PAUL LÉVY "INSTITUT DE FRANCE ACADÉMIE DES SCIENCES TROISIÈME CENTENAIRE 1666-1966"

飛田武幸先生から教わったこと—確率論ことはじめ—

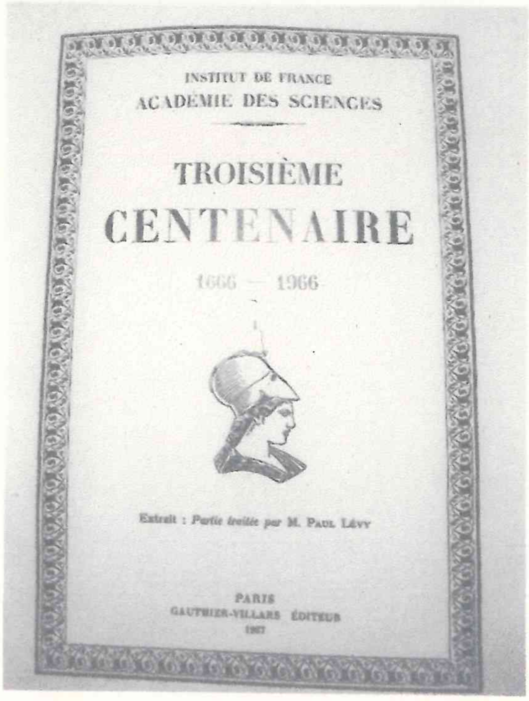
田中　紀子

0　序

Paul Lévy"INSTITUT DE FRANCE ACADÉMIE DES SCIENCES TROISIÈME CENTENAIRE 1666-1966"(GAUTHIER-VILLARS EDITEUR 1967）のうち、1 章 "I L'ACADÉMIE AVANT LAGRANGE ET LAPLACE" と確率論にあたる 10 章 "X CALCUL DES PROBABILITÉS"の訳出と、Paul Lévy に関する資料（飛田武幸氏所蔵のものを多く含む）を紹介する。

1　PAUL LÉVY について

Born: 15 September 1886 Paris,France
Died: 15 December 1971 (aged 85) Paris, France
Institutions: École Polytechnique
Alma mater: University of Paris
Doctoral advisor:Jacques Hadamard, Vito Volterra
Doctoral students: Wolfgang Doeblin, Michel Loève, Benoît Mandelbrot,
Known for : Lévy process, Lévy flight, Lévy measure, Lévy distribution



（写真左：晩年の PAULLÉVY、1968 年自宅にて。　写真右：今回訳出をした冊子の表紙）

GÉOMÉTRIE
LES MATHÉMATIQUES
Par
PAUL LÉVY
MEMBRE DE L'ACADÉMIE

GÉOMÉTRIE

数理科学

LES MATHÉMATIQUES

数学

Par

Paul LÉVY

MEMBRE DE L'ACADÉMIE

• • LE MONDE — 22 décembre 1971 — Page 11

MATHÉMATIQUES ET PHILOSOPHIE

La pensée de Paul Lévy

Par FRANÇOIS RUSSO

Le mathématicien Paul Lévy, membre de l'Académie des sciences, qui vient de mourir, avait publié à l'âge de quatre-vingt-quatre ans des souvenirs composés de deux parties de caractère fort différent : une autobiographie mathématique, un exposé de l'évolution de ses idées philosophiques et religieuses.

Après avoir été au lycée le condisciple du philosophe Lachièze-Rey et de l'historien Marc Bloch, et l'élève d'Emile Mâle, et après un premier prix de thème grec au Concours général, Paul Lévy entre en 1904 second à l'Ecole polytechnique, où il devait enseigner ensuite l'analyse, de 1920 à 1959. Sorti dans les premiers, les traditions implacables du classement lui imposent de devenir ingénieur des mines ; mais bientôt il peut se consacrer à la recherche mathématique. Elle porte d'abord sur le calcul fonctionnel, où il obtient des résultats plus qu'honorables ; mais c'est dans le domaine du calcul des probabilités, qu'il aborde sérieusement à partir de 1922, que nous lui devons les travaux les plus

point philosophe, et il le regrette. Mais il nous montre qu'il sait réfléchir sérieusement sur les problèmes fondamentaux de l'existence.

Ses grands-parents étaient juifs pratiquants, son père était croyant, et lui-même, dans sa jeunesse, croyait au « Dieu unique que les juifs adorent ». Sa mère lui avait appris à prier. Cependant, ses convictions religieuses devaient être bientôt ébranlées. Dès 1902, les preuves de l'existence de Dieu que lui propose Descartes lui apparaissent sans fondement, et celles qu'il tente de leur substituer ne le satisfont pas.

Entre 1904 et 1908, il devient complètement athée. « Chez moi, déclare-t-il, c'est l'esprit scientifique qui a détruit la croyance en Dieu. D'ailleurs, si Dieu existait, il n'aurait pas permis tous les crimes commis en son nom ; de plus, la foi des foules croyantes n'est aucunement probante, car elles sont crédules. Le développement de l'esprit scientifique amè-

Le témoignage de Paul Lévy s'achève par des considérations sur l'avenir des religions. Pour lui, dans les trente derniers siècles, les religions ont fait plus de mal que de bien, mais les religions évoluent.

Paul Lévy croit tout de même à l'« irréligion de l'avenir ». Sans vraiment démontrer que Dieu n'existe pas, « la science finira bien par développer l'esprit critique des hommes et les habituer à mettre en doute tout ce qui n'est pas absolument sûr ». Les hommes de bonne volonté doivent lutter pour le triomphe d'une morale laïque destinée à remplacer la morale religieuse.

★ *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Blanchard, 1970, 222 p., 34 F.

(写真：PAUL LÉVY が亡くなったことと彼の仕事を紹介する LE　MONDE の新聞記事)

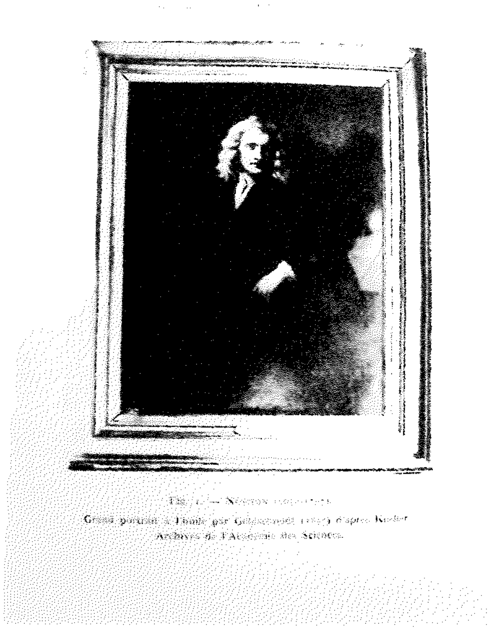
2　“INSTITUT DE FRANCE ACADÉMIE DES SCIENCES TROISIÈME CENTENAIRE 1666-1966” の訳出

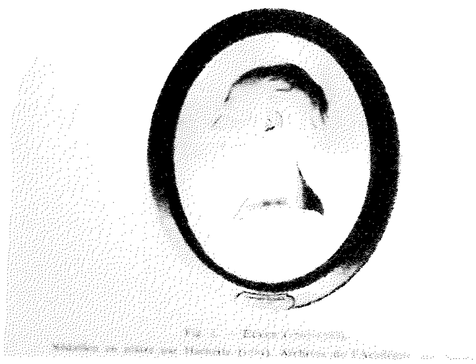
表紙と目次を掲載し、その後、1 章（序章）と確率論に関する 10 章の訳出に移る。なお、訳出中にある挿絵は、すべてこの本に含まれているものである。

INSTITUT DE FRANCE
ACADÉMIE DES SCIENCES
TROISIÉME
CENTENAIRE
1666-1966
Extrait: Partie par M. PAUL LÉVY
PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1967

I L'ACADÉMIE AVANT LAGRANGE ET LAPLACE
(LAGRANGE と LAPLACE までのアカデミー)

アカデミーが、Descartes、Pascal、そして Fermat の死後の 1666 年、Colbert によって正式になったとき、高名なアカデミー会員は、物理学のオランダ人である Huygens だった。1 世紀の間、優れたアカデミー会員は、依然として外国にいた。Leibniz、Newton、Jacques、Jean Bernoulli、そして Euler。フランスの数学者として、Laplace、Monge、Lagrange(1787 年にフランス人になった)と同じく、私たちは哲学者か数学者かということを抜きに、Fontenelle を引用しなければならない。また、18 歳の Clairaut《年齢は関係ないけれど》と、とりわけ数学者で哲学者である D'Alembert の名を取り上げたい。


挿絵1:NEWTON

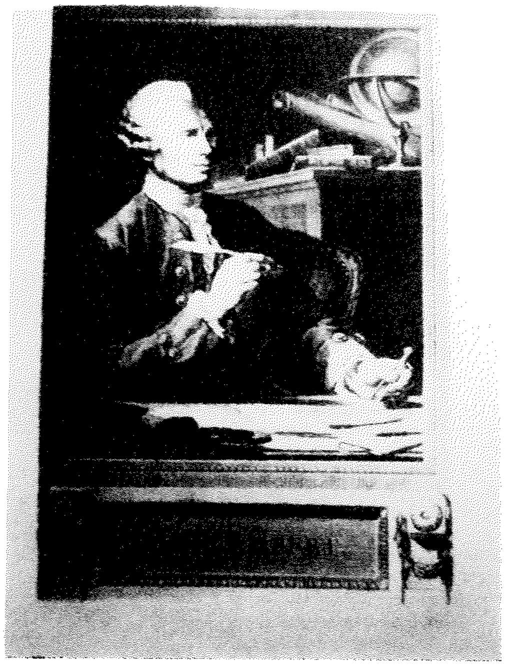

挿絵2:EULER

Newton は流率法、二項定理、3 次曲線やエピサイクロイドの求長に関するいくつもの論文やノートをアカデミーに提出したが、そのニュートンは別として、私たちが呼んだ外国の協力者のメンバーは、フランスの仕事に興味を失ってはいない人にした。しかしながら、Jean Bernoulli と Euler は、しばしばアカデミーの紀要に、テーマを修正した論文を送った。Euler は、8 つの論文で評価を受けた。彼の貢献は、力学、天文学、航空(航海)への数学の応用の面でひたすら支えていたことを書き留めておかなければならない。そのことを Lagrange と Newton は信じなかったし、アカデミーは、純粋数学の研究への関心を引かなかった。Frenicle は Fermat の仕事を引き継いだ。微分と積分が開発されて、極めて熱心な議論になった。Rolle は、厳密な仕事のやり方に注意して、微分の 0 点上における重要な定理[*1]を証明した。L'Hopital は、その方法を熱烈に支持した。Roberval、Varignon とほか幾人かは、無限小解析

*1　ロルの定理

と幾何への応用における貢献の重要性を示した。

18世紀、D' Alembertは代数方程式についての有名な定理を述べた。私たちはこのことを5章で話す。V.Bezoutは、幾何への応用が重要な消去法の論理を述べた。次数3の代数曲面—1つの代数方程式の解の位置をとらせる—上の代数的平面の2次曲線の一般点の研究で、次元は曲面上で考える曲線のものによる。



挿絵3：D'ALEMBERE

X CALCUL DES PROBABILITÉS（確率論）

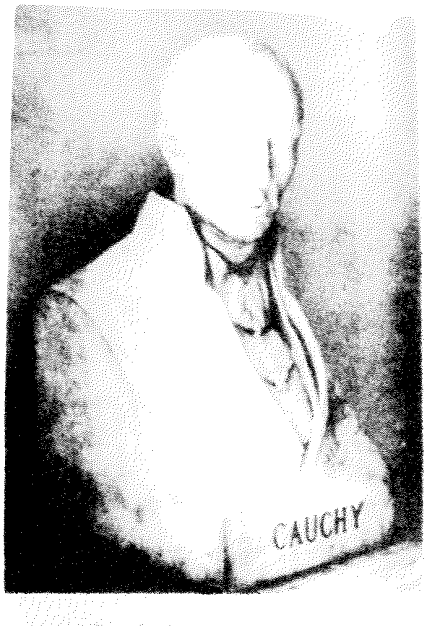
1．　現代科学の中で、確率論の役割はしだいに重要度を増している。統計学は、関連した分野で、実験結果を説明するためにあらゆる科学において必要である。だが、確率論は物理学にもっとも本質的な方法として働く：物理学理論における、ある同様の構造が確率論である。私たちは、応用物理とも関連する十分具体的な確率理論について話す。

確率論における最初の重要な定理は、Jacques Bernoulliのものである。ある独立な連続試行において、事象が起きる確率が確率定数αであるとき、試行回数を増やすにつれてαに確率収束する*2。最もシンプルな定理の証明は、1867年にTchebichefが求め、有名なBienayme- Tchebichefの不等式となる。Tchebichefは、Bernoulliのものを大きく拡張した場合における、ランダムで独立な変数の和について一般的な関係の定理を求めた。Poissonは、厳密な証明はしていないものの、似たような結果を得た。

*2　大数の法則：各回の試行において各事象の起こる確率というものが、試行回数を重ねることで、各事象の出現回数によって捉えられる

J.Bernoulliの死の少し後(1705年)に、Bernoulliの学生だったDe Moivreは、nの回の独立な試行と確率は$\sqrt{n}$の商が、$n \to \infty$のときにGaussの法則と呼ばれるある法則に従うことを示した[*3]。それは、Laplaceの法則と呼ばれることが多い。Laplaceの結果は、Gaussの仕事に先んじて、早くも1783年にその法則の重要性が注目された。独立でランダムなX_nがある微小な値で変化するならば、εが十分小さいとき、Gaussの法則に似た法則に依存する、独立でランダムなX_n $(|X_n| < \varepsilon)$の和Sが計算できる。その証明は厳密ではなく、定理は実際には1887年にTchebichefによって証明され、また1901年にLiapounoyによって別の方法で示された。その少し後、MarkovとLindebergの仕事はX_nがそれほど小さい場合でないときにおける事象の存在を結論付けた。1922年から1935年のPaul LÉVYの仕事は、最終的に次のような結論に達した。「$m(X)$はXの中央値を表し、$Y_n = |X_n - m(X)|$, $M = m[|S - m(S)|]$とおく。X_nは独立で、Y_nはMと比べて非常に小さい。sがas＋bの形に表せるための必要十分条件は、sがLaplaceのものより少し小さく、$|Y_n|$がMと比べて非常に小さいことが確からしい」[*4]。また、ランダムで独立でない値の和の種類に関して拡張された定理―現在Martingalesの名の下で有名でJ.L.Doobが深めた研究―を得た。

それは、Y_nがそれぞれ非常に小さいという条件のもとにおけるPaul Lévyの仕事と同様の結果である[それより大きく言うことはしない]。著者は、無限回微分可能な法則を拡張し、形式の一般化をした。Poissonの発見した法則(ポワソンの法則、または小確率の法則)、ラプラスの法則と組み合わせたその形式の結果だけを言おう。特に重要なことは、以前CauchyとPólyaによって考えられていた安定法則である。それらの一般的な理論は、すでにPaul Lévyの最初のノートに示されている。無限回微分可能な法則の、さらに一般的な理論の適用の中で、極端にシンプルで独創的である。無限回微分可能な法則、また安定法則は、のちに多くのことを追求する対象を作った。



挿絵4：CAUCHY

＊3　アルス・コンジェクタンティ、

＊4　確率収束する

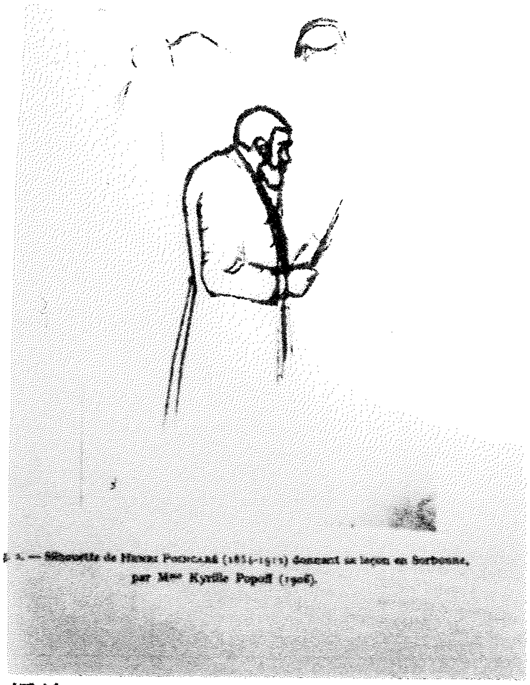
確率法則―独立な和におけるランダムな値の表現の問題―と関連のある計算方法について追求した。それは、限りなく分割可能な法則上の最新の仕事、特に H.Cramér のノート、また Paul Lévy の仮設の正確さを証明した 1936 年のアカデミーのプレゼンテーションは、最新の評価すべき仕事である。著者と D.Duguér は計算方法に興味を持ち続けている。しかし、主要な結果は、ロシアの学派（A.Khintchine、Raikov、Linnik）のアイデアである。

３．下記に示す結果は、古典的確率計算の到達点である。それに関する 20 世紀の主要な仕事は、計算の完全な改良である。Bernoulli とその後継者は独立な有限回の試行の確率を研究した。同じく、無限大の場合（発散する場合）を除いた確率の漸近挙動も研究した。Émile Borel は、1909 年に、独立な事象における無限回続く試行について研究した。2 つのレンマ―独立な試行の事象に対する Cantelli によって拡張されたもの、加算個の場合の研究をもとにしたもの―、そしてとりわけ完全な Bernoulli の定理は、Cantelli の前に一般化した有名な「大数の法則」を確立した。加算個の確率理論は急速な発展を遂げた。特に、ランダムで独立な列の収束について研究がなされた。意に反して、フランスで起こったその仕事の、理論に関する発展が早かったのはロシアにおいてであった。A.Khintchine は有名な重複対数の法則の内容を含むノートを、1924 年、アカデミーに紹介した。

４．ここからは、確率過程―今日、確率計算の重要な問題で、急速に発展している―の理論についての講義である。私たちは、Kolmogorov と Doob の理論に対する仕事について、一般的な話はしない。私たちは時刻 t でランダムな関数 X(t)の事象に限る。私たちは、偶然に次々と発生するものから予測（測定）される、引き続いて起こる値の場合を示したい。

単純な型は、加法過程、すなわちランダムで独立な増分を持つ場合である。それらの理論は、ランダムかつ独立で連続的に次々起こる値の和については、あまり完成されていない。それはすでに記載した Paul Lévy の 1934 年の仕事の結果と同じである。ラプラスの法則と無限分解可能な法則の下で、定理の重要さをもっともよく表す。ランダムで加法的なある関数 X(t)（初期値０）は、確率連続であり、X(t)は各 t において、限りなく分割可能な法則とする。もし、ほとんど各点で連続ならば、X(t)はラプラスの法則に従う。最初に述べた場合、X（t）がジャンプを持つことができる。また、ポワソンの法則の下でのジャンプの研究もある。

加法過程は、マルコフ過程の場合だけではない（特に確率変数列の場合に Markov の研究がある）。任意の t_0 について $X(u)$ （$u \leqq t_0$）が知られている場合に、もし、すべての t （$t > t_0$）において、$X(t)$ の値が $X(t_0)$ 、t_0 によるならば、その過程は、マルコフ過程である。マルコフ過程の理論は、過去が現在を通しては未来を予測するのに不必要な場合である。



挿絵5：POINCARE

Markov の前に、Poincaré はすでに、特にカード打ち（ギャンブル）のことを確率でないと考えていた。1930 年、A.Kolmogorov と S.Bernstein は、マルコフ過程についてのその定理のまれに見る大発展を成し遂げた。また、Chapman-Kolmogorov との方程式は、マルコフ過程の推移確率の価値がある。最近の Youchkevitch の仕事は、厳密にマルコフ過程の概念を導入した。Dynkin、K.L.Chung、J.L.Doob と W.Feller は相当に豊かになったマルコフ過程の発展に貢献した。フランスで出版した仕事の中で、電波の環境に関する G.Pólya の研究報告の前に、J.Hadamard は Ḿ.Fréchet、Paul Lévy、W.Doeblin、そして最近 J.Neveu と P.A.Meyer の仕事について記述した。今、依然として多数の国民は、それぞれアカデミーのプレゼンターとして記憶している。1935 年の O.Onicescu と G.Mihoc のアカデミーのプレゼンターのノートによると、それは、マルコフチェインの重要な拡張を構成する。

多くの研究者の仕事は、ラプラス過程（ガウス過程と同じ）―すべての線形な関数 $X(t)$ は、ランダムでガウス型の値を持つ―を研究の対象とした。加法過程の場合など、とてもシンプルな場合には、ウィナー関数があり、1 次元ブラウン運動がある。まず、Brown によって考えられ、L.Bachelier（1900）と A.Einstein（1905）は、別々に独立で、熱の理論との関係（マルコフ過程、拡散方程式、ずっと以前に述べた特別な場合）を発見した。しかし、その関数の正確な定義は、1923 年に N. Wiener によって与えられた。平面や空間のブラウン運動の研究は、確率計算の重要な問題を構成している。Paul Lévy は、1938 年から 1939 年にその研究に貢献した。ユークリッド空間、リーマン面、ヒルベルト空間の点もそのパラメータになるブラウン運動で、その運動を一般化する前から、と

ても興味を引く特性について研究した。N.Tchentsov、K.伊藤、H.P.Mc Kean と最近 D.Dacunha—Castelle と Bretagnolle が、その研究を追求している。

より多くの一般化されたラプラシアン関数（ガウス過程）に話を戻す。Paul Lévy はラプラス関数が、積分形式

$$X(t)=\int_0^t F(t,u)\,dB(u)$$

で表される（B(u)は Wiener 関数[ブラウン運動]）という重要なことを示した。そのとき因数 ε (u)（ε は可測で $\varepsilon^2=1$）はほとんど至るところ０で、さらに標準表現で（０、ｔ）上の B(u)はその区間上の X(u)と同じ情報を持つ。

本来、ランダムな解析関数の場合、ガウス型であろうとなかろうと、逐次の偶然が関係するような問題とは限らない。その注意は、ランダムなある関数の研究に対し、さまざまな異なる方法の存在を表している。テイラー展開上の、またランダムで独立なフーリエ級数展開上の、多数の仕事の主者だけを記載する。E.Borel、P. Lévy 、H.Steinhaus、Ryll-Naredzewski、N.Wiener、L.Schwartz、R.Salem、J.P.Kahane。

H.Cramér、M.Loève、R.Fortet、Blanc-Lapierre は、また２次のオーダーのランダムな定常過程の調和解析に有効な貢献をした。

ついに異なるアイデアのオーダーのもとで、M.Fréchet、と彼の学生（とくに E.Mourier）は抽象的なランダムの値[とりわけ抽象空間上の値に対する一般のガウス過程、ランダムな曲線および曲面]を研究した。

挿絵6：Paul Lévy

Analyse harmonique sur l'espace des fonctions généralisées.

Note de Takeyuki Hida.

Introduction.

Nous parlerons dans cette note de l'analyse harmonique sur l'espace X des fonctions généralisées. L'espace vectoriel X est de dimension infinie et n'admet, comme on le sait bien, aucune mesure σ-finie du type de Lebesgue. Notre première étape est donc d'introduire une mesure idéale sur X. En fait, puisque le support de n'importe quelle mesure dénombrablement additive sur X ne couvre jamais l'espace entier, nous prendrons donc un système de mesures pour mesure idéale de sorte que l'union de leurs supports soit assez grande pour analyser d'importantes fonctions définies sur X.

Ayant établi la mesure idéale sur X, nous procèderons aux considérations de l'espace L^2 dérivé d'une mesure appartenant au système de mesures (c'est-à-dire la mesure idéale). On aura ainsi un système d'espaces L^2 qui représente une classe raisonnablement large de fonctions sur X. Nous arriverons alors à la définition des fonctions harmoniques sur X. Puisque chaque mesure appartenant à la mesure idéale est supportée pour ainsi dire, par une sphère de dimension infinie, nous pouvons parler de la propriété de la moyenne pour les fonctions sur X. En utilisant cette propriété, nous pouvons aussi donner une définition de l'opérateur laplacien en dimension infinie.

De par nos discussions, nous verrons beaucoup de ressemblances avec l'analyse en dimension finie sur l'espace euclidien; cependant une dissemblance intéressante apparaît nettement dans l'examen de la propriété de la moyenne d'une fonction sur X. Cela vient du fait que chaque fois qu'une direction est spécifiée, la mesure uniforme sur la sphère à dimension infinie est concentrée sur l'équateur qui est

（参考資料１：飛田武幸氏の論文に Paul Lévy 氏が加筆修正したもの　その 1）

6 V2

discussion, nous pouvons donner une illustration à la formule d'add bien connue pour les polynômes d'Hermite intervenant ~~dans~~ l'analyse classique.

Bien que ceci soit un simple plan de travail, les résulta eux-mêmes semblent être de quelque intérêt et plusieurs problèmes d le champ des mathématiques appliquées suggèrent notre approche. Nou aimerions finalement nous référer aux oeuvres de P. Lévy [1] et de M. R. Gâteaux [2] qui ont motivé le présent travail. Dans les artic [4] et [5] de la bibliographie, nous trouverons une relation étroi avec les méthodes employées dans ce papier.

§ 1. Mesure idéale

Nous commencerons par le triplet suivant :

(1)
$$E \subset L^2(R^1) \subset E^*,$$

où E est un espace de Hilbert de fonctions régulières tel que :

(i) la norme dans E est plus grande que la norme $L^2(R^1)$

(ii) E est un sous-ensemble dense de $L^2(R^1)$;

(iii) l'injection de E dans $L^2(R^1)$ ~~est~~ de type Hilbert-Sc

~~et~~, où E^* est le dual de E. Soit $\{\xi_n\}$ un système orthonormé complet dans $L^2(R^1)$ tel que $\xi_n \in E$ pour tout n. Alors, pour tout x dans E^*, nous pouvons définir $r(x)$ par

(2)
$$r(x)^2 = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle x, \xi_n \rangle^2.$$

Evidemment nous avons $0 \le r(x) \le \infty$. Posons

$$S(r) = \{x \in E^* ; r(x) = r\}$$

（参考資料２：飛田武幸氏の論文にPaul Lévy 氏が加筆修正したもの　その２）

3

Proposition 1 :

(i) Les $S(r)$ sont des ensembles disjoints et $E^* = \bigcup_{0 \le r \le \infty} S(r)$

(ii) $S(0) \supset L^2(R^1)$;

(iii) $S(r) \in B$ pour tout r, où B est la tribu de sous-ensembl de E^* engendrée par les ensembles cylindriques.

Nous sommes maintenant prêts à introduire la mesure idéale. Si on donne une fonction caractéristique $C_r(\xi)$ sur E :

(3) $C_r(\xi) = \exp[-\frac{r^2}{2} \|\xi\|^2], \ 0 < r < \infty$, [$\|\ \|$ ~~the~~ la $L^2(R^1)$-norm]

alors, constatant la relation (1), le théorème de Bochner-Minlos affirme que l'on ~~donne~~ obtient une mesure de probabilité μ_r sur (E^*, B) telle que

(4) $$C_r(\xi) = \int_{E^*} \exp[i < x, \xi >] d\mu_r(x).$$

La mesure μ_r est quelquefois appelée la mesure du bruit blanc avec variance r^2. La collection $\{ <x, \xi_n> \}$ forme un système de variables aléatoires de Gauss indépendantes de moyenne nulle et de variance r^2 sur l'espace de probalité (E^*, B, μ_r). Par conséquent la loi des grands nombres nous dit que

(5) $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} <x, \xi_n>^2 = r^2, \ \text{a.e.}\ (\mu_r),$$

qui montre que

$$\mu_r(S(r)) = 1.$$

~~adresse de l'auteur~~
~~ofesseur au~~ Département de Mathématiques
à la Faculté des Sciences de NAGOYA
University
FURO-sho, Shikusa-ku - NAGOYA - 464
JAPON.

(*) 20.12.

（参考資料３：飛田武幸氏の論文にPaul Lévy氏が加筆修正したもの　その３）