留意しておく必要がある．また，ヒルベルトが強調してい

75 tetration, pentation, hexation は Goodstein(35)の命名による．[Goodstein: 1947]p.129

76 原始帰納法のことを意味すると考えられる．その定義は次頁参照.

77 この主張は，後節で紹介する 1928 年の Ackermann の論文で，証明されることになる.

る代入と帰納法によって定義される関数とは，現在の言葉で言えば，原始帰納関数[78]であろう．

## 8.1 アッカーマン関数と多重帰納関数

アルキメデスが編み出した指数概念では表現しきれない具体的な有限数が現れたのは，管見の限りではあるが，アッカーマン関数が，初めてではなかろうか．ここでは，アッカーマンが，どのような問題意識からこのような巨大数を生成する急激な増加関数を考えたのかについて考察する．

前節で触れた 1925 年の論文で，ヒルベルトは，カントールの連続体問題を解こうとしていた．結局は，この目的を果たすことは出来なかったが，それに関連して，加法，乗法，冪，超冪，…を原始帰納関数$\varphi_n(a,b)$として構成しながらも，$n$を変数とした場合は，原始帰納関数とはなり得ないであろうことを証明抜きで述べている．(ヒルベルト予想)

この予想に対し，ヒルベルトの弟子であるアッカーマン(32)は，1928 年に，現在，アッカーマン関数と呼ばれる関数を定義することで，肯定的に解決した．アッカーマンの証明の骨子は，ヒルベルトが与えた$\varphi_n(a,b)$を少し変形して，次のような$\phi(a,b,n)$を定義し[79]，$\phi(a,a,a)$がいかなる原始帰納関数よりも急激に増加すること[80]を示すことで，$\phi(a,b,n)$は原始帰納関数ではなく，従って，$\varphi_n(a,b)$も$n$の関数として見れば原始帰納関数ではない，ことを示すことであった．

---

78 【原始帰納関数の現在の定義】
原始帰納関数とは，定義域と値域が非負整数である非負整数個の引数をとる関数で，引数に対し，

1. ゼロ関数: $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$
2. 後者関数: $f(x) = x + 1$
3. 射影関数: 複数の引数を持つ関数から，$i$ 番目の引数を返す関数
$f(x_1,\ldots,x_n) = x_i$
4. 合成作用素: $f$ と $g$ の合成関数 $h$
$h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n))$
5. 原始帰納作用素: $f$ と $g$ の原始帰納関数 $h$
$h(0,x_1,\ldots,x_k) = f(x_1,\ldots,x_k)$;
$h(n+1,x_1,\ldots,x_k) = g(h(n,x_1,\ldots,x_k),n,x_1,\ldots,x_k)$

以上の 3 つの関数と 2 つの作用素（操作）を有限回適用した関数である．

79 現在の Ackermann 関数と$\phi(a,b,n)$の関係は
$A(x,y) = \phi(2,y+3,x) - 3 \quad for\ x \geq 3$ である．

80 任意な原始帰納関数に対し，十分大きな定数 c を取れば，その先ではその原始帰納関数よりも大きくなる．

【オリジナルのアッカーマン関数】

$\phi(a,b,0)=a+b$
$\phi(a,0,1)=0$
$\phi(a,0,2)=1$
$\phi(a,0,n)=a \quad n\geq 3$
$\phi(a,b+1,n+1)=\phi(a,\phi(a,b,n),n)$

現在の標準的なアッカーマン関数は，1935 年に，ハンガリー出身の女流数学者ローザ・ペータ(30)によって定義された下記のような２変数関数である．彼女はまた，その論文のなかでアッカーマン関数の上記の特異性の本質が，対角線論法に由来することも明らかにした．

$A(0,y)\ =\ y\ +\ 1$
$A(x\ +\ 1,0)\ =\ A(x,1)$
$A(x\ +\ 1,y\ +\ 1)\ =\ A(x,A(x\ +\ 1,y))$

竹内外史氏(46)は，1972 年に，上述のヒルベルト予想に関連させて，下記の問題を学習上の問題意識喚起のために紹介している．これは，巨大数の創生が，関数階層の考えに基づいて，急激に増加する関数の構成に依存すると云う現代の巨大数論の基本的な問題意識に繋がっている．

原始帰納関数によっていくらでも能率よく大きくなる関数が作れるか？[竹内]

ちなみに，アッカーマン関数で定義される巨大数を少し紹介しておこう．3 の指数で表わされる 1 番目から 3 番目までのアッカーマン関数値 A(1,3)=5,A(2,3)=9,A(3,3)=61 は緩やかな増加であるが，4 番目のアッカーマン数 A(4,3)は，$2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}-3$であり，5 番目のアッカーマン数 A(5,3)に至っては，巨大すぎて，たとえその数字を A(4,3)のように指数表記を使って略記し、かつ宇宙サイズの紙上に書き記そうとしたとしても書ききれない．

さて，1936 年，R.ペーター(31)は，多重帰納関数を定義することで，アッカーマン関数よりも「能率よく大きくなる関数」を系統的に見つけることに成功した[Péter:1936]．彼女の定義によれば，原始帰納関数は，１重帰納関数であり，アッカーマン関数は，２重帰納関数に位置付けられる．ここでは，彼女の主著『再帰関数』[Péter:1967]より，多重帰納関数を定義している箇所を紹介しておく．

単純入れ子型の再帰関数を簡略化するのに用いられる手法で，初期値を正規化することに

よって，一般k重入れ子型再帰関数は，次のような「正規型」に導かれる：

$$\varphi(n_1,\cdots,n_k)=0\ ,\ n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_k=0 \text{ のとき}$$
$$\varphi(n_1+1,\cdots,n_k+1)=\beta(n_1,\cdots,n_k,\varphi_1,\cdots,\varphi_k)\ ,$$

ここで $i=1,2,\cdots,k$ に対して，

$$\varphi_i=\varphi\Big(n_1+1,\cdots,n_{i-1}+1,n_i,\gamma_1^{(i)}(n_1,\cdots,n_k,\varphi(n_1+1,\cdots,n_{k-1}+1,n_k,)),$$
$$\cdots,\gamma_{k-i}^{(i)}(n_1,\cdots,n_k,\varphi(n_1+1,\cdots,n_{k-1}+1,n_k))\Big)$$

ここでの関数 $\beta$ と $\gamma_j^{(i)}$ は$i=1,2,\cdots,k-1;j=1,2,\cdots,k-i$ に対し，原始帰納と代入によって最初の定義で使われていた関数から構築され得る；それらは**既知関数での原始帰納**であると呼ばれる．

この構成で唯一の入れ子が発生する．

$k$ >1 に対して高々$k$変数の関数が$k$未満の変数上の再帰によって定義されるならば，それはまた正規型の$k$重再帰と代入によっても定義され得る．もし，例えば，次の繰り返しが関数$\varphi(n_1)$を生じさせるとするならば

$$\varphi(0)=0,$$
$$\varphi(n_1+1)=\beta(\varphi(n_1))$$

次式を設定することにより

$$\beta(n_1,\cdots,n_k,a_1,\cdots,a_k)=\beta(a_1),$$

$i=1,2,\cdots,k-1;j=1,2,\cdots,k-i$ に対し，$\gamma_j^{(i)}(n_1,\cdots,n_k,a_1)=n_1$

我々は$k$重再帰関数の正規型の特別な場合を次のように書き下すことが出来る．

$$n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_k=0 \quad \text{の場合} \quad \varphi(n_1,\cdots,n_k)=0$$
$$\varphi(n_1+1,\cdots,n_k+1)=\beta(\varphi(n_1,\cdots,n_k))$$

それ故，$\varphi(n_1)$は次式の代入によって生じる．

$$\varphi(n_1)=\varphi(n_1,\cdots,n_k)$$

と言うのは，$n_1=0$の場合に対しこれは確かに正しくて，その定義からこの性質が$n_1$から$n_1+1$に移ることが容易に示されるからである．

0 と$n_1+1$から有限回の代入と多重再帰によって構築され得る関数は多重再帰関数と言う；高々$k$重再帰がその構築に採択されている場合，それらの関数は$k$-再帰であると言われる．（これにより，原始帰納的関数は 1-再帰であるとも言うことが出来る）上記の命題（§14 でその証明のために戻るであろう）はまた以下の方法で定式化され得る：すべての$k$-再帰関数は原始帰納関数から代入と$k$−重再帰により正規型に構築され得る．しかしながら，すべての原始帰納的関数を一つの基底として捉える必要はまったくない．なぜなら§17 の No.17 によれば，すべての原始帰納関数は関数$n+1$，平方数剰余(n)と$a+n$から代入と一変数関数の（0 点における）繰り返しによって構築され得るからである；しかしながら，最後の種類の定義は，すべての$k$に対し，正規型の$k$重再帰と代入に変えられる．**そういうわけで，すべての$k$-再帰関数は初期関数$n+1$，平方数剰余(n)[81]と$a+n$から，有限回の代入と正規型での$k$重再帰によって得ることができる．**

『再帰関数：§10. 7』[Péter:1967](拙試訳)

[81] 元々の定義は$quadres(n)=n\dot{-}(\sqrt{n})^2$で，$n$と$n$に最も近い平方数との差を意味する．

このようにして，$k$重帰納関数が定義され，アッカーマン関数を超える急増加関数列もまた，$k \geq 3$なる$k$重帰納関数によって定義され得ることが明らかになった．しからば，いかなる計算可能な関数も，適当な$k$に対する$k$重帰納関数として定義出来るのであろうか．実は，どんな$k$重帰納関数をも凌駕する急増加な計算可能関数が，存在することが証明されている．しかも，それは，抽象的な存在証明ではなく，次節で扱うグッドステイン数列やヒドラゲームにより具体的に与えられている．

## 8.2 グッドステイン数列とヒドラゲーム

1944 年，イギリスの数学者グッドステイン(32)は，現在，グッドステイン数列と呼ばれる不思議な数列を提唱した[82]．この数列は，任意の自然数から出発して，順に生成されていくのもので，途中で猛烈な勢いで増加することがあるが，それでも必ず有限番目には 0 となることが，集合論で有名な「順序数定理：順序数の減少列は必ず（有限回で）終結する」を巧妙に使うことで証明された．40 年近く後の 1982 年になって，カービーとパリスは，この数列の「有限番目には 0 となる」性質が，ペアノ算術では肯定も否定も証明出来ないことを示した．それ故，現在の基礎論の教科書では，この命題は，ゲーデルの第一不完全性定理の自然な例として特筆されている．しかし，巨大数論の立場からは，与えられた自然数$n$から生成されたグッドステイン数列が 0 になるまでの，グッドステイン関数$G(n)$[83]と呼ばれる，項の数の増加具合を評価する方に興味がある．ただ，その前に，グッドステインは，何を意図してこの論文を書いたのかを知る必要があろう．彼が，巨大数を生成する急増加関数を作りたかったはずもなく，不完全性定理の例を紡ぎだすことを目論んでいたとも思えないからだ．

---

[82] 【定義】Goodstein 数列（オリジナルの表記方法は複雑なので簡略な表現に換えた）
Step1: 自然数の対$(n, 2)$に対し，$G_1(n) = n$とおき，$n$を 2 進数で表示し，その指数部も 2 進数で表示し，更に指数部の指数部も 2 進数で表示し，以下同様に繰り返し，すべての指数部が 2 進数で表示されるようにする．
Step2: その基底 2 をすべて 2+1 にする．
Step3: 上記の数から 1 を引いたものを$n'$とし，$(n', 2+1)$を確定させ，$G_2(n) = n'$とおく．
以下，上記のプロセスを繰り返すことによって得られる自然数列，$G_1(n), G_2(n), G_3(n) \ldots$を Goodstein 数列と呼ぶ．

[83] 【定義】Goodstein 関数
「順序数の下降列は有限列である」ことにより，ある自然数$m$に対して，$G_m(n) = 0$でなければならないことが示され，$G(n) = m$で定義される関数を Goodstein 関数と呼ぶ．

そもそも，グッドステインの論文の題名は「制限された順序数定理」であり，彼が「順序数定理」と呼んでいる命題は，前述の「順序数の減少列は必ず（有限回で）終結する」である．そして，「制限された」とは，対象とする順序数を$\alpha < \varepsilon_0$に制限することを意味する．題名の意義を知った上で，序文を瞥見すると，彼の論文の趣旨は明確になる．

順序数の減少列は必ず（有限回で）終結する，と云う命題には，新たな，そしておそらく予期されなかった重要性が付与されたことがある．それはゲンツェンによる「自然数論」の無矛盾性の証明の中で担う役割である．ゲーデルが，証明も反証も出来ない命題を構成したこと，及び無矛盾性の証明が不可能であることを確立したことにより，ある種の形式的システムの枠組みの中で，無矛盾性の証明は，その公理と形式的システムのプロセスを超越する場合にだけで発見され得ることが示された．減少過程の或る数列が，ε（$\varepsilon = \omega^{\varepsilon}$を満たす最初の順序数）未満の順序数による枚挙で，有限であることを証明するのに，ゲンツェンは**超限帰納法**を利用することによって成功した．仮に，**制限された順序数定理**，つまりε未満の降順の順序数はゲンツェンの「自然数論」の中で有限であること，を証明することが出来たとするならば，その数システムは矛盾していると結論付けることが可能である．[84]ゲンツェンは，彼の論文の中で，彼が必要とする超限帰納法の定理を，直感的な論拠によって，証明している．ヒルベルトとベルナイスによって与えられた数論の原則に，ε未満の順序数に対しては，超限帰納法へと帰着させる方法もあるし，アッカーマンによる同様の方法もある．超限帰納法を使ったこれらの証明は，いずれも**有限の立場**ではない．

制限された順序数定理は，これまで受け入れられていた有限の立場でのプロセスの領域からの最小限の逸脱であることが，示唆されているので，この定理が，一般に有限の立場の要件をどの程度まで満たしているかを調べることが，非常に重要となる．この目的のためには，無限のクラスについてのカントール理論をまったくと前提しなくて，実際には，ゲンツェンの論文に記載されている，順序数記号の説明を与える必要がある．しかし，我々の目的にとっては，ゲンツェンとは異なる順序数記号の構築を提示する方が，より簡便である．

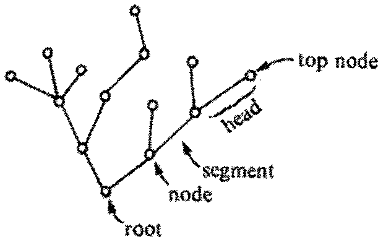
『制限された順序数定理』[Goodstein: 1947]（拙試訳）

前述のカービーとパリスは，この論文 [Kirby]のなかで「ヒドラとヘラクレスの戦い」と云う興味深い数学ゲームを提示し，その中でのヒドラの頭の数の変化が，グッドステイン数列と本質に酷似していることを示した．

一つの**ヒドラ**は有限木であり，それは真直ぐな線分(segment)とそれぞれの線分の連結部分である二つの節(node)からなる有限集合で，すべての節は一意的な線分の道によって**根(root)**と呼ばれる一つの固定された節に連結されている，とみなせるかもしれない． 例え

[84] Gentzen の無矛盾性の証明は Gödel の不完全性定理に対するぎりぎりのせめぎ合いであることが，『コンピュータは数学者になれるか』[照井]pp.184-188 で熱く語られている．

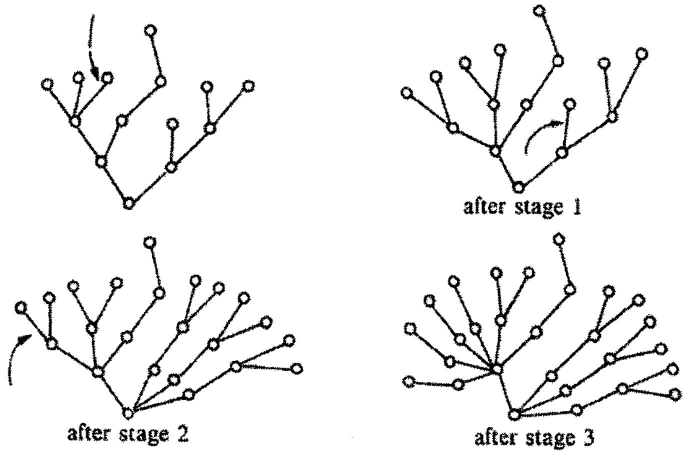
ば：




ヒドラの最上位の節とは，唯一の線分の節であり，根ではない.ヒドラの頭(head)とは，最上端節(top node)とそれにくっ付いた線分のことである.

ヘラクレスと与えられたヒドラとの間で繰り広げられる戦いは，以下のように進展する：第$n(n \geq 1)$段階(stage)において，ヘラクレスはヒドラから一つの頭を切り離す．ヒドラはその後，次のようにして$n$個の「新しい頭」を生やしてくる：丁度今，切り落とされた頭にくっ付いていた節から，一つの線分を超えて根に向かって次の節に到達するまで横断する．この節から，(首切り後の) ヒドラの身体の一部のn個の複製が，生えてくる．その一部とは，丁度今横断したばかりの線分の"上方にある"部分で ，すなわち，根に到達するために，この線分が横断されなければならない処から（上部）のそれらの節と線分である．もし切り落とされた頭が，その節たちの一つとして根を有していたならば，新しい頭が生えることはない.

したがって，戦いは例えばこのように開始するかもしれない，それぞれの段階において，ヘラクレスが切り落すと決めた頭に矢印でマークしたと仮定する：




もしある有限番目の段階のあと，ヒドラがその根以外は何も残っていないならば，ヘラクレスの勝利である．戦略は，任意な戦いの各段階でヘラクレスがどの頭を切り落とすかを決定する関数である．適度に高速必勝法（すなわち，ヘラクレスが任意なヒドラに対して勝つことを保証する戦略）を見つけるのは難しいことではない．もっと驚くべきことは，(戦略によらず) ヘラクレスは必ず勝利することである.

『ペアノ算術に対する到達可能な[85]独立結果』[Kirby&Paris]（拙試訳）

[85] 標準的な訳語が見つからなかったので，ACCESSIBLE を「到達可能」と訳しておいた

与えられたヒドラの木表現を有する順序数を$\alpha$とし，ヘラクレスがヒドラ$\alpha+n$に何回の攻撃で勝つか，その最小値を関数$H_\alpha(n)$で表わす．

$G(n)$と$H_\alpha(n)$は，後述のハーディー階層$h_{\varepsilon_0}(n)$とほぼ同じ階層にあることが示される．つまり，任意な順序数$\alpha<\varepsilon_0$に対し，$h_\alpha(n)\ll G(n)$であり，かつ　$G(n)\ll h_{\varepsilon_0}(n)$である．$H_\alpha(n)$についても同様である．

この２例が示すように，多重帰納関数と一般帰納関数の間には大きなギャップがあり，計算可能性を多重帰納性から定義することが不可能であることを示しているとも言えよう．巨大数生成の立場からは，多重帰納関数の範疇を超える一般帰納関数の中でより急増加な関数を探索すべきなのだろうか．驚いたことに，如何なる一般帰納関数よりも急増加な関数が具体的に定義されている．それは次節に紹介するビジービーバー関数であり，計算不能関数の一種である．

## 8.3　ビジービーバー関数

T.ラドー[86]は，J.ダグラス[87]とプラトー問題で第１回フィールズ賞を競ったこともある，傑出した解析学者である．晩年，彼は興味の軸足をコンピュータサイエンスに移し，1962 年に，いかなる計算可能関数よりも大きな数を弾き出す，計算不能な関数であるビジービーバー（Busy beaver function)BB（N）を定義した．

ここでは，ラドーの論文に沿って，この関数がどのように定義されるかを見ていくことにしよう．冒頭にこの論文の本質を突く言葉が現れている．

本論で用いられる計算不能関数の構成は，<u>非負整数からなる有限な空でない集合は最大値を（その中に）有している</u>という原理に基づいている．

『計算不能関数について』［Rado］（拙試訳）

彼の議論をまとめるならば，次のようになろう．

---

が，数学用語としては，accessible であるとは任意な下降列が必ず有限回で終結する性質を指す．一方で，それまでの独立命題が普通の数学からみるといささか基礎論的なものが多かったのに対し，この論文で扱われている独立命題は，基礎論臭が少ないので「身近な」と云う一般的な語義も，この表題に託して表現しようとしたのではなかろうか．

[86] Tibor Rado(1895-1965)

[87] Jesse Douglas(1897-1965)

(1)　$n$個の内部状態を持つバイナリーチューリングマシン[88]を設定する．
(2)　白地のテープ上で(1)のマシンを起動させ，テープ上に 1 を印字させる．
(3)　(1)のマシンの台数$N(n)$は$N(n) = [4(n+1)]^{2n}$しかない．[89]
(4)　(1)のどのマシンが停止するかを判定するアルゴリズムは存在しない．
(5)　(1)のマシンで少なくとも 1 つは停止することは判っている．
(6)　(1)のなかで停止するそれぞれのマシンがテープ上に印字する 1 のスコアの集合を$\sigma$とおくと，$\sigma$は非負整数からなる有限な空でない集合である．
(7)　冒頭の原理により$\sigma$は最大値を有する．これを$\Sigma(n)$と表記する．

これだけの準備をした上で，主定理（本論文では唯一の定理）が示される．

**定理.** すべての計算可能関数（すなわち，一般再帰的）$f(n)$に対し，$\Sigma(n) > -f(n)^1$である．従って，$\Sigma(n)$は計算可能ではない．

即ち，模式的には，次のような位置づけにあることが分る．但し，アッカーマン関数の構成が，本質的に対角線論法であるのとは異なり，ビジービーバー関数の構成には対角線論法は使われていない．

計算可能関数：ビジービーバー関数＝原始帰納関数：アッカーマン関数

また，逆説的に聞こえるかもしれないが，ビジービーバー関数は，計算不能関数でありながら，$n$が十分小さければ計算出来てしまう．実際，ラドーの論文では$\Sigma(1) = 1$，$\Sigma(2) = 4$，$\Sigma(3) \geq 6$について触れられており，その後の研究で，$\Sigma(3) = 6$，$\Sigma(4) = 13$が示されている．

ラドーは，ユーモアセンスに富んだ人だったようで，この論文の主題となっている計算不能関数にビジービーバー[90]と云った面白いネーミングを与えただけではなく，論文の端々にも，ユーモアに富んだ表現や比喩を見つけることが出来る．参考までに，この論文の最後に付された概要を訳出しておこう．ここでラドーが与えた比喩は，計算不能関数の構成についての絶妙な比喩となっていることが見て取れるであろう．

---

[88] 原論文では，「n 枚カード付バイナリーチューリングマシン」とある．Rado は「内部状態」と云う用語が初心者に理解されにくくので，敢えてこの用語を採用したと言っている．
[89] なぜなら，それぞれの非停止状態に対し，読まれる記号に 2 つの可能性があるので 2 つの遷移が存在する，それで全部で$2n$個の遷移が存在し，それぞれの遷移は書かれる記号に 2 つの可能性，移動する方向—左か右か—に 2 つの可能性を有し，停止状態も含めてどの状態に行くかで$(n+1)$個の可能性を有するからである．
[90] 「大変忙しい仕事人間」を意味するイディオムで，日本語訳を付けるとしたら「猛烈社員」が適切であろうか．

前述の（計算不能関数の）提示について精査することで，（計算不能関数の）構成において，「最大要素の原則：E が非負整数の空でない有限集合である場合，E は最大要素を有する.」だけが使用されていることが示される．この原理は数学のあらゆる分野において，当然のこととして，常用されている．

上記に挙げた我々の例によると，この原理は，たとえ非常に明確に定義された集合 E に対してのみ適用されたとしても，構成的な数学の領域を超えて，我々を連れて行ってしまう可能性があることを示している．もちろん，一般的な日常経験を使って，この種の現象を説明することが出来る．例えば，著者は自動車旅行で，ある高速道路を見つけることを望んでいたときに，工事作業員の現場監督から次のような指示を受けた：「この道を直進しなさい；あなたはいくつかの鋼橋を渡るでしょう；あなたが最後の鋼橋を渡った後，次の交差点で左折してください.」幸いなことに，このアドバイスによって暗示された解けない問題は，工事作業員のメンバーの一人が自発的に提供してくれた情報「あなたが最後の鋼橋を渡った後に，130 マイル離れたリッチモンドに到達するまで，他の鋼橋がありません.」によって解決した．読者が，クリーネの優れた書籍（参考文献）[91]を詳細に研究することによって，この小さな物語が示すことを，具体的な方法で，計算関数の理論におけるいくつかの本当に基本的な点を検証することは面白いかもしれない．

『計算不能関数について』［Rado］（拙試訳）

## 8.4 急増加階層

本章では，加法，乗法，冪，超冪，…と云った原始帰納関数として構成される増加関数とそれらを超えるスピードで増加する二重帰納関数の典型例としてのアッカーマン関数を紹介した後，更なる高次の多重帰納関数，そしていかなる多重帰納関数をも超えて増加する一般帰納関数の具体例としてのグッドステイン関数，更に，いかなる計算可能関数（一般帰納関数と同定される）をも凌駕する計算不能関数の具体例としてのビジービーバー関数についても触れた．本節では，様々なこれらの増加関数を急増加階層(Fast-Growing-Hierarchy)と云う順序数を添数とする標準的増加関数族を与えることで，増加状況が，微分とは違った意味で，計数化される様子を見るであろう．標語的に言うならば「巨大な有限数を無限概念によって統制する」ことになる．これは現代巨大数論の歴史において，個別の数からそれを生み出す増加関数に視点をシフトさせたことと並んで画期的なことであると考えられる．

[91] Kleene,S.C.,Introduction to Metamathematics,Nostrand Co.,Princeton,N.J.,1952.

しかしながら，急増加階層の現代数学における重要性は，巨大数の計数的分類に由来するものではなく，証明論や計算可能性理論，計算複雑性理論で本質的な役割を果たしていること依る．そして，この概念の前身と目され，現在も使用されることのある類似の概念として，ハーディー階層がある．これは２０世紀前半に，多大な業績を残したイギリスを代表する解析学者 G.H.ハーディー(27)の 1904 年の論文 [Hardy:1904]を初出とするものである[Schwichtenberg]．もっとも，ハーディー自身はそのような増加数列が証明論に応用されることなど夢想だにしなかったであろう．その論文で，彼はカントールの定理($2^\alpha > \alpha$)を精密化($2^{\alpha_\beta} \geq \alpha_{\beta+1}$)しようとしただけであった[92]．そのためか，ハーディーのオリジナルの定義と現在の定義には，見掛け上かなりの差異がある．特に，オリジナル論文の枢軸に位置する構成的な対角線論法は，現在の定義では表面上は消し去られており，逆に古い定義によって極限順序数に対する興味深い解釈を再発見することが出来る．

【ハーディー階層の現代の定義】

順序数を添字とする関数族　$h_\alpha: N \to N$　で次の３つの条件を満たすものをハーディー階層と言う．

$h_0(x) = x$

$h_{\alpha+1}(x) = h_\alpha(x+1)$

$h_\alpha(x) = h_{\alpha[x]}(x+1)$ （$\alpha$ が極限順序数の場合)

但し，順序数$\alpha$に対する基本列$\{\alpha[x]: x < \omega\}$は次のように定義する：

(1) $\alpha = 0$ のとき $\alpha[x] = 0$

(2) $\alpha = \beta + 1$ のとき $\alpha[x] = \beta$

(3) $\alpha = \beta + \omega^{\gamma+1}$ のとき $\alpha[x] = \beta + \omega^\gamma \cdot x$

(4) $\alpha = \beta + \omega^\delta$ で$\delta$が極限数のとき $\alpha[x] = \beta + \omega^{\delta[x]}$

【ハーディー階層のハーディー自身による定義】

§3．私はここでカーディナル数が$\alpha_1$のある点集合の実際の構成を思いついた．私はそのような集合が以前に構成されたことがあるとは，もし $2^{\alpha_0} = \alpha_1$ が実際に成り立つならばべつだが，考えていない．なぜならすべての知られている集合はそれらのカーディナル数として $\alpha_0$ または $2^{\alpha_0}$を持つからである．

整数列から始めると，

(1)　　　1, 2, 3, 4, 5,…

[92] 「私の知る限り，その定理は，今だかつて精確に述べられたことはない．」[Hardy:1904]（拙試訳）

我々は(1)の最初の項を削除することにより次の新しい数列を構成する,

(2)　　　2, 3, 4, 5, 6,⋯

そしてこの手順を継続することで，我々は次々と新しい数列を構成する.

(3)　　　3, 4, 5, 6, 7,⋯

(4)　　　4, 5, 6, 7, 8,⋯

(5)　　　5, 6, 7, 8, 9,⋯

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

我々はここで，数列の無限の配列上を対角線上に横断することにより，新しい数列を構成する.

(ω)　　　1, 3, 5, 7, 9,⋯

その後，我々は次のように構成して行く.

(ω+1)　　　3, 5, 7, 9,11,⋯

(ω+2)　　　5, 7, 9,11,13,⋯

(ω+3)　　　7, 9,11,13,15,⋯

(ω+4)　　　9,11,13,15,17,⋯

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

(ω・2)　　　1, 5, 9,13,17,⋯

(ω・2+1)　　　5, 9,13,17,21,⋯

(ω・2+2)　　　9,13,17,21,25,⋯

(ω・2+3)　　　13,17,21,25,29,⋯

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

(ω・3)　　　1, 9,17,25,33,⋯

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

そういう訳で我々は次の全ての数に対応する数列を構成する.

$\omega\mu+\nu$

ここでμとνは有限である.　　　『無限基数に関する定理』[Hardy:1904]（拙試訳）

さて，急増加階層の歴史的初出として，しばしば1953年のグルツェゴルスチク(31)の論文が挙げられているのを見かけるが[93]，彼のオリジナルの定義は，現行のものからはかなりかけ離れており，これをもって初出とすることに，著者は，疑問を感じている．一方，論文ではないが，同じく1953年に出版されたリトルウッド(68)の『数学雑談』に収載されている「大きな数」にある定義は，現行のものにかなり近い．しかも，「急増加階層」を導入する目的が，グルツェゴルスチクの場合は，理論的には計算可能な原始帰納関数から更に現実的に計算可能な関数族を抜き出すこと

[93] 急増加階層で，特に，ωまでの部分は，Grzegorczyk 階層と呼ばれている.

にあったのに対し，リトルウッドは，ある種の数学の問題でその存在が証明されているが大きすぎて通常の表現が出来ない数があった場合，これを表現するためのツールとすることにあった．そういう訳で，**急増加階層の歴史的初出は，少なくとも巨大数論の立場からは，リトルウッドの数学エッセイ「大きな数」**であると言って良かろう．

**彼はまた現代巨大数論の二つの基本テーゼ「大きな数を得るには，いかにして能率よく急激に大きくなる関数 $f$ を見つけるか？に帰着する」と「急増加な関数はイテレーションによって構成され，そのメカニズムは順序数によって統制される」を歴史的に初めて言及した人物としても記録されるべきであろう．**

本節の結びにあたり，参考までに，急増加階層の現在の定義とリトルウッドの定義を併記しておく．

【急増加階層の現代の定義】

μを基本列（その上限が極限順序数であるような狭義増加順序数列）がμよりも小さなすべての極限順序数に割り当てられるような大きな可算順序数[94]とする．$\alpha < \mu$に対する関数族　$\mathrm{F}_\alpha : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$　の急増加階層は，以下のように定義される[95]：

$$\mathrm{F}_0(x) = x + 1$$
$$\mathrm{F}_{\alpha+1}(x) = \mathrm{F}_\alpha^x(x)$$
$$\mathrm{F}_\lambda(x) = \mathrm{F}_{\lambda[x]}(x) \qquad \lambda\text{は極限順序数}$$

【急増加階層のリトルウッドによる定義】

存在は証明されたけれども，**$X$として可能な値は大きすぎて述べることができない**と云う場合があり得るか？　数学者の解答は「否」である．が，我々はかくて，スタート地点のどのくらい大きい数を言い表せるかという問題に戻るのである．求めたいものはじつは可能な限り早く増加する関数$F(n)$である．最終的に$n$に何を代入しようと―2 であれ，u であれ，$N_u(n)$であれ―差異は生じない（どこかで$F$の構成を止めなければいけないが，止めたところからもう一歩，たとえば，$F(F(n))$に至れば，それで何を代入するかによる差異は打ち消されるのである）．

---

94 急増加階層で，特に，$\alpha \leq \varepsilon_0$ までの部分は，Wainer 階層と呼ばれており，これを超える階層についての定義もある．例えば，Veblen 関数(1908)による Feferman-Schütte 順序数$\Gamma_0$までの拡張がある．

95 急増加階層の最初の方は，Knuth の矢印記号で簡単に評価出来るので，参考までに載せておく．詳しくは，附録 3. Proposition8.参照のこと．　$2 \uparrow^{n-1} x < \mathrm{F}_n(x) < 2 \uparrow^n x$

狭義増加正値函数$f_0(n)$から構成を始める．$\psi^k(n)$で$\psi(n)$の$k$-回の反復$\psi(\psi(\dots\psi(n)))$を表せば，明瞭にするため右辺の指数では0を省いて，

$$f_1(n) = f_1(n, f_0) = f^{f(n)}(n) \qquad \text{（たとえば指数}f_0(n)\text{まで）}$$

が定義できる．

これによって添数が0から1に増加する．同様に$f_2$も（記号で$f_2(n) = f_1(n, f_1)$）$f_1$から作り，以下同様に進めていく．ここで**超限順序数の記法**からヒントを得て

$$f_{f_{f(n)}}(n)$$

を（たとえば$f_{f(n)}(n)$まで）構成する．今や，我々は次のような主張ができる．今ある定義を集めて足場にする．そしてこの足場を$f_1(n)$と定義して，上に述べたような操作を続ける．再びそこで定義を集めて同様に進むが，ここで止めるとする．いったん止めれば$f_0(n) = n^2$かあるいは$f_0(n) = n + 1$にとれる$(f_0(n) > n)$でありさえすれば，$f_0(n)$として何をとろうと問題ではない）．

『大きな数』[Littlewood]

## 8.5 デュ・ボワ・レイモンの定理

本章の最後にあたり，増加関数列についてのデュ・ボワ・レイモンの傑出した先駆的業績について触れておく．

1875年，デュ・ボワ・レイモン(44)は『無限近似と方程式の無限解の漸近値について』と云う表題の論文で，カントールに先立って，史上初の対角線論法を披露するのだが，そこではいかなる可算個の単調増加関数よりも増加の仕方が大きいあるいは小さい関数が，対角線論法によって構成され得ることを示している．これは，アッカーマンが如何なる原始帰納関数よりも急激に増大する関数　―いわゆるアッカーマン関数―　を暗に対角線論法を使って構成した50年以上も前に発表された結果であった．但し，アッカーマンの論文にはこの論文の引用は見当たらないので，直接的な影響はなかったものと推察される．(そもそも対角線論法を使っているという自覚もなかったのではなかろうか)

しかしながら，彼がこの定理を知っていた可能性は少なくない．なぜなら，管見の許す限りではあるが，少なくとも1960年代頃までは，この定理は非常に有名なものとして扱われていたからである．例えば，1910年（第2版1954）には，H. ハーディー(33)が『無限の順序』と云う題名のモノグラフを出版しているが，副題は「ポール・デュ・ボワ・レイモンの無限計算」であり，正にこの定理を主題としたものであった．また，ボレル(80)が1951年に出版した『到達不能数』[Borel]ではこの定理は「ポール・デュ・ボワ・レイモンの有名な定理」と評されて，詳しく考察されている．

また，そのような専門書でなくても，高校生向けの副読本として企画されたSMSG新数学双書の一つである『大きな数』[Davis]でも，この定理は紹介されている．恐らく，この当時（20 世紀前半）の数学者にとっては基本的な素養であったのだろう．[96]

ところで，デュ・ボワ・レイモンは，そもそもなぜこのような問題を考えようとしたのであろうか？彼の比較的初期の論文を見ると，既に，ベルトラン級数（アーベル級数とも呼ばれる）に基づいて，収束と発散の間を埋める理想的な級数の階梯を作ろうとしていたように思われる．[Du Bois-Reymond:1873] 数学の厳密化運動が活発化していたこの当時，一様収束をはじめ，デリケートな収束性の問題は，解析学における重要なテーマの一つであった．そのような潮流の中で，彼の論文を眺めるならば，極限評価の基本である「無限小，無限大の位数」の概念の分析からその問題意識が発していた，と言ったとしても大きく外れることはなかろう．

この「無限位数」の歴史は古く，微積分の黎明期，既にフェルマーの著作のなかにも暗然と現れており，ニュートン，ライプニッツにおいては「高階差分」の理論としてはっきりと意識されるようになる．[Bourbaki] フォントネルやヨハン・ベルヌイは，非常に素朴な形で無限大の位数を導入するのだが，コーシーの著作に至っては現代の微積分に近い形にまで洗練されて提示されている．より高位な無限大を考察して行けば，何処かで，それを統制する位数列そのものの動的状勢に目が行くことは自然な発想である．そして，どのように急増加する位数列を作ろうとしても，それを凌駕する位数列が作れてしまうことに気付いたとき，この種の不可能性を証明しようと試みることは，歴史的な難問の不可能性が次々と証明されていった 19 世紀にあっては，極めて自然な発想だったのかもしれない．[Keele]

# 9 有限者の限界としての巨大数

直観主義にせよ有限の立場にせよ，無限と有限の違いについては峻別するが，具体的な表示可能性については，考慮しているようには見えない．チューリングは，チューリングマシンの停止性判定問題を有限時間内で解くアルゴリズムが，存在しないことを示したが，たとえアルゴリズムが存

[96] 我が国において、『解析概論』と並んで微積分学の古典的名著と言われている『微分積分學　第一巻』（藤原松三郎著: 1941）には，この定理について，歴史的背景まで含めて，§ 1.45 でかなり詳しく論じられている．しかし，何故か，この定理が対角線論法であることについては一切触れられていない．

在しても，人類が生存している時間内で解けるかどうかと言った「計算複雑度」を考慮する問題までは，踏み込んで考えていなかった．

しかしながら，現実の数学は，確実にそのような限界を内包しながら発展してきている．羽を持たない人類が，飛行機やロケットによって未踏の地に辿り着けたように，コンピュータの発明は，生身の人間の限界を計算能力のみならず，検証能力についても大きく引き上げた．とはいえ，やはり限界は，存在するであろう．モンスター群の位数が，$8\cdot 10^{53}$程度だったから有限群の単純群の分類定理は完成したが，これが，もしグラハム数レベルのオーダーであったなら，精確な位数の特定ができたかどうかは大いに疑問がある．実際，スキューズ数は，オーダーを評価しているだけで，特定は出来ていない．我々の周りには，そのような問題で溢れている．晩年，ボレル(81)は，人が有限者であるが故に定義不可能な限界を「到達不能数」と名付け，これを主題にした小冊子を上梓した．

このように巨大数は，有限者たる人の限界としても位置付けられるのだが，その限界そのものの定義や認識に対する統一的な見解はなく，極めて多義的かつ流動的であることに留意しておく必要があろう．

## 9.1 頭で考えられる異なる考えの数

17 世紀に活躍した物理学者ロバート・フックは，表題の数を計算した結果，3,155,760,000 を弾き出した．彼の計算根拠は，100 年間の秒数であった．確かに，一人の人間が，生まれてから死ぬまで毎秒違うことを考え続けたとしても，これ以上の数の考えを想起することは出来そうにない．

しかしながら，別人であれば当然もっと別の考えが想起され得るわけだし，同じ人物であったとしても，可能性としての思考想起数は，フックの出した数よりも遥かに大きそうである．

100 億個の神経細胞が，それぞれ 1000 個程の軸索で，他の神経細胞と繋がるネットワークの連結パターンで「脳が抱き得る思考の数を推計する」と云うマイク・ホルダネスの方法に依ると，$10^{70,000,000,000,000}$ つまり 10 の 70 兆乗なるとてつもない巨大数が，導き出される．全宇宙の陽子の数と思しき$10^{80}$が，なんと可愛らしく見えることか．ラムゼーやパスカルは，案外このような質的な差を直観的に感じ取っていたのかもしれない．

私が私の友人の幾人かと違っているように思われる点は，私自身が物理的な大きさというものには殆ど重きを置かないという点である．私は天空の広大さを目の前にしても，なんら

自らの卑小さを感じることはない．星はたしかに巨大であるかもしれないが，考えたり愛したりすることができない．そして私にとって感動を与えるのは，大きさではなくてこうした性質である．私自身，ほぼ 17 ストーン(107 キロ)の体重があることを，自分の名誉であるとは思っていない．　　　　　　　　『ラムジー哲学論文集』(X エピローグ)[Ramsey]p.366

人間は自然のうちで最も弱いひとくきの葦にすぎない．しかしそれは考える葦である．これをおしつぶすのに，宇宙全体は何も武装する必要はない．風のひと吹き，水のひとしずくも，これを殺すに十分である．しかし，宇宙がこれをおしつぶすときにも，人間は，人間を殺すものよりもいっそう高貴であろう．なぜなら，人間は，自分が死ぬことを知っており，宇宙が人間の上に優越することを知っているからである．宇宙はそれについて何も知らない．
『パンセ』[Pascal]（200）

巨大数からは若干外れるが，このテーマに関して，二人の天才の興味深い対立があるので少し紹介しておく．既に，触れたようにチューリングは，有名なチューリングマシンのアイデアを，人間が計算する様子を抽象・モデル化することで着想した．彼の論文では，計算者の「考慮すべき精神状態の数は有限であると仮定する．」と明記されており，これが，チューリングマシンの制御部の「m-配置」の数は有限である，と云う制限に直結している．これに対し，1972 年，ゲーデル(66)は「チューリングの仕事の哲学的誤り」とラベルを付けている．ゲーデルは「精神活動は静的ではなく，発展し続けるものである．したがって，精神の発展の各段階において可能な（区別可能な）状態は有限だが，発展していくうちに無限に収束しない理由はどこにもない．」とコメントし，精神状態の数は，有限ではないとした．この二人の対立は，心と云うものを脳の機械的な機能に帰着され得ると考える人々[97]と，人の心にはそれらを超越する働きがあると信じる人々[98]の，根源的な哲学の対立を代表するものと言えるかもしれない．

## 9.2　ＲＳＡ暗号

巨大数史を主題とする本論において，ＲＳＡ暗号について言及する理由は，その理論の本質が，巨大な数の素因数を見つけることが，たとえコン

---

[97] Turing は，究極的には，機械と人間の知性の差はなくなると考えていた．そして，それを判定するために Turing test を考案した．

[98] Gödel は，人間の理解力の可能性は無限であると考えていた．母親の「来世を信じるか．」と云う質問に肯定的に答え，死後の世界では，重要なことがすべて２×２＝４と同程度の確実性をもって知覚される永遠の知的楽園であると期待される，と書いている．

ピュータを使ったとしても，極めて困難であることに依っているところにある．つまり有限者としての人間の限界こそが，この理論及びシステムの有効性を保証しているのであり，そこに人々の日々の営みの中における巨大数の役割の一つがある．

ところで，これに類似した問題として，与えられた巨大な数が，素数であるかどうかを判別することが挙げられる．この問題についてオイラーのような大数学者が，何篇もの論文を書いていたことは留意に値する[99]．

## 9.3　4色問題とケプラー予想

巨大数は，人の有限性に起因するが，その有限性は一意的に定まるものではない．どのような文脈におけるどのような有限性に依存したものであるかを明確にしておかないと混乱が生じる．例えば，計数概念を持たない状態の人間でも，直観的に把握できる数はあり，その限界は，個人差はあるが，大体 4，5 個であることが実験的に示されている．(附録 2 参照)　計数手法を学んだ人間ならば，その表現可能な数は飛躍的に跳ね上がるが，その限界は，学んだ計数手法に依存する．例えば，1 進法か 10 進法か，指数表現まで適用するかによって劇的に異なる．

寿命と計数能力の制約による人の有限性は，コンピュータの出現によって大きく緩和された．このことを象徴する事例として，アッペルとハーケンによる 4 色問題の解決が有名であるが，証明ではなく計算ならばこれ以前にも沢山の結果が出ていた．例えば，「アルキメデスの巨大数」で触れた「牛の問題」の答えが，A.H.ベルたちの 4 年がかりの計算により，206,545 桁の数であることが突き止められたことは，既述の通りであるが，彼らは，その解の最初の 32 桁と最後の 12 桁しか求めていなかった．1965 年，IBM7040 は，僅か 7 時間 49 分で，完全な解をリストアウトした．

4 色問題以降，コンピュータを使った証明で最も有名なものは，1998

---

99 Euler が，大きな数の素数性判別問題に興味を持っていたことは，高瀬正仁氏に教えて頂いた．また，氏によると，Gauss は，Euler 程には巨大数に興味を持っていなかったらしい．

・Fermat の定理とそのほかの注目すべき諸定理に関するさまざまな観察（1738 年）
・非常に大きな素数について（1764 年）
・非常に大きな数が素数か否かということは，どんなふうにして探知しなければならないのであろうか．(1769 年)
・数 1000009 が素数か否かが吟味される．(1797 年)
・100 万まで，および 100 万を超えて続いていく素数表．あらゆる非素数の最小の約数を併記する．(1775 年)

年のヘールズ(40)によるケプラー予想（ヒルベルト第 18 問題）の解決ではなかろうか．ヘイルズの論文は，12 人の査読者によって 4 年がかりで検証されたが，その検証結果報告は，「99%の確信があるもののそれでも完全に正しいと言い切ることが出来ない」であった．12 人の査読者の献身的な努力にも拘わらず，その証明の正しさを確認することが出来なかったと云う事実は，この辺に生身の人間の検証能力の限界があることを示唆しているとも言えよう．2003 年，ヘイルズは，ケプラー予想の完全な形式的証明を作成するフライスペック計画を立ち上げた．つまり，証明の中身にコンピュータを使うだけではなく，その正しさの検証にもコンピュータを使おう（「証明支援システムの使用」）というのである．計画開始から 11 年後，ヘイルズはついにコンピュータ上で完全にチェックされた形式的証明を獲得した．[100]

ヘイルズのこの歴史的快挙は，人手に余る巨大な証明に対し，その厳密性をコンピュータによって担保する方法として，彼の手法が認知される日を，予感させるものとも言えよう．

## 9.4 ミシェスルキーの巨大定数

本章のこれまでの事例において，巨大数は，なんらかの具体的な意味で，人間の有限性に起因する限界として位置づけられるものであった．このような限界性は，通常の数学理論には馴染みにくいものと考えられるが，意外にも，この限界性を公理化してしまおうとする数学者もいる．

J. ミシェスルキーは，“Analysis without actual infinity.”（1981）で，ペアノの自然数論に 2 のべき関数$2^x$と巨大定数$\omega_r (r \in Q)$を加えた理論を構築してみせた．彼の理論では大小関係として，次のような通常の自然数論とは異なるものが，与えられている．

大小関係 $x < y$ を $x$ が後者$S(x)$ と異なり，かつ，$x + S(z) = y$ となる $z$ が存在することとして定義する．

この定義から，$S(\alpha) = \alpha$ となる $\alpha$ が存在すれば，それは最大数であることが分る．更に，次のような奇妙な公理（巨大性公理）を$\omega_s (s \geq r)$ を含まない定数項 t ごとに与えている．

$$t < \omega_r.$$

[100] 4 色問題についても，2005 年に，Georges Gonthier(ジョルジュ・ゴンティエ)により証明支援システム Coq で検証されている．

この公理の意味するところは，$\omega_r$より質的に小さい数をどのように使って新しい数を作っても$\omega_r$ より小さい，である．

ミシェスルキーが，どのような動機からこのような奇矯な有限概念を取り込もうとしたのかは判らないが，それを予言するような哲学的な問題提起は，既に，ヴィトゲンシュタインの『哲学探究』でなされ，クリプキに受け継がれていた．正統的解釈では，クリプキの問題の捉え方は，ヴィトゲンシュタインの本来の意図とは異なるとのことであり，著者が上述した「予言」も全く両者（ヴィトゲンシュタインとクリプキ）の意向を無視したものであることは理解しているが，巨大数の一面を浮き上がらせる興味深い話題なので簡単に触れておく．

先ず，クリプキによる有名なヴィドゲンシュタインのパラドックスを思い出していただきたい．彼は，「例えば，『68＋57』は，私がかつて全く行なったことのない計算である」と仮定した上で，「私はこの計算をし，そして勿論，『125』」と云う当然の答えを得て，それが算術的な意味でもメタ言語的な意味でも正しいと確信するであろうことを認める．ところがこの後，彼は奇怪な懐疑論者が登場させ，「68＋57」は「5」であると主張させる．この懐疑論者の論理は完璧で次のように「私」を畳み込んでくる．

過去においては，私自身，その関数で計算した具体的事例をただ有限個与えているのみである．私が考えた事例の全ては，57 より小さい数の間の加法なのである．それゆえたぶん，私は過去において「プラス」と「＋」を，私が「クワス」と呼び，「⊕」によって記号的に表わそうと思う関数を表わすために用いていたのかもしれないのである．その関数は，

$$\text{もし}x,y<57\text{ならば}\quad x\oplus y=x+y$$
$$\text{そうでなければ}\quad x\oplus y=5$$

によって定義される．誰が一体，これは私が以前に「＋」によって意味していた関数ではない，と言うのだろうか．

『ウィトゲンシュタインのパラドックス』[Kripke]pp.13-14

クリプキの懐疑論者が，「私の有限回の具体的計算経験」がすべて「57」より小さい数の間の加法であったことを，突いてきているのは興味深い．なぜなら，上記において「57」と「5」を「巨大数」に置き換えるだけで，数学的に無矛盾な理論を構築することが出来るからである．

## 9.5 到達不能数

既に述べたように，リトルウッドは，巨大過ぎて表現出来ないような数については，それが本当に必要になれば数学者はなんとかして対応することが出来る，と云う比較的楽観的な考えを有する数学者であった．

リトルウッドは，スキューズ数のような，当時としては驚く程巨大な数を弟子のスキューズが創出することで，解析数論の具体的な問題に対して見事な評価式が与えられたことに依り，巨大数に対する数学者の対応能力に自信を持っていたのであろう．更に，本質的に急増加階層と同等な概念を知っていたようなので，この概念を使えば，個々の数学者が取り扱う問題で直面する巨大数は，評価出来るはずだと確信していたのかも知れない．

一方，ボレルは，より哲学的な見地から，人間の持つ有限性に起因する「相対的に到達不能な数」が存在すると主張する．

> 我々の結論は到達不能な数が存在することである．すなわち，どの人も到達できないような数が存在し，しかも定義そのものにより，それらの到達不能な数を知ることはできず，その先にある数は到達不能であるような境界となる数を示すこともできない，というのは，この境界数もまた到達不能だからである．
>
> したがって，我々はこの到達不能性を相対的なものと考えなければならない，というのは，それは，宇宙の寿命と人間の能力についての仮定に依存するからである．
>
> 『到達不能数』[Borel]pp.5-6

ボレルは，フランス経験主義を代表する数学者であるが，おそらく，その思想的背景を支えるコントの哲学に影響されていた思われる．[鈴木:2014] それ故，「成熟した思想は人間の有限性を意識して絶対性を追及すべきではない．」と考えて，彼が，このような本を書いたとするならば極めて合点がいく話である．

また，彼は，人や宇宙の寿命に依らない「絶対的に到達不能な数」を次のように定義している．

> 0 と 1 の間の無理数の中で，到達可能なものは可算集合をなすので，到達不能な数は可測集合で測度が 1 である，ということが以上によりわかった．したがって，絶対に到達不能な数は，到達可能な数や相対的に到達不能な数に比べると無限に多く存在すると考えるべきである．
>
> 『到達不能数』[Borel]p.20

定義は違うが，ボレルの「到達可能数」は，チューリングの歴史的論文

において定義されている「計算可能数」と方向性は似ている．しかし，本書にチューリングの名前は見当たらない．チューリングの論文が出た1936年に，既に65歳になっていたこともあり，読んでいなかったのかもしれないが，1927年のエッセイでは，チューリングに先んじる先駆的アイデアを出していた．

ボレルの「到達不能な数」，特に「相対的に到達不能な数」は数学的に明晰に定式化することは難しいと思われる．具体的な表現を与えられない巨大数の定義の難しさが，ここにある．

しかしながら，1934年には，既に，超越的な方法で無限大を導入するように，いかなる自然数よりも大きな超準元が定義される超準自然数モデルが扱われており（スコーレム），1966年当時，この超準元を「到達不能な自然数」と解釈する基礎論学者，近藤基吉(60)，もいた．

> 今日の集合論では,無限集合を有限集合に対立させて考えている．これは有限集合と無限集合との間に截然とした差異のあることを前提としているからである．しかし,実際は意外に複雑な関係を持っている．集合論 ZF においては,$\alpha < \omega$ を満足する順序数 $\alpha$ が『自然数』である．しかし,『自然数』の中に,
>
> $D_1$ 到達可能な自然数:有限的な方法で定義せられ numeral に対応する自然数で,『標準の自然数』と云われる．
>
> $D_2$ 到達不可能な自然数:『非標準の自然数(nonstandard natural number)』とも云われ,すべての到達可能な自然数よりも大なる自然数
>
> の区別されるような集合論 ZF の模型が知られている(T.Skolem[30])．従って,『有限集合』の中にも,到達可能な自然数によって計られる『標準の有限集合』とそうでない『非標準の有限集合』とが区別されることになる．
>
> 『P.J. Cohen の方法とその数学的意義』[近藤]p.179

このように，巨大数を「到達不能数」として捉えようとしたとき，その定義をどのように与えるかによって，規定される世界がまるで異なることが見て取れよう．

我々は，本論において，歴史を主軸にしながら，巨大数と云う存在の有り様を軽くなぞったに過ぎない．それでも，巨大数に，その内なる豊饒さの片鱗を感じていただけたならば，本論の目的は充分果たせたものと考える．巨大数は無限に比すれば，未だ殆ど本格的な研究には，手が付けられて来なかったのが現状である．従って，その最も刺激的な変革を今後に期待したい．

## あとがきと謝辞

正直に言うと，このあとがきを書きながらも，本論の表題を「巨大数小史」としたことが果たして良かったどうか，確信が持てないでいる．このような表題にすると，どうしても通史としての性格が色濃く出てしまい，結果として，二次文献からの引用が増え，度が過ぎると，「論文」ではなく，「無節操な軽評論」か「雑学の開陳」に堕してしまう危険性が高いからである．もっと贅肉をそぎ落とし，「科学的表記」や「増加関数の視点による巨大数」などのテーマに絞り込んで，オリジナルな部分の占める割合の高い，筋肉質な論文を目指すべきだったのかもしれない．しかし，「はじめに」でも述べたように，この分野には参照すべき通史がなく，この状況を少しでも緩和したいと云う目標も本論にはあったので，たとえ内心忸怩たる思いであろうとも，二次文献をまとめただけの節も作らざるを得なかった．中には殆ど項目に触れているだけの節，例えば「RSA 暗号」など，があるが，それは巨大数との関連性だけでも明示したかったからである．一般的な用語解説は，現在のネット環境を利用すれば簡単に補充出来ると考え，敢えて載せなかった．更に，二次文献からの引用にしても，出来得る限り切り口を目新しくするように努めた積りであり，単なる類書からの引き写し，垂れ流しだけは避けられたと信ずる．それ故，本論は，一般教養書のように気軽に近づくことが出来て，不案内な部分をネットで補充しつつ読めば，多様な視点からの巨大数の捕捉を可能たらしめるものと自負するが，一方で，いささか散漫になり過ぎた嫌いも否定出来ない．

このように，本論には至らぬ点が多々あるのだが，それでも，ケルヴィン卿の栄光の陰に隠れて，歴史の忘却の海に深く沈んでいた悲運の青年電気技師アーネスト・エッセルバッハに新たな光を当て，「科学的表記の創案者」としての再評価を与えられたこと，及び現代巨大数の基本理念を提唱していた人物が，あのリトルウッドであったと特定できたことを以て，数学史の論文としての，ささやかな存在意義を主張出来るのではないか，と愚見を開陳して批評を仰ぐことと致したい．

この論文の附録にある「グラハム数とスタインハウス数，アッカーマン数の比較問題」の面倒な検証に付き合って下さった『日本数学協会神奈川支部勉強会』の皆様方に，この場を借りて深く御礼申し上げます。

最後になりましたが、このような論文を発表する場を与えてくださいました津田塾大学数学・計算機科学研究所の三宅克也氏と立教大学、津田塾大学数学・計算機科学研究所佐藤文広氏、津田塾大学数学科長岡一昭氏に深く感謝致します。

# 引用文献


1 **Ackermann,Wilhelm**: Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Mathematische Annalen vol 99, (1927)

2 **Adams , Rod**: An Early History of Recursive Functions and Computability from Godel to Turing. Docent Press, (2011)

3 **Alexander ,Soifer**: Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow. Springer Science & Business Media, (2010)

4 **Atkinson, Janette; Campbell, Fergus W ; Francis, Marcus R** : The magic number 4±0: A new look at visual numerosity judgements. // Perception, V. 5, (1976), pp. 327-334

5 **Augustinus ,Aurelius**; 服部英次郎(訳): 神の国.岩波書店, (1983)

6 **Basham ,A.L** : History and Doctrines of the ĀJĪVIKAS. Luzac & Company LTD,(1951)

7 **Bernoulli ,Jacob**: Ars Conjectandi. Impensis Thurnisiorum, fratrum, (1713)

8 **Blakley, George Robert ; Borosh, Itshak**:Knuth's Iterated Powers. Advances In Mathematics 34, (1979), pp.109-136

9 **Boltzmann,Ludwig**: Entgegnung auf die wärmetheoreti schen Betrachtungen des Hrn.E. Zermelo. Wiedemann Annalen 57, (1896), pp.773-784
**ボルツマン,ルートヴィッヒ**;物理学史研究刊行会(編纂) :"ツェルメロ氏の熱理論的考察への反論".物理学古典論文叢書 5 気体分子運動論. 東海大学出版会, (1971)

10 **Borel , Émile**: Les nombre inaccessible .Gauthier-Villiars, Paris, (1952)
**ボレル,エミール**; 辻下徹(訳): 到達不能数 和訳 Ver0.81

11 **Bourbaki, Nicolas**; 村田全(訳); 清水達雄(訳): ブルバキ数学史. 東京図書, (1970)

12 **Chaitin, Gregory**;水谷 淳(訳): ダーウィンを数学で証明する. 早川書房, (2014)

13 **Conway ,John H; Guy, Richard** : The Book of Numbers. Springer, (1996)
**コンウェイ,ジョン H; ガイ, リチャード**;根上 生也(訳): 数の本. 丸善出版, (2012)

14 **Cook ,William John**; 松浦俊輔(訳): 驚きの数学 巡回セールスマン問題. 青土社, (2013)

15 **Crandall ,Richard E**: 超巨大数への挑戦. 日経サイエンス 1997 年 5 月号

16 **Datta; Bibhuti Bhushan** : The Jaina School of mathematics, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society 21 , (1929), pp.115-145.

17 **Dawson ,John W.Jr.** : Logical Dilemmas AK Peters,Ltd, (2005)
**ドーソン,ジョン W. Jr**,村上裕子(訳),塩谷賢(訳),ロジカル・ディレンマ. 新曜社, (2006)

18 **Davis ,Philip J**: The lore of large numbers,Random House, Inc,1961
**デービス,フィリップ J**; 田島一郎(訳), 加藤勝(訳): 大きな数. 河出書房新社, (1970)

19 **Dedekind , Richard**: Was sind und was sollen die Zahlen? , (1887)
**デデキント,リヒャルト**; 渕野昌(訳): 数とは何か, 何であるべきか？筑摩書房, (2013)

20 **Devlin ,Keith**: 数学する遺伝子: あなたが数を使いこなし, 論理的に考えられるわけ. 早川書房, (2007)

21 **Du Bois-Reymond, Paul**: Ueber asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösungen von Gleichungen. Mathematische Annalen. Volume 8, (1875)

22 **Du Bois-Reymond, Paul** :Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen etc. Anhang, Borch. Journ. Bd. 76, (1873) pp.61-91.

23 **Dunnington ,Guy Waldo**; 銀林浩(訳); 田中勇(訳); 小島穀男(訳): ガウスの生涯. 東京図書, (1992)

24 **Esselbach ,Ernest**: Extracts from a Letter addressed to Professer Williamson by Dr. Esselbach. Appendix F from the Report of the thirty-second meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Cambridge. (October 1862)

25 **Fisher, Gordon**: The Infinite and Infinitesimal Quantities of du Bois-Reymond and their Reception. Archive for history of Exact Sciences 24, (1981) pp.101-63

26 **Frege ,Friedrich Ludwig Gottlob**: Die Grundlagen der Arithmetik, (1884)
**フレーゲ,ゴットローブ** ; 野本和幸(編) ; 土屋俊(編) : 算術の基礎. 勁草書房, (2001)

27 **Frei , Günther ; Stammbach ,Urs** : Hermann Weyl und die Mathematik an der ETH Zürich, 1913–1930, Springer-Verlag, (2013)

28 **Friberg, Jöran**: Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics. World Scientific Publishing Company (2005), p.21

29 **Friberg, Jöran**: A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts. Springer Science & Business Media, (2007), p.457

30 **Gamow ,George**; 崎川 範行(訳)：1,2,3…無限大. 白揚社, (2004)

31 **Gardner ,Martin**: In which joining sets of points leads into diverse (and diverting) paths. Scientific American, (November 1977)

32 **Goodstein , Reuben Louis** : On the Restricted Ordinal Theorem. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 9, No. 2, (1944), pp.33-41.

33 **Goodstein , Reuben Louis** :Transfinite ordinals in recursive number theory. Journal of Symbolic Logic 12 (4), (1947), pp.123–129.

34 **Graham , Ronald Lewis ; Rothschild, Bruce Lee**: Ramsey's theorem for n-parameter sets.Trans. Amer. Math. Soc., Vol.159, (1971), pp.257-292

35 **Gregory ,David; Halley ,Edmond**: The Elements of Astronomy, Physical and Geometrical Vol1,J. Nicholson and sold, (1715)

36 **Griffin ,F. L.**: An Experiment in Correlating Freshman Mathematics. The American thematical Monthly Vol. 22, No. 10, (1915), pp.325-330

37 **Hahn ,Alexander J**; 市村宗武(訳); 狩野秀子(訳); 狩野覚(訳): 解析入門　アルキメデスからニュートンへ. シュプリンガー・フェアラーク東京, (2001)

38 **Halpern ,Paul**; 江里口良治(訳),水島信子(訳): 輪廻する宇宙. 丸善, (1997)

39 **Hardy , Godfrey Harold**: A theorem concerning the infinite cardinal numbers, Quarterly Journal of Mathematics vol 35, (1904), pp. 87–94

40 **Hardy , Godfrey Harold**: Orders of Infinity. Cambridge University Press, (1910)

41 **Harrison , Edward Robert**: Cosmology: the Science of the Universe. Cambridge University Press, (2000)

42 **Hilbert ,David**: Über das Unendliche Mathematische Annalen 30, (1925), pp.161-190

43 **Humphreys ,Colin J.** :The Number of People in the Exodus From Egypt: Decoding Mathematically the Very Large Numbers in Numbers I and XVI," VT48, (1998), pp.196-213

44 **Ifrah, Georges**; 弥永 みち代(訳), 後平 隆(訳): 数字の歴史—人類は数をどのようにかぞえてきたか. 平凡社, (1988)

45 **Jean van Heijenoort**: From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Harvard University Press, (1967)

46 **Jevons, William Stanley** : The power of numerical discrimination. // Nature, V. 3, (1871), pp.281-282

47 **Joseph ,George Gheverghese**; 垣田高夫(訳); 大町比佐栄(訳): 非ヨーロッパ起源の数学. 講談社, (1996)

48 **Kanamori , A., 渕野 昌(訳)**： 巨大基数の集合論. シュプリンガー・フェアラーク東京, (1998)

49 **Katz ,Victor J.**: A History of Mathematics. Addison-Wesley , (1998)

50 **Keele ,Lisa**: Theories of Continuity and Infinitesimals: Four Philosophers of the Nineteenth Century,Indiana University. Philosophy ,ProQuest, (2008)

51 **Keynes ,John Maynard**: ケインズ全集１０巻　人物評伝. 東洋経済, (1980)

52 **Kirby, Laurie; Paris, Jeff**: Accessible Independence Results for Peano Arithmetic. Bull. London Math.Soc.14 (4), (1982), pp.285-293

53 **Knuth ,Donald Ervin**: Mathematics and Computer Science:Coping with Finiteness. Stanford University, Stanford, California 94305 "Science", 17 December 1976, vol. 194, n. 4271, pp.1235-1242.

54 **Kripke, Saul**; 黒崎宏(訳): ウィトゲンシュタインのパラドックス - 規則・私的言語・他人の心 - , 産業図書, (1983)

55 **Littlewood, John Edensor**; Bollobás, Béla (編);金光滋(訳): "大きな数". リトルウッドの数学スクランブル. 近代科学社, (1990)

56 **Locke, John** : An Essay Concerning Human Understanding : Chap.16 Number§6 Names necessary to Numbers, (1690)

57 **Loschmidt , Johann Josef** : Zur Grösse der Luftmolecüle. Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien 52 (2), (1865), pp.395–413

58 **Lucretius** , 樋口勝彦(訳): 物の本質について. 岩波書店, ( 1961)

59 **Mycielski ,Jan**: Analysis without actual infinity. The Journal of Symbolic Logic Vol. 46, No. 3, (Sep., 1981), pp.625-633

60 **Maxwell , James Clerk**: On the Dynamical Theory of Gases.Philosophical Magazine for January and July,(1860)

61 **Maxwell , James Clerk**: Illustrtions of the Dynamical Theory of Gases. Philosophical Transactions Vol. CLVII, (1866)

62 **Maxwell , James Clerk**: A treatise on electricity and magnetism. Oxford, (1873)
63 **Miller,I,Arthur;** 阪本芳久(訳) :137　物理学者パウリの錬金術・ユング心理学をめるぐ生涯.草思社, (2010)
64 **Moore ,Adrian William**;石村多門 (訳): 無限 その哲学と数学.　講談社, (2012)
65 **Netz,Reviel ; Noel,William** : 吉田普治(監訳), 解読! アルキメデス写本. 光文社, (2008)
66 **Neugebauer, Otto** :A History of Ancient Mathematical Astronomy. Springer-Verlag ,(1975:Springer Science & Business Media 2004) , p.618
67 **Nietszche ,Friedrich**;原 佑(訳): 権力への意志. 筑摩書房(下), (1993)
68 **Ossendrijver ,Mathieu**: THE POWERS OF 9 AND RELATED MATHEMATICAL TABLES FROM BABYLON. Journal of Cuneiform Studies 66 ,(2014), pp.149-165
69 **Oyama Tadasu; Kikuchi Tadashi; Ichihara Shigeru** : Span of attention, backward masking and reaction time. // Perception and Psychophisics, V. 29 (2) , (1981), pp.106-112
70 **Page, Donald Nelson**: "Information Loss in Black Holes and/or Conscious Beings?". In Fulling, S.A. Heat Kernel Techniques and Quantum Gravity. Discourses in Mathematics and its Applications (4). Texas A&M University. (1995), p.461.
71 **Parikh , Rohit**: Existence and feasibility in arithmetic. Journal of Symbolic Logic,36, (1971), pp.494–508
72 **Parikh , Rohit**: Some results on the lengths of proofs. Transactions of the American Mathematical Society, 177, (1973), pp.29–36
73 **Pascal ,Blaise** ; 松浪信三郎(訳・注): パンセ. 講談社(上), (1971)
74 **Péter ,Rózsa**: Über die mehrfache Rekursion Mathematische Annalen vol 113,(1936),§10,7
75 **Péter ,Rózsa**: Recursive Functions. Academic Press, (1967)
76 **Petzold ,Charles**: The Annotated Turing. Wiley, (2008)
**チャールズ・ペゾルド,** 井田哲雄(訳), 鈴木大郎(訳), 奥井哲(訳), 浜名誠(訳), 山田俊行(訳): チューリングを読む.日経 BP 社, (2012)
77 **Poincaré,Henri**: Sur le Problème des Trois Corps et les Équations de la Dynamique, Acta Mathematica 13, (1890) pp.1-270;
78 **Poisson ,Siméon Denis**: Probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilities. Bachelier, (1837), p.7
79 **Pólya ,George**: Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem. Mathematische Zeitschrift, vol 8, Issue 3, (1920), pp.171-181
80 **Rado, Tibor** : On non-computable functions, Bell System Technical Journal, Vol. 41, No. 3 (May 1962), pp. 877-884.
81 **Ramsey ,Frank Plumpton;** D. H. Mellor (編),伊藤邦武(訳),橋本康二(訳): "Xエピローグ". ラムジー哲学論文集. 勁草書房, (1996)
82 **Rooney ,Ann**, The Story Of Mathematics. Arcturus Pub, (2012)
83 **Sawamura Hiromasa; Shima Keisetsu; Tanji Jun.**: Numerical representation for action in the parietal cortex of the monkey. // Nature, V. 415, (2002), pp.918-922
84 **Sachs, Abraham Joseph; Strassmaier, Johann Nipomuk** : Late Babylonian astronomical and related texts. Copied by T.G.Pinches and J.N.Strassmaier. Providence, (1955)
85 **Schwichtenberg ,Helmut; Wainer ,Stanley**:Proofs and Computations, Helmut Schwichtenberg,　Cambridge University Press, (2011) ,p.161
86 **Soifer ,Alexander**: Ramsey Theory. Yesterday, Today, and Tomorrow. Springer Science & Business Media, (2010)
87 **Smith, David Eugene**: History of Mathematics vol2. Ginn And Company, (1925), pp.80-86
88 **Stanislas Dehaene**: The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. Oxford University Press, (2011)
89 **Steinhaus ,Hugo**: Mathmatical Snapshots. Oxford University Press, (1950)
**スタインハウス,H** ; 遠山 啓(訳): 数学スナップ・ショット. 紀伊國屋書店, (1976)
90 **Stewart ,Ian**; 水谷 淳(訳): 数学の魔法の宝箱. ソフトバンククリエイティブ, (2010)
91 **Turing ,Alan Mathison**: Systems of Logic Based on Ordinals Proc. London Math. Soc. s2-45 (1) , (1939), pp.161-228
92 **Veblen ,Oswald**: Continuous Increasing Functions of Finite and Transfinite Ordinals, Transactions of the American Mathematical Society 9 (3) , (1908), pp.280–292
93 **Vossii ,Johannis Henrici**:　Johannis Henrici Vossii Commentarii Virgiliani. apud Brockhaus et Avenarius. (1838)
94 **Weyl ,Herman**: Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. Annalen der Physik 59, (1919), p.129

95 **Weyl, Hermann**; 内山龍雄(訳): 空間・時間・物質（下）. 筑摩書房, (2007)

96 **Wilson,Robin**; 茂木健一郎(訳): 四色問題. 新潮社, (2004)

97 **足立暁生; 笠井琢美**; 広瀬健(編): "計算機科学への応用". 数学基礎論の応用. 日本評論社, (1981),p.125

98 **泉井久之助**: 印欧語における数の現象. 大修館書店, (1978)

99 **板橋倫行(校注)**:日本霊異記. 角川書店, (1957), p.159

100 **井上幸義**: 数詞≪4≫と≪5≫の境界に横たわるものはなにか? 上智大学外国語学部紀要. 41 号,(2007), pp.217-241

101 **内林政夫**: 数の民族誌. 八坂書房, (1999)

102 **大野 誠**:"第 8 章分子論の新たな展開のために". 原子論・分子論の原典 3. 学会出版センター, (1993)

103 **大山 正**: ひと目で何個のものが見えるか.別冊サイエンス イメージの科学（特集視覚の心理）.日経サイエンス社, (1982), pp.31－41

104 **鹿野 健(編著)**: リーマン予想.日本評論社, (1991)

105 **梶山雄一(訳), 赤松明彦(訳)**: 大乗仏典 1 大智度論

106 華厳経: SAT 大正新脩大藏經テキストデータベース

107 高等学校化学 I 第一学習社（平成 14 年検定済）

108 **小島寛之**: 無限を読み解く数学入門. 角川学芸出版, (2009)

109 **近藤基吉**: P.J. Cohen の方法とその数学的意義. 科学基礎論研究 Vol. 7,No4, (1966,3 月),p179

110 **斎藤 憲**: アルキメデス『方法』の謎を解く. 岩波書店, (2014)

111 **定方 晟**: 須弥山と極楽. 講談社, (1973)

112 **定方 晟**: インド宇宙論大全. 春秋社, (2011)

113 **佐藤 任**: 古代インドの科学思想. 東京書籍, (1988)

114 **末綱恕一**: 華厳経の世界. 春秋社, (1957)

115 **杉本圭三郎(全訳注)**: 平家物語(十).講談社, (1988)

116 **鈴木真治**: 指数はなぜ指数と云うのか. 第 24 回数学史シンポジウム, (2013)

117 **鈴木真治**: カントールによらない実数に非可算性の証明. 第 25 回数学史シンポジウム, (2014)

118 **朱世傑**: 算学啓蒙, (1299)[101]

119 **徐岳(撰); 甄鸞(注)**: 数術記遺[102]

120 **銭宝琮**; 川原秀城(訳): 中国数学史 .みすず書房, (1990)

121 **高木貞治**: 新式算術講義. (1904: 筑摩書房 2008)


[101] http://www.wasan.earth.linkclub.com/sangakukeimo/sangaku.html 上巻 p.12

[102] http://www.wul.waseda.ac.jp/kotenseki/html/ni05/ni05_00865/index.html p.144,pp.150-151


122 **高木貞治**: 数学雑談.共立出版, (1935)

123 **竹内外史**: 数学基礎論の世界. 日本評論社, (1972)

124 **竹内敬人**: 人物で語る化学入門. 岩波書店, (2010)

125 **伊達宗行**: 「数」の日本史. 日本経済新聞出版社, (2007)

126 **田中一之; 角田法也; 鹿島亮; 菊池誠**: 数学基礎論講義. 日本評論社, (1997)

127 **田中一之**: ゲーデルに挑む. 東大出版会, (2012)

128 **玉野研一**: なっとくする無限の話. 講談社, (2004)

129 **田村松平(編)**: ギリシャの科学. 中央公論社, (1980)

130 **辻下 徹**: 「複雑系叢書 7 複雑さへの関心」. 共立出版, (2006), pp.55－108

131 **程大位**: 新編直指算法統宗. 文盛堂, (1593)

132 **寺澤 順**: 現代集合論の探求. 日本評論社, (2013)

133 **照井一成**: コンピュータは数学者になれるのか? 青土社, (2015)

134 **長尾雅人(訳)**: 金剛般若経(世界の名著 2 大乗仏典), 中央公論社, (1967)

135 **中村元(監修);前田專學**：相応部経典第二巻. 春秋社, (2012)

136 **野矢茂樹**: 無限論の教室. 講談社, (1998)

137 **秦 剛平(訳)**: 民数記 七十人訳ギリシャ語聖書IV. 河出書房新社, (2003)

138 **林 隆夫**: インドの数学. 中央公論社, (1993)

139 **原田耕一郎**: モンスター 群のひろがり. 岩波書店, (1999)

140 **一松 信**: 数のエッセイ. 筑摩書房, (2007)

141 **松田卓也**: 人間原理の宇宙論. 培風館, (1990)

142 **松田卓也**: 巨大数の謎と宇宙の調和.天文月報, (8 月号 1984 年), pp.203-206

143 **三浦俊彦**: 論理学入門. 日本放送出版協会, (2000)

144 **宮本正尊(編)**: 大乗仏教の成立史的研究. 三省堂出版, (1954)

145 **ミルトス・ヘブライ文化研究所(編)**：民数記 I ヘブライ語聖書対訳シリーズ 7. ミルトス, (2013)

146 **吉田敦彦**: ＜数＞の比較神話学. エピステーメー, 朝日出版社, (11 月号 1976)

147 **吉田光由**；大矢 真一(編): 塵劫記.(初版 1627, 岩波書店 1977)

148 **矢野道夫**, 伊東俊太郎(編),村上陽一郎(編): "ヘレニズム科学のインド化". 比較科学史の地平(講座科学史). 培風館, (1989)

149 **山本義隆**: 小数と対数の発見. 数学文化. 第 21 号～第 24 号(連載中). 日本評論社

150 **李迪**; 大竹茂雄(訳);陸人瑞(訳): 中国の数学通史. 森北出版, (2002)

# 附録

## 1. 巨大数関連略年表（～1995）

| 年 | 事項 | 巨大数 |
|---|---|---|
| 3万7千年前 | イシャンゴ獣骨 | 21 |
| 2万5千年前 | レボンボ獣骨 | 29 |
| B.C.1440年 | 旧約聖書の出エジプト記, 民数記が現れる.<br>（文字として書き下されたのはB.C.950-B.C.550頃） | 603,550 |
| 殷（商）代<br>B.C.17世紀－1046 | 甲骨文字に「百」，「千」，「万」のもとの漢数字が現れる. | 三万 |
| 春秋時代<br>B.C.770－403 | 「億」，「兆」，「経」，「妶」などの数詞が現れる | |
| B.C.7－8世紀頃 | ニネヴェ定数(Nineveh Constant) | 195兆9552億 |
| B.C.450－100頃 | 後期バビロニアの巨大数 | $3^{92}$, $9^{11}\cdot 12^{39}$ |
| B.C.287－212頃 | アルキメデスの「砂の計算者」，<br>「牛の問題」，<br>「ストマッキオン」 | $10^{63}, 10^{8\times 10^{16}}$<br>$10^{206545}$<br>17,152 |
| B.C.1世紀頃 | ジャイナ教の経典アヌオーガッダラスートラで巨大数の階梯 | **超限順序数$\varepsilon_0$の構成に酷似** |
| 1世紀頃 | **法華経にアルキメデスの「砂の計算者」の影響？** | |
| 南北朝時代<br>439－589 | 「孫子算経」　万万を億，兆，京，垓，秭，穣，溝，澗，正，載 | |
| 1－7世紀 | 華厳経成立<br>晋経：不可説轉轉<br>唐経：不可説不可説轉 | <br>$10^{5\cdot 2^{120}}$<br>$10^{7\cdot 2^{122}}$ |
| 13世紀 | マクシムス・プラニュースによるmillionの発明 | million= mille+on |
| 1299年 | 朱世傑　「算学啓蒙」載の後の極，恒河沙，阿僧祇，那由他，不可思議，無量数 | |
| 1475年 | ヨハン・アダムが巨大数体系を創案 | million,billions, trillions |
| 1484年 | ニコラ・シュケが巨大数体系を創案 | million, billion, trillions |
| 1520年 | エティエンヌ・デュ・ラ・ロッシュがシュケの体系の発表 | |
| 1549年 | ジャック・ペルチエ | milliards,billiards |
| 1631年 | 吉田光由が「塵劫記」で数体系を発表 | 無量大数＝$10^{68}$ |
| 1634年 | 「塵劫記」の数体系が万進型中数法に統一される | |
| 17世紀 | ロバート・フックの頭で考えられる異なる考えの数 | 3,155,760,000 |
| 1690年 | **ジョン・ロック『人間理解に関する随想：第１６章数　第6節　数に対する名前の必要性』** | Units<br>Millions<br>Billions<br>Trillions<br>Quintrillions<br>Sextillions<br>Septillions<br>Octillions<br>Nonillions |
| 1715年 | **デヴィッド・グレゴリーのmagnus annus（劫年）計算** | 25,000年或いは26,000年 |
| 1811年 | アボガドロの法則提唱 | |
| 1837年 | ポアソン　定理名に「大数の法則」を採用 | |
| 1861年 | グラスマン　加法と乗法の帰納的定義 | |
| 1862年 | **科学的表記が生まれる（アーネスト・エッセルバッハ）** | $a\times 10^b$ |
| 1865年 | アボガドロ定数の最初の測定 | $6.02\times 10^{23}$<br>(現在の値) |
| 1871年 | デュ・ボワ・レイモンによる初めての対角線論法 | |
| 1881年 | パースが加法と乗法の帰納的定義 | |
| 1888年 | デデキントが原始帰納関数を定義 | |
| 1890年 | ポアンカレ回帰定理 | |
| 1895年 | A. H. ベル　牛の問題の解の桁数を特定する | |
| 1896年 | ボルツマン　ポアンカレ周期を計算する | $10^{10^{10}}$ |
| 1903年 | ハーディー階層 | |
| 1908年 | ヴェブレン階層 | |
| 1915年 | **用語“Scientific notation”が数学教育の論文で初出（F. L.グリフィン）** | |
| 1925年 | ヒルベルトが一般超冪演算を定義 | |
| 1928年 | アッカーマン関数 | |
| 1930年 | ラムゼーの定理 | |
| 1931年 | ゲーデル数 | |

| | | |
|---|---|---|
| 1933年 | 第1スキューズ数 | $10^{10^{10^{34}}}$ |
| 1934年 | スコーレムの超準自然数 | 超準元 |
| 1936年 | R. ペータが多重再帰関数を定義 | |
| 1936年 | チューリングの記述数 | |
| 1937年 | ディラックの巨大数仮説 | $10^{40}$ |
| 1938年 | エディントン数 | $1.57\times10^{79}$ |
| 1938年 | グーゴルが命名される | $10^{100}$ |
| 1944年 | グッドステイン数列 | |
| 1947年 | グッドステインがテトレーション，ペンテーション，ヘキセーションを命名（演算そのものは1925年にヒルベルトが既に定義済） | |
| 1950年 | ボレル　到達不能数 | |
| 1950年 | スタインハウス　Megaを定義<br>多角形表記 | |
| 1953年 | **リトルウッドがF.G.Hに近いアイデアを巨大数に適用することを示唆(現代巨大数論の基本思想)** | |
| 1953年 | グルツェゴルスチクがF. G. Hに近い概念を発表 | |
| 1955年 | 第2スキューズ数が発表される | $10^{10^{10^{963}}}$ |
| 1962年 | ラドーのビジービーバー関数 | |
| 1965年 | 牛の問題がコンピュータを使って完全解決 | |
| 1960年代 | モーザー数　多角形表記の拡張 | |
| 1971年 | 小グラハム数 | |
| 1976年 | クヌースの矢印表記 | $a\uparrow^c b$ |
| 1976年 | 4色問題がコンピュータを使って解決 | |
| 1977年 | マルチン・ガードナーがクヌースの矢印表記を使ってグラハム数を紹介する | |
| 1977年 | RSA暗号 | |
| 1979年 | ブレーカリー、ボロシュによるクヌースの矢印表記の研究 | |
| 1981年 | コンウェイ　モンスター群の位数を特定 | $\fallingdotseq 8\times10^{53}$ |
| 1981年 | ミシェスルキーの巨大性公理 | |
| 1982年 | カービーとパリスのヒドラゲーム | |
| 1994年 | リンデの確率論的インフレーション宇宙のポアンカレ回帰期間 | $10^{10^{10^{10^{10^{1.1}}}}}$ |
| 1995年 | コンウェイのチェーン表記 | $a\to b\to c$ |

## 2. 原始の巨大数

太古の昔，未だ人類が共通概念，あるいは言葉として「数」を持つ以前から，我々の祖先は，個数の多寡についての素朴な認識能力を有していたと考えられている．レボンボ獣骨（2 万 5 千年前）やイシャンゴ獣骨（3 万 7 千年前）はこの仮説を裏付けるもので，何らかの数現象，例えば日数，の記録ではないかと推察されている．このような視点に立てば，当時の記録手段で表現出来ないほど大きな数を原始の巨大数と呼んでも良いのかもしれないが，一方で，すべての原始の民が，このような計数記録方法を持っていたとも考えにくい．コイサンマン[103]のように「ひとつ，ふたつ，みっつ，たくさん」と云う数え方で済ませていた部族が，少なからず居たであろう．この場合，「たくさん」を巨大数とみなすことの方が，自然であるように思われる．次に，彼らはどういった理由からこの「みっつ」以下と「たくさん」を分ったのであろうか．すべての原因を疑義なく特定することは難しいが，我々人類に先天的に与えられていた個数の瞬間把握能力が，少なからず影響していることは間違いあるまい．そこで有史以前の巨大数を個数の瞬間把握能力の限界と見なす観点から分析しておくことにする．

この問題の歴史は意外に古く，考えようによっては古代ギリシャの詩人シモーニデース[104]の「記憶宮殿」にまで遡ることもできよう．しかし，実験的な裏付けに基づいた論説は，1871 年，雑誌 Nature に掲載されたイギリスの経済学者，論理学者ジェヴァンズ（W.S.Jevons）（36 歳）による論文「数的な判別力」[105]が，初めてであると言われている．彼自身はその論文の中で，ハミルトン卿がこの問題を実験的に考察することを提案していることに触れ，「この主題はよりシステマティックに研究される価値が

---

103 いわゆる，ブッシュマン(元々の意味は「藪の中を移動して暮らす原始的な人」)のこと．この呼び名は，現在では差別用語とされている．

104 Simonides(B.C.556- B.C.468)　この時代を代表する詩人であり，母音の長短に区別を与えたり，王を仲裁して戦争を回避させたりすることも出来た人物である．また，お金が大好きだったことでも有名である．「記憶宮殿」とは，彼の編み出した一種の記憶術であり，そのきっかけについては，次のようなエピソードがある．パトロンのスコパスが戦車競走で勝利した祝宴で，シモーニデースは勝利を祝う頌歌を歌ったが，双子の神（カストルとポリュデウケス）の讃美に多くが割かれていたので，スコパスは怒って，詩作の代金を一部しか払わず，残りは双子の神に請求しろと言った．そのすぐ後，二人の若い男がシモーニデースに会いに来たと聞かされて，シモーニデースが宴会の部屋を出た途端，天井が崩れ落ちて，スコパスと客たちはその下敷きとなった．瓦礫を掘り返している間，シモーニデースは死んだ客たちの身元を調べるよう頼まれたのだが，部屋を出る前に人々がテーブルのどこにいたか，その座席の記憶から，身元を特定することができた．

105 "The Power of Numerical Discrimination," in Naturevolume III, 1871

あるように私には思えた」と記している．
　この種の研究の現状を簡単にまとめたものとしては，ドゥアンヌの著書『The Number Sense [106]（数の感覚）』が出色である．キース・デブリンはドゥアンヌの説に従い，我々の数認識能力は4以上から計数的把握（カウンティング）に移るので，いくつかの言語における数詞の規則性は4以上から変わると次のように説明をしている．

　対象物の数が3つを超えると，急にふるまいが変わるという事実は，脳が二つのメカニズムを使っている可能性を示唆している．3つ以下の集合については，ほとんど瞬時に，カウンティングなしに数が認識される．しかし，4つ以上の集合については，カウンティングによって答がでていると考えるのが妥当ではないかと思われる．・・・ドゥアンヌが著書『The Number Sense（数の感覚）』に書いているパリ在住のある女性患者は，脳の損傷によって，ものをかぞえる能力がそこなわれ，一つずつチェックしていくことさえできなくなった．しかしコンピュータの画面上に三つ以下のドットをぱっと表示されると，即座に正しい数を言うことができた．・・・
『数学する遺伝子』[Devlin] pp.61-63

[107]この仮説は大変興味深いが，鵜呑みにすることは出来ない．実際，4から規則性が変わる数詞ばかりではなく，5番目から変わる例も多々あり，これを受けて「数4と5の間に谷間」があると主張する論者もいるからだ．
　例えば，内林政夫氏は『数の民族誌』[内林]pp.110-120で，薬学の専門家らしく有機化学の最初に習う「メタン，エタン，プロパン，ブタン，ペンタン，ヘキサン，・・・」で，4番目のブタンまでは固有の名がついているのに5番目のペンタン以降は数詞で呼ばれる[108]ようになったのはなぜか，と云う素朴な疑問に対して言語学の蘊蓄を駆使して分析されている．著者の見るところ，氏がこの現象の根本的な原因とされているものは，この著書に引用されている次のL.Gerschelの言葉に尽きるように思われる．

　目の前にならんでいるものを見て，直接の数感覚だけに頼り―つまり，あらかじめそれらを数えることなしに―その数をいいあてるとしたら，1, 2, 3，そして4まではいとも簡単．だが具体的数量を識別するわれわれの能力は，一般に4で行き止まる．実際に5から先はすべて混沌となる．数進行は4で止まる．

　同様に，吉田敦彦氏は『<数>の比較神話学』の中でこのような現象，4と5の谷間，が数詞の世界にも色濃く現れていることを次のように明言されている．

　・・・ところがギリシャ語でこのような変化をするのは一から四までの数詞だけで，五から上の数詞はそれぞれ単一の形しかもたぬ無変化語である．この事情はインド・イラン語をはじめ，アルメニア語，バルト語，スラヴ語，ケルト語などでも同様であり，祖語に遡ることが確実と思われる．つまりインド・ヨーロッパ語族は，一から四までの数詞だけを，他の数詞と違って，名詞に合わせ性と格を変化させねばならぬ形容詞としてとり扱っていたのである．・・・このように一から四までの数を一眼で判別できる基本的数として，それ以上の一瞥によっては『多数』としか認知されぬ数と区別した意識は，近年提唱されるようになった有力な語源説によれば，インド・ヨーロッパ語の『五』の数詞にも反映している可能性があると思われる．
『<数>の比較神話学』[吉田]pp.40-41

　更に，井上幸義氏は『数詞≪4≫と≪5≫の境界に横たわるものはなにか?』で，ロシア語の数詞の形態上及び統語上の著しい変化を5以上は受けなかったことから，「人間が数詞≪4≫と≪5≫によってそれぞれ規定される数量を認識する場合，根本的な相違があると仮定することができる．」とされ，この相違が何に起因されるのかを言語学的分析のみならず視覚心理学や脳神経学の実験結果まで考慮して詳しく研究されている．
　イフラーは，生涯を懸けた大著『数字の歴史』[Ifrah]pp.110-113の中で世界の古代文明の17民族22の記数法を紹介している．これによると，<<1>>，<<2>>については100%が一，二やⅠ，Ⅱのように自然数と記号の線の本数が1：1対応しており，<<3>>については96%，<<4>>については58%が1：1対応している．しかし，<<5>>に至ると僅か9%だけが1：1対応しており，その他の記数法はⅤのようにグループ分けされている．この1：1対応の適用率から<<3>>と<<4>>及び<<4>>と<<5>>の間に明らかな変り目が見える．
　私見では，瞬間把握と計数把握の変わり目が厳密に決定されるかどうかは疑問である．しかし，これまでの考察から<<4>>,<<5>>あたりにその変わり目があると考えても問題はあるまい．そして，これが本節で定義した「原始の巨大数」に当たると云うことになろう．

　余談であるが，数の瞬間把握と計数把握の区別は昔から数学者も認めて

---

106　「数覚」と云う訳語は，小平邦彦氏が提唱され，数学業界で既に市民権を得ている別の意味を有する造語と被るので，出来れば「数の感覚」か，いっそ「ナンバーセンス」とでも訳してもらえたらと感じた．
107　ガモフが有名な著書の題名を“One Two …infinity”や“One Two Tree Four…infinity”ではなく『One Two Three…infinity』にしたのも同じ理由からだろう．著者がそう推測する理由は本書の「第1章大きな数」の冒頭に現れる大きな数を言い合う笑い話にある．
108　ギリシャ語の数詞
mono(1),di(2),tri(3),tetra(4),penta(5),hexa(6),hepta(7),octa(8),nona(9),deca(10)

おり，例えば高木貞治(29)は『新式算術講義』の中で次のように書いている．

> 吾人の者を数ふるや，一々心の裡に斯くの如き複雑なる作用を反復するまでもなく，一見して直ちに其数の三たり，又は五たるを知り得べきこと固より是あり．これは三個五個等少数の物にありては，之を数ふる作用は吾人の屢々反復せる所にして，三個の物，五個の物の与ふる全体の印象は，吾人の記憶の銘せられ，此記憶に扶けられて吾人は殆んど我心に数ふる作用をなすを知覚せずして直ちに其数を知ることを得るなり．此故に少数の物と雖も其物の排列，動静等が其数を知るの難易に関係すること甚だ多し，正しく列びて静止せるときは十個以下の物の数を一目して知ること難からざるべけれども，此等の物が運動せるとき，又は不規則に排列せられたる時は，必ずしも然らず．
>
> 『新式算術講義』[高木:1904] pp.13-14

数学書にしては，かなりつっこんだ認知心理学的[109]な数認識の有様を分析している．しかし，「十個以下の物の数を一目して知ること難からざるべけれ」は，実験結果から少し乖離している．高木自身の瞬間把握能力が，優れていたのかもしれない．

[109] Frege(36)は『算術の基礎』(1884)において「心理的なものを論理的なものから，主観的なものを客観的なものから，明確に分離すること．」(X)と云う第一原則を立てている．これは彼が数概念の探究を数学と論理学の共通課題と見なし，更に，当時の論理学や数の基礎理論に侵入している心理学的考察法・心理主義がこの共同作業にとって大きな妨げになっていると考えたからであろう．逆に見れば，当時の論理学や数の基礎理論において心理主義は当然のものとして蔓延っていた．高木のこの言説はその頃の数学書の影響ではないかと思われる．では，いつ頃，数学から心理主義は放逐されたのか．これに対する厳密な解答を著者は持たないが，少なくとも高木は，数の基礎を解説した『数学雑談』[高木:1935]では，上述のような心理主義的叙述を行っていない．
　但し，これをもって，Frege の思想が 1935 年までに浸透したと結論付けるつもりはない．確かに，高木自身の対外的な，数学表現への影響はある程度あったかもしれないし，それをもって，数学理論からの心理学的考察法・心理主義の除去が進んだと言えなくもないが，一方で，数学者が数学を行うと云う根源的な活動の場における心理主義的側面を完全に否定する訳にはいかないからである．

## 3. グラハム数とスタインハウス数，アッカーマン数の比較問題

現代の巨大数論の魅力の一つは，指数表記では統制出来ないほど巨大な数同士の比較を行うところにあるのだが，その際，どうしても新しい表記方法が必要となる[110]．ここでは，古典的なクヌースの矢印表記を使って，巨大数としては比較的小さいが，指数表記では統制出来ない数同士の比較例として「$A(4,4) < Mega < ToriTori < A(5,5)$」を示す[111]．その際，アッカーマン関数$A(x,y)$にクヌースの矢印表記を使った明示的な表現式を与えておく．この表示式は簡便で，例えば，$A(x,y)$が二重帰納関数であることや$A(x,x)$が$x \geq 4$についてすべて 13 を因数に持つことを自明にする．

その後，歴史的に有名なグラハム数とモーザー数を比較して，「モーザー数＜グラハム数」を示した上で，この考察を精密化することにより，「多重アッカーマン数$A^{64}(3)$＜スタインハウス数＜グラハム数＜多重アッカーマン数$A^{65}(3)$」の証明を与えた．最後に現代巨大数論の基本アイテムとなった F.G.H を紹介し，クヌースの矢印表記を使って有限順序数に対応する F.G.H を明解な不等式で評価する．この評価式は上述の巨大数たちで，その生成増加関数が同じ階層の F.G.H に属しているもとのそうでないものを識別することを簡単にする．

出自の異なる指数では表現しきれない巨大数同士の比較としては細やかな評価が必要とされる生成関数が同じ F.G.H の階層に属している場合と異なる階層に属している場合を並説することで，F.G.H による計量化の有効性が見えるので，巨大数の魅力を伝えるには適切な例であると考えた．

巨大数の歴史からは若干離れるかもしれないが，まとまった書物も論文も殆どなく，散在的なネット情報だけに頼らざるを得ない巨大数論の現状を鑑みれば，この附録程度の概説でも興味を持たれた方には参考になるであろう．

**Definition1 (クヌースの矢印表記)：**

$x \uparrow y = x^y \quad for\, x,y \geq 1$

$x \uparrow\uparrow y = x \uparrow (x \uparrow\uparrow (y-1)) \quad for\, x \geq 1, y \geq 2$

$x \uparrow\uparrow\uparrow y = x \uparrow\uparrow (x \uparrow\uparrow\uparrow (y-1)) \quad for\, x \geq 1, y \geq 2$

・・・・・・・・・・・・・・・

$x \uparrow^n y = x(n\text{個の}\uparrow)y \quad for\, x,n \geq 1, y \geq 2$

$x \uparrow^n 1 = x \quad for\, x,n \geq 1$

[110] Conway は次のような評価式を与えている．『数の本』[Conway]p.72
$(3 \to 3 \to 64 \to 2) = f^{64}(1) < f^{64}(4) =$ グラハム数 $< f^{64}(27) = (3 \to 3 \to 65 \to 2)$

[111] [Knuth]は実質的には定義を与えただけであり，この矢印表記の具体的な研究は 3 年後に Blakley と Borosh によって発表された[Blakley& Borosh]に持ち越された．しかし，彼等も矢印表記を具体的な巨大数の比較問題に応用することはしていない．ここでは応用を主眼として self-contained に叙述するが，主定理とは別に，参考として，[Blakley& Borosh]からいくつか有用な定理も証明抜きで紹介しておくので，興味を持たれた方は直接原論文に当たられたい．

**Definition2 (スタインハウス・モーザーの多角形表記)**：[112]

$m(1,y)=y^y$

$m(2,y)=\underbrace{m(1,m(1,\dots m(1,y)\dots)}_{y\text{個の}m}$

. . . . . . . . . . . .

$m(x,y)=\underbrace{m(x-1,m(x-1,\dots m(x-1,y)\dots)}_{y\text{個の}m}$

**Definition3 (アッカーマン関数)**：

$A: N\times N\to N$　は次のように帰納的に定義される関数とする．

i) $A(0,y)=y+1$　ii) $A(x+1,0)=A(x,1)$　iii) $A(x+1,y+1)=A(x,A(x+1,y))$

**Definition4(いくつかの巨大数):**

スタインハウスの$mega:=m(3,2)$

トリトリ[113]$:=3\uparrow^3 3$

グラハム数　$G:=f^{64}(4)$　但し，$f(x)=3\uparrow^x 3$

スタインハウス数[114]　$S:=\mu^{64}(3)$　但し，$\mu(x)=m(x,2)$

特に，モーザー数は　$M:=m(mega,2)=m(m(3,2),2)=\mu^2(3)$

アッカーマン数[115]は　$A^{64}(3):=A^{64}(3,3)$　によって定義する．

**Proposition 1**: トリトリは$mega$より大きい．すなわち，$\mu(3)=m(3,2)<3\uparrow^3 3=f(3)$.

特に，$u(x)=x^x$ とおくと$m(3,2)=u^{258}(2)$，$v(x)=3^x$ とおくと$3\uparrow^3 3=v^{3^{27}-1}(3)$である．

(proof)

$m(3,2)=m(2,m(2,2))$

$=\underbrace{m(1,m(1,\dots m(}_{256\text{個の}m}1,m(1,m(1,2)))\dots)$　　$m(1,m(1,2))=m(1,2^2)=4^4=256$ より

$=\underbrace{m(1,m(1,\dots m(}_{258\text{個の}m}1,2)\dots)$

$u(x)=x^x$ とおくと

$m(3,2)=u^{258}(2)$

一方，

$3\uparrow^3 3=3\uparrow^2(3\uparrow^2 3)$

$=\underbrace{3\uparrow(3\uparrow(3\uparrow\cdots(3\uparrow 3)}_{3^{27}\text{個の}3}\dots)$

$=3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\Big\}3^{27}$ 個の 3

$v(x)=3^x$ とおくと

$3\uparrow^3 3=v^{3^{27}-1}(3)$

さて，

$u(x)=x^x<(3^x)^x=3^{x^2}<3^{3^x}=v^2(x)\quad for\ x\geq 2.$

これより

$m(3,2)=u^{258}(2)<v^{2\times 258}(2)<v^{2\times 258}(3)<v^{3^{27}-1}(3)=3\uparrow^3 3=f(3).$

Q.E.D.

急激に増加する関数としてはアッカーマン関数が有名であるが，その増加状況を理解する上で次の表現は有用である．

**Proposition 2:**

$$A(x,y)=\begin{cases}2+y & for\ x=1,\ y\geq 1\\ 2y+3 & for\ x=2,\ y\geq 1\\ (2\uparrow^{x-2}(y+3))-3 & for\ x\geq 3,\ y\geq 1\end{cases}$$

(proof)

| | |
|---|---|
| $A(1,y)=A(0,A(1,y-1))$ | Definition3・iii) |
| $=A(1,y-1)+1$ | Definition3・i) |
| $=A(0,A(1,y-2))+1$ | Definition3・iii) |
| $=A(1,y-2)+2$ | Definition3・i) |
| . . . . . . . . . . . . . . | |
| $=A(1,0)+y$ | Definition3・i) |
| $=A(0,1)+y$ | Definition3・ii) |
| $=2+y$ | Definition3・i) |
| $A(2,y)=A(1,A(2,(y-1))$ | Definition3・iii) |
| $=A(1,A(1,A(2,y-2)))$ | Definition3・iii) |
| . . . . . . . . . . . . . . . | |
| $=\underbrace{A(1,A(1,\dots A(1,A(}_{y+1\text{個の}A}2,0))\dots)$ | Definition3・iii) |
| $=A(1,A(1,\dots A(1,A(1,1))\dots)$ | Definition3・ii) |
| $=\underbrace{A(1,A(1,\dots,A(1,3)}_{y\text{個の}A})\dots)$ | $A(1,y)=2+y$ |

[112] オリジナルの Steinhaus の多角数とは少し定義が異なるが本質的な部分は踏襲している．

[113] アメリカのグーゴロジスト，Jonathan Bowers の命名で，現在では，多くのグーゴロジストに親しまれている．

[114] Steinhaus がこのような定義をしたわけではない．しかし，彼の多角数の定義から自然に定義出来るものであるので彼の名前を冠した．もちろん，64 回のイテレーションは Graham 数との比較を意識しており，同じイテレーションで比較することに意味があると考えたからである．

[115] 一般的に認知された定義ではないが，定義の意味するところは明解であろう．

$$= \underbrace{A(1,A(1,\dots,A}_{y-1\text{個の}A}(1,2+3))\dots) \qquad A(1,y)=2+y$$

$$= \underbrace{A(1,A(1,\dots,A}_{y-2\text{個の}A}(1,2+2+3))\dots) \qquad A(1,y)=2+y$$

・・・・・・・・・・・・・・・

$$= 2y+3 \qquad A(1,y)=2+y$$

$x \geq 3$ については $x$ についての帰納法によって証明する.

$x = 3$のとき

$$A(3,y) = A(2,A(3,(y-1)) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

・・・・・・・・・・・・・・・

$$= \underbrace{A(2,A(2,\dots,A}_{y+1\text{個の}A}(3,0)\dots)) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

$$= \underbrace{A(2,A(2,\dots,A}_{y+1\text{個の}A}(2,1)\dots)) \qquad \text{Definition3・ii)}$$

$$= \underbrace{A(2,A(2,\dots,A}_{y\text{個の}A}(2,2\cdot 1+3)\dots)) \qquad A(2,y)=2y+3$$

$$= \underbrace{A(2,A(2,\dots,A}_{y-1\text{個の}A}(2,2(2\cdot 1+3)+3)\dots)) \qquad A(2,y)=2y+3$$

$$= \underbrace{A(2,A(2,\dots,A}_{y-2\text{個の}A}(2,2(2(2\cdot 1+3)+3)+3))\dots) \qquad A(2,y)=2y+3$$

・・・・・・・・・・・・・・・

$$= \underbrace{2(\dots(2(2}_{y+1\text{個の}2}\cdot 1+\underbrace{3)+3)+3)\dots)+3}_{y+1\text{個の}3}$$

$$= 2^{y+1}+3(1+2+2^2+\dots+2^y)$$

$$= 2^{y+3}-3$$

$$= 2\uparrow(y+3)-3 \qquad \text{Definition1}$$

$x$のとき $A(x,y) = (2\uparrow^{x-2}(y+3))-3$ $for\ x \geq 3,\ y \geq 1$ が成立すると仮定する.

$x+1$のとき

$$A(x+1,y) = \underbrace{A(x,A}_{2\text{個の}A}(x+1,y-1)) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

$$= \underbrace{A(x,A(x,A}_{3\text{個の}A}(x+1,y-2))) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

$$= \underbrace{A(x,A(x,A(x,A}_{4\text{個の}A}(x+1,y-3)))) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

・・・・・・・・・・・・・・・

$$= \underbrace{A(x,A(x,A(x,\dots A(x,A}_{y+1\text{個の}A}(x+1,0))\dots))) \qquad \text{Definition3・iii)}$$

$$= \underbrace{A(x,A(x,A(x,\dots A(x,A}_{y+1\text{個の}A}(x,1))\dots))) \qquad \text{Definition3・ii)}$$

$$= \underbrace{A(x,A(x,A(x,\dots A}_{y\text{個の}A}\underbrace{(x,(2\uparrow^{x-2}4)-3)}_{1\text{個の}\uparrow^{x-2}}\dots))) \qquad \text{帰納法の仮定より}$$

$$= \underbrace{A(x,A(x,A(x,\dots,}_{y-1\text{個の}A}\underbrace{(2\uparrow^{x-2}(2\uparrow^{x-2}4)-3)}_{2\text{個の}\uparrow^{x-2}}\dots))) \qquad \text{帰納法の仮定より}$$

・・・・・・・・・・・・・・・

$$= \underbrace{2\uparrow^{x-2}2\uparrow^{x-2}\dots 2}_{y+1\text{個の}\uparrow^{x-2}}\uparrow^{x-2}4-3 \qquad \text{帰納法の仮定より}$$

$$= \underbrace{2\uparrow^{x-2}2\uparrow^{x-2}\dots 2\uparrow^{x-2}2}_{y+2\text{個の}\uparrow^{x-2}=y+3\text{個の}2}-3 \qquad 4=2\uparrow 2=2\uparrow^{x-2}2\ \text{より}$$

$$= 2\uparrow^{x-1}(y+3)-3$$

Q.E.D.

**Corollary**: $A(x) = \begin{cases} 3 & for\ x=1 \\ 7 & for\ x=2 \\ (2\uparrow^{x-2}(x+3))-3 & for\ x \geq 3 \end{cases}$

**Remark**: ↑ 記号の指数が変数であることは，この関数が二重帰納関数であることを表している．また，このクヌースの記号があるので上記のように簡潔に表現できるが，指数だけを使って表記すると$A(4) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{7\text{個}}-3$ まではなんとか表せるが，$A(5)$では難しくなる．ちなみに，$A(1)=3, A(2)=7, A(3)=61$ は素数だがそれ以外の$A(n)$はすべて 13 を約数として含むので素数ではない．その証明は本論から少し外れるが，簡単であるし，この表記の秀逸性を示す例にもなっているので紹介しておく．

$$\boldsymbol{A(n) \equiv 0\ \ mod(13)\ \ for\ n \geq 4}$$

次の命題が示せれば上記の命題はその系として導かれる．

$\boldsymbol{2^{2^{2^{f}}} \equiv 3\ \ mod(13)\ \ \ for\ \ \ f \geq 0}$ **但し，$\boldsymbol{f \in N}$**

(proof)

$f \geq 0$ ならば $g \in N$が存在して $2^f = g+1$ となる．

$$2^{2^{f}} = 2^{2^{g+1}} = 2^{2^g\times 2} = 2^{2\times 2^g} = (2^2)^{2^g} = 4^{2^g}$$

$$2^{2^{2^{f}}} = 2^{4^{2^g}} = 2^{4^{2^g}-4}\cdot 2^4 = 2^{4\cdot(4^{2^g-1}-1)}\cdot 16$$

$4^{2^{g-1}} \equiv 1 \ \ mod(3)$ なのである$k \in N$が存在して，$4^{2^{g-1}} - 1 = 3k$

$2^{2^{2^{2^f}}} = 2^{4 \cdot 3k} \cdot 16 = 2^{12 \cdot k} \cdot 16 = (2^{12})^k \cdot 16$ (*)

$2^{12} \equiv 1 \ \ mod(13)$ フェルマーの小定理より

$2^{2^{2^{2^f}}} = (2^{12})^k \cdot 16 \equiv 1^k \cdot 3 = 3 \quad mod(13)$ Q.E.D.

**Lemma1** : $logb \cdot b > 1 \ \ for\, b \geq 2.$
(proof) 容易に証明出来る. Q.E.D.

**Lemma2** : $b \cdot c \leq b^c \ (= b \uparrow c) \quad for\, b, c \geq 2.$
(proof) Lemma1 を使って，容易に証明出来る. Q.E.D.

**Lemma3**: $b \uparrow^x c \ \leq b \uparrow^{x+1} c \ for\ b, c \geq 2, x \geq 1.$
(proof) Lemma2 を使って，$x$ についての帰納法によって証明する. Q.E.D.

**Lemma4**[116]:
$(a \uparrow^x b) \uparrow^x c \ \leq a \uparrow^x (b \cdot c) \leq a \uparrow^x (b \uparrow c) \leq a \uparrow^x (b \uparrow^2 c) \leq \cdots \leq a \uparrow^x (b \uparrow^{x-1} c)$
$\leq a \uparrow^x (b \uparrow^x c) \qquad for\, a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2, x \geq 1$
(proof) Lemma2，Lemma3 を使って，$x$ についての帰納法によって証明する. Q.E.D.

**Lemma5** : $m(n,3) < m(n+1,2) \ for\, n \geq 2.$
(proof) $n$ についての帰納法によって証明する. Q.E.D.

**Proposition 3**: (Case1) $3 \uparrow^n y \leq m(n,y) \ \ for \ \ y \geq 3.$ 等号成立は$n = 1, y = 3$
(Case2) $3 \uparrow^n 2 \leq m(n,2) \ \ for \ \ y = 2, n \geq 2.$
(proof) $n$ についての帰納法によって Case1 と Case2 をそれぞれ証明する．Case2 の証明には Case1 と Lemma5 を使う. Q.E.D.

Lemma4 と Proposition3 の不等式を使うと，Proposition 1 を簡単に拡張出来る.
**Corollary** : $A(4) < mega < tori \cdot tori < A(5)$
(proof)
中央の不等式は Proposition 1 で証明済.
左側の不等式は Proposition 2 の Corollary と Proposition 3 の Case1 を使って証明する.

[116] この命題をより精密化した不等式がある.（Proposition 9）

右側の不等式は Proposition 2 の Corollary と Lemma4 を使って証明する. Q.E.D.

**Proposition 4**: $m(n,x) < x \uparrow^{2n} 3 \ \ for \ \ x \geq 3.$
(proof) Lemma4 を使って，$n$ についての帰納法によって証明する. Q.E.D.

**Corollary**: $3 \uparrow^n x < x \uparrow^{2n} 3 \quad for \ \ n \geq 1, x \geq 3.$
Propsition 3 の Case1 と Proposition4 より証明する.

**Lemma6**: $2x + 1 \leq 3 \uparrow^n x \ \ for\, n \geq 1, x \geq 1.$
(proof) $n$についての帰納法により証明する. Q.E.D.

**Lemma7**: $2 \cdot (3 \uparrow^n 3) + 1 \leq 3 \uparrow^{n+1} 3 \ \ for\, n \geq 1.$
(proof) Lemma6 を使って証明する. Q.E.D.

**Lemma8**:

$$\overbrace{3 \uparrow^{2\times\left(3\uparrow^{\cdot^{\cdot^{2\times(3\uparrow^3 3)}}} 3\right)+1} 3}^{n+1\text{ 個の }\uparrow} \leq \underbrace{3 \uparrow^{\left(3\uparrow^{\cdot^{\cdot^{(3\uparrow^4 3)}}} 3\right)} 3}_{n+1\text{ 個の }\uparrow}$$

(proof) Lemma7 を使って証明する. Q.E.D.

**Proposition 5**: グラハム数はモーザー数より大きい.
すなわち，$\mathrm{M} = m(m(3,2),2) < f^{64}(4) = G$ .
(proof) Proposition 4 と Lemma7 を使って証明する. Q.E.D.

これでグラハム数がモーザー数より大きいことが示されたわけであるが，証明を見れば分るようにグラハム数が圧倒的に大きすぎて不等式としての面白みに欠ける．もっと，僅差での評価が決定される例を与えておく.

**Proposition 6**: $\mu^n(3) < f^n(4)$ .
(proof) Proposition 1，Proposition 4 と Lemma8 を使って証明する. Q.E.D.

**Corollary**: グラハム数はスタインハウス数よりも大きい．$S = \mu^{64}(3) < f^{64}(4) = G$

**Lemma9**: $x + 3 < 3 \uparrow^{x-2} 3 \quad for\, x \geq 3$ .
(proof) $x$についての帰納法により証明する. Q.E.D.

**Lemma10**: $A(x) = (2\uparrow^{x-2}(x+3)) - 3 < 3\uparrow^{x} 2 \quad for\ x \geq 3$ .

(proof)　Proposition 2 の Corollary と Lemma9 を使って証明する.　　Q.E.D.

**Proposition 7**: $A^n(3) < \mu^n(3) < f^n(4) < A^{n+1}(3)$.

(proof)　第 2 不等式は既に Proposition6 で証明済なので, 第 1 不等式を Lemma10 と Proposition 1, Proposition 3 の Case2, Lemma9, Proposition 2 の Corollary を使い, 第 3 不等式を Lemma4 とProposition 2 の Corollaryを使って, $n$についての帰納法により証明する.　　Q.E.D.

**Corollary**:スタインハウス数はアッカーマン数より大きく, グラハム数より小さい.

つまり, $A^{64}(3) < \mu^{64}(3) < f^{64}(4)$

**Definition5**:　(急増加階層[F.G.H]) [117]

μを基本列 (その上限が極限順序数であるような狭義増加順序数列) がμよりも小さなすべての極限順序数に割り当てられるような大きな可算順序数とする.

$\alpha < \mu$に対する関数族　$F_\alpha : N \to N$　の急増加階層は以下のように定義される :

$F_0(x) = x + 1$

$F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(x)$

$F_\alpha(x) = F_{\alpha[x]}(x)$　　$\alpha$は極限順序数

但し, 順序数$\alpha$に対する基本列$\{\alpha[x] : x < \omega\}$は次のように定義する.

(1) $\alpha = 0$ のとき $\alpha[x] = 0$

(2) $\alpha = \beta + 1$ のとき $\alpha[x] = \beta$

(3) $\alpha = \beta + \omega^{\gamma+1}$ のとき $\alpha[x] = \beta + \omega^\gamma \cdot x$ [118]

(4) $\alpha = \beta + \omega^\delta$ で$\delta$が極限数のとき $\alpha[x] = \beta + \omega^{\delta[x]}$

**Lemma11**: $x \leq 2\uparrow^{n+1}(x-2) \quad for\ n \geq 1, x \geq 4$

(Proof)　Lemma3 を使って, $n$についての帰納法により証明する.　　Q.E.D.

---

[117] 急増加階層の証明論での有名な応用例の一つに次のクライゼルの定理がある. これを使って,「グッドステイン数列が必ず 0 に終結する」ことが PA (ペアノ算術) では証明出来ないことが示される.『数学基礎論講義』[田中:1997]

Theorem $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \phi(x_1, \cdots, x_n, y)$ ($\phi$は$\Sigma_1$)が PA で証明出来るとすれば

$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y < F_\alpha(max\{x_1, \cdots, x_n\} + 1)\ (\phi(x_1, \cdots, x_n, y))$

が真となるような急増加関数$F_\alpha$ ($\alpha < \varepsilon_0$)が存在する.

[118] $\alpha[x] = \beta + \omega^\gamma(x+1)$と定義している本もある. (例えば,『数学基礎論講義』[田中:1997])

**Proposition 8**:

$x < F_0(x) \leq 2x \quad for\ x \geq 1$　(等号成立は$x = 1$ の場合)

$2x \leq F_1(x) < 2\uparrow x \quad for\ x \geq 3$

$2\uparrow^{n-1} x < F_n(x) < 2\uparrow^{n-1}(2\uparrow^{n-1} x) < 2\uparrow^n x \quad for\ x \geq 4$

(Proof)

$n = 0$の場合　$x < x + 1 \leq 2x \quad for\ x \geq 1$

$n = 1$の場合　$2x \leq 2x < 2^x = 2\uparrow x \quad for\ x \geq 3$

$n \geq 2$の場合は　$2\uparrow^{n-1} x < F_n(x) < 2\uparrow^n x \quad for\ x \geq 4$　を $n$ についての帰納法で示す.

先ず, 右の不等式を示す.

$n = 2$の場合

$F_2(x) = F_1^x(x)$

$\leq (2\uparrow x) \cdot x$

$< (2\uparrow x)\uparrow x$　　Lemma2　$2\uparrow x, x \geq 2$ より, 但し, $x \geq 4$なので等号は成立せず.

$\leq 2\uparrow x^2$　　Lemma4　$2, x \geq 2$ より

$\leq 2\uparrow 2^x$　　Lemma2　$2, x \geq 2$ より

$\leq 2\uparrow(2\uparrow\underbrace{(\cdots(2\uparrow 2)\cdots)}_{x-2\text{個の}2}) \quad for\ x \geq 4$　　Lemma11 より

$= 2\uparrow^2 x$

$n$の場合 $F_n(x) < 2\uparrow^{n-1}(2\uparrow^{n-1} x) < 2\uparrow^n x$ が成立すると仮定する.

$n + 1$の場合

$F_{n+1}(x) = F_n^x(x)$　　Definition5 より

$\leq \underbrace{2\uparrow^{n-1}(2\uparrow^{n-1}(\cdots(2}_{2x\text{個の}2}\uparrow^{n-1} x)\cdots))$　　帰納法の仮定より

$= \underbrace{2\uparrow^{n-1}(2\uparrow^{n-1}(\cdots(2\uparrow^{n-1}}_{2x-1\text{個の}2}\underbrace{(2\uparrow^{n-2}(2\cdots\uparrow^{n-2}(2\uparrow^{n-2}2)}_{x\text{個の}2}\cdots)))\cdots))$

$< \underbrace{2\uparrow^{n-1}(2\uparrow^{n-1}(\cdots(2\uparrow^{n-1}2)}_{3x-1\text{個の}2}\cdots))$　　Lemma3 より

$< 2\uparrow^n 3x$

$< 2\uparrow^n 2^x$　　$x \geq 4$　なので

$\leq 2\uparrow^n(2\uparrow^n x)$　　$for\ x \geq 4$　Lemma3 より

$\leq 2\uparrow^n(2\uparrow^n(2\uparrow^{n+1}(x-2)))$　　$for\ x \geq 4$　Lemma11 より

$= 2\uparrow^n(2\uparrow^n\underbrace{(2\uparrow^n(\cdots(2\uparrow^n 2)\cdots))}_{x-2\text{個の}2})$　　Definition1 より

$= 2\uparrow^{n+1} x$　　Definition1 より

最後に, 左の不等式　$2\uparrow^{n-1} x < F_n(x)$　を $n$ についての帰納法で示す.

$n=2$の場合

$2\uparrow x = 2^x < 2^x \cdot x \le \mathrm{F}_2(x) = 2^x \cdot x$　なので成立している．

$n$の場合 $2\uparrow^{n-1} x < \mathrm{F}_n(x)$ が成立していると仮定する．

$n+1$の場合

$2\uparrow^n x < 2\uparrow^n (x+1)$

$= \underbrace{2\uparrow^{n-1}(2\uparrow^{n-1}(\cdots(2\uparrow^{n-1}2)}_{x+1\text{個の}2}\cdots))$

$< \underbrace{2\uparrow^{n-1}(2\uparrow^{n-1}(\cdots(2\uparrow^{n-1}}_{x\text{個の}2}x)\cdots))$　　$x \ge 4$ より

$< \mathrm{F}_n^x(x)$　帰納法の仮定より

$= \mathrm{F}_{n+1}(x)$　Definition5 より　　Q.E.D.

**Corollary:**

1)　$2\uparrow^{x-1} x < \mathrm{F}_\omega(x) < 2\uparrow^{x-1}(2\uparrow^{x-1} x) < 2\uparrow^x x$　　$for\ x \ge 4$

2)　$\mathrm{F}_\omega(x-2) < A(x) < \mathrm{F}_\omega(x+3)$　　$for\ x \ge 4$

(Proof)

$\mathrm{F}_\omega(x) = \mathrm{F}_x(x)$　　　Definition5 より

従って，Proposition 8 から直ちに 1)は導かれる．

また，この 1)と Proposition 2 Corollary から 2)が導かれる．　　Q.E.D.

**Remark**：$\alpha < \omega$　に対する F.G.H は Grzegorczyk 階層と呼ばれており，任意な原始帰納関数はこの階層のどこかに所属しているし，任意な$\alpha < \omega$に対する$\mathrm{F}_\alpha(x)$は原始帰納関数である．2)よりアッカーマン関数$A(x)$が Grzegorczyk 階層に属していないことが分るが，これはアッカーマン関数が原始帰納関数ではないことと整合的である．

**Lemma12**: $a\uparrow^n (x-1)+1 < a\uparrow^n x$　$a \ge 2, x \ge 2$

$a\uparrow^n (x-1)+2 \le a\uparrow^n x$

(Proof)　Lemma2, Lemma3 を使って，$n$についての帰納法により証明する．　Q.E.D.

**Lemma13**: $\underbrace{a\uparrow^n(a\uparrow^n(\ldots(a\uparrow^n(a\uparrow^n(a+1)}_{b\text{個の}a}+1)+1)\ldots)+1)+1 < a\uparrow^{n+1}(b+1)$　$a \ge 2$

(Proof)　Lemma12 を使って，$n$についての帰納法により証明する．　Q.E.D.

**Lemma14**: $2\cdot a\uparrow^{n+1} b < a\uparrow^n (a\uparrow^{n+1}(b-1)+1)$　　$for\ a \ge 2$

(Proof)　Lemma12 を使って，$n$についての帰納法により証明する．　Q.E.D.

**Lemma15**:（分配不等式）　$a\uparrow^n b + a\uparrow^n c \le a\uparrow^n (b+c)$　　$for\ a \ge 2$

(Proof)　$n$についての帰納法により証明する．　Q.E.D.

**Proposition 9**: $a\uparrow^n (b+c-1) \le (a\uparrow^n b)\uparrow^n c < a\uparrow^n (b+c)$　　$for\ \ n \ge 2, a \ge 2$

[Blakley& Borosh]による．証明は省略する．

**Proposition10:**　**不等式のまとめ**

**(1) 2 項間の大小**

| | | |
|---|---|---|
| $a+b \le a\cdot b$ | $for\ a,b \ge 2$ | |
| $\le a^b\ (=a\uparrow b)$ | $for\ a,b \ge 2$ | Lemma2 より |
| $\le a\uparrow^n b\ \ \le a\uparrow^{n+1} b$ | $for\ a,b \ge 2, n \ge 1$ | Lemma3 より |

$a=b=2$　の場合だけすべての等号が成立する

**(2) 計算の順序による大小**

| | | |
|---|---|---|
| $a\uparrow^n (b+c-1) < (a\uparrow^n b)\uparrow^n c < a\uparrow^n (b+c)$ | $for\ \ n \ge 2, a \ge 2$ | Proposition9 より |
| $< a\uparrow^n (b\cdot c)$ | $for\ b,c \ge 2$ | (1)の第 1 不等式より |
| $< a\uparrow^n (b\uparrow^m c)$ | $for\ b,c \ge 2, m \ge 1$ | (1)の第 2 不等式より |

**(3) 演算要素の影響差**

| | |
|---|---|
| $a\uparrow^n b < a\uparrow^n b+1$ | |
| $\le (a+1)\uparrow^n b$ | $for\ \ n \ge 1, a \ge 2, b \ge 1$ |
| $< a\uparrow^n (b+1)$ | $for\ \ n \ge 2, a \ge 3$ |
| $\le a\uparrow^n 2b$ | $for\ \ n \ge 1, a \ge 1, b \ge 1$ |
| $< a\uparrow^{n+1} b$ | $for\ \ n \ge 1, a \ge 3, b \ge 3$ |

(Proof)

(3)の第 2 不等式の証明　$n$についての帰納法により証明する．　Q.E.D.

(3)の第 3 不等式の証明

$n=2$の場合

$$\underbrace{(a+1)^{\cdot^{\cdot^{(a+1)}}}}_{b\text{個}} < \underbrace{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}_{b+1\text{個}} \qquad for\ a \ge 3$$

を示すために，敢えて次式を証明する．

$$\underbrace{(a+1)^{\cdot^{\cdot^{(a+1)}}}}_{b\text{個}} < \underbrace{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}_{b+1\text{個}} \times a^{-1} \qquad for\ a \ge 3$$

$n$の場合，次式が成立すると仮定する．

$(a+1)\uparrow^n b < a\uparrow^n (b+1)$　　　　$for\ \ n \ge 2, a \ge 3$

両辺が自然数値でなければならないことを考慮すると，この仮定は次のように言いかえることが出来る．

$(a+1)\uparrow^n b \le a \uparrow^n (b+1) - 1 \qquad for\ \ n \ge 2, a \ge 3$

$n+1$の場合を証明する．

Q.E.D.

**Remark**：$n=1$の場合，この不等式は一般的には示せない．実際，
$(a+1)^b < a^{b+1}$　が成立するとすると，$(1+\frac{1}{a})^b < a$　であるが

$1+\frac{b}{a} < (1+\frac{1}{a})^b$　なので　$b \ge a(a-1)$ に取れば

$a = 1 + \frac{a(a-1)}{a} < (1+\frac{1}{a})^{a(a-1)} \le (1+\frac{1}{a})^b < a$ となって矛盾する．

$n=2$の場合についても，$3\uparrow^2 2 = 3^3 > 2^{2^2} = 2\uparrow^2 3$　なのでこの不等式は一般には成立せず，
$a \ge 3$　の条件は必要なのである．

(3)の第５不等式の証明

$b=3$の場合

$$
\begin{aligned}
a \uparrow^n (2\cdot 3) &= a \uparrow^n 6 \\
&< a \uparrow^n (a \uparrow^n a) \qquad a \ge 3 \ \text{より}\ \ 6 < a \uparrow^n a \\
&= a \uparrow^{n+1} 3
\end{aligned}
$$

$b$の場合，次式が成立すると仮定する．

$a \uparrow^n (2b) < a \uparrow^{n+1} b$

$b+1$の場合

$$
\begin{aligned}
a \uparrow^n 2(b+1) &= \underbrace{a \uparrow^{n-1} \dots \uparrow^{n-1} a}_{2b+2\text{ 個の}a} && \text{Definition1 より} \\
&< a \uparrow^{n-1} a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^{n+1} b) && \text{帰納法の仮定より} \\
&< a \uparrow^n (a \uparrow^{n+1} b) && \text{Lemma12 より} \\
&< a \uparrow^{n+1} (b+1)
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

以下の定理は[Blakley& Borosh]による．証明は省略する．

**Proposition11**：$a \uparrow^n b = c \uparrow^n d$　$n \ge 2$　ならば　$a = c$ かつ $b = d$．

**Corollary1**：$a \uparrow^n b = c \uparrow^{n+1} d$　$n \ge 2$　ならば　$a = c$ かつ $b = c \uparrow^{n+1} (d-1)$.

**Corollary2**：$a \uparrow^n b = c \uparrow^m d$　$n \ge 2$　ならば　$a = c$．