津田塾大学 数学・計算機科学研究所報
7

Artinの一般相互法則に関する諸論文

片 山 孝 次 訳

1 9 9 4

津田塾大学 数学・計算機科学研究所

はじめに

津田塾大学数学・計算機科学研究所では、個別の研究活動のほかに、内外の研究者の研究交流のために、談話会、研究会、シンポジウム等を行っている。
また、これらの活動の一端を学界に報告する研究所報も、１９８８年の研究所発足以来７冊目となる。この研究所報第７号は、本学の片山孝次先生が折りにふれ訳された、Ａｒｔｉｎの一般相互法則に関する論文集である。各々の論文の訳を先生が主に学内の研究者にお分けくださった際に人気が高く、今回研究所報にまとめることにした。この提言をご快諾くださり、ワープロのディスクまでお貸しくださった片山孝次先生に、心から感謝の意を表したい。

１９９４年2月

津田塾大学数学・計算機科学研究所長

伊　藤　俊　次

本誌には、以下の論文を掲載する。

Emil Artin 著　　片山孝次 訳

1. Über eine neue Art von L-Reihen

(新しい種類のＬ－級数について)

(Abhandlungen der Mathematischen Seminar im Hamburg, 1923,
pp.89-108 =Collected Works pp.105-124)

2. Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren

(一般指標を係数とするＬ－級数の理論について)

(Abhandlungen der Mathematischen Seminar im Hamburg, 1923,
pp.292-306 =Collected Works pp.165-179)

3. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes

(一般相互法則の証明)

(Abhandlungen der Mathematischen Seminar im Hamburg, 1930,
pp.353-363 =Collected Works pp.131-141)

4. Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper

(代数的数体の判別式の群論的構造)

(Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle Journal)
vol.146, 1931, pp.1-15 =Collected Works pp.180-194)

Über eine neue Art von L-Reihen

(新しい種類の　L－級数　について)

Emil Artin

(Abhandlungen der Mathematischen Seminar im Hamburg,1923,pp.89-108
=Collected Works pp.105-124)

1.

任意の、しかしアーベル的でない代数体の研究には、フロベニウスの群指標を用いて構成され、しかもアーベル的な場合には通常の　L－級数と一致するような一連の新しい解析関数が必要である。以下、その研究に捧げられる。

読者の便宜のために、まず簡単に群指標の理論から我々に必要な公式と記号を引用しよう。[1)]

$\mathfrak{G}$　を位数　n　の有限群とする。$\mathfrak{G}$　は　κ　個の同値類　$\mathfrak{C}_i$ (i=1,.. κ) に分解する。h_i を　$\mathfrak{C}_i$　の元の個数とする。

さらに　Γ　を群　$\mathfrak{G}$　の、０でない行列式をもつ行列による表現とする。このような表現　Γ　のおのおのに指標　$\chi(\sigma)$　が対応する：$\chi(\sigma)$　は　$\mathfrak{G}$　の元　σ　に対応する　Γ　の行列のトレースである。κ　個の既約表現　Γ_i ($i=1, \ldots, \kappa$) に対応する指標　$\chi^i(\sigma)$　は　$\mathfrak{G}$　の単純指標とよばれる。各指標　χ　は単純指標により次のように線形にあらわされる：

$$(1) \qquad \chi(\sigma)=\sum_{i=1}^{\kappa} r_i \chi^i(\sigma),$$

ここで負でない整数　r_i　は　χ　に属する表現　Γ　の指数 (index)である。

単純指標にたいしては次の公式が成り立つ：

$$(2) \qquad \sum_{\sigma} \chi^i(\sigma)\chi^k(\sigma^{-1})=n\delta_{ik},$$

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{\kappa}\chi^i(\sigma)\chi^i(\tau^{-1})=\begin{cases} 0: \sigma, \tau \text{ が異なる類に属するとき、} \\ n/h_r: \sigma, \tau \text{ が } \mathfrak{C}_r \text{ に属するとき．} \end{cases}$$

---

1)たとえば J.Schur:Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere, Sitzungsberichte Berlin 1905,p.406、――さらに A.Speiser:Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung,10-12 Kapitel を参照せよ。

さて $\mathfrak{g}$ を部分群とし

$$(4)\qquad \mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{g} S_i$$

を $\mathfrak{G}$ の傍系分解とする。

Δ を $\mathfrak{g}$ の表現とする。一般に、A_σ を、σ が $\mathfrak{g}$ に属するならば σ に対応する Δ の行列、σ が $\mathfrak{g}$ に属さないならば $A_\sigma = 0$ とし、行列

$$(5)\qquad B_\sigma = \left(A_{S_i \sigma S_k^{-1}} \right)$$

をつくる。それは $\mathfrak{g}$ の表現 Δ より誘導される $\mathfrak{G}$ の非原始的表現である。[2]

ϕ が表現 Δ の指標ならば、表現（5）の指標を、ϕ より誘導される指標 χ_ϕ と名づける。

さて $\phi_i(\sigma)$ $(i=1、\cdots、\lambda)$ を群 $\mathfrak{g}$ の単純指標とし、$\mathfrak{g}$ からの各 τ にたいして

$$(6)\qquad \chi^i(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\lambda} r_{\nu i}\, \phi_\nu(\tau) \qquad (i=1,\cdots,\kappa)$$

とおけば、逆に $\mathfrak{G}$ からのすべての元に対して

$$(7)\qquad \chi_{\phi_i}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\chi} r_{i\nu}\, \chi^\nu(\tau) \qquad (i=1,\cdots,\lambda)$$

がなり立つ。

2.

さて k を任意の代数的数体、K を k 上の相対ガロア体とし、$\mathfrak{G}$ を K/k の群とする。

$\mathfrak{p}$ を、K/k の相対判別式を割らない k からの素イデアルとし、$\mathfrak{P}$

[2] 公式（5）は Speiser:Gruppentheorie §52 より容易に導かれる。—— Frobenius:Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen,Sitzungsberichte Berlin 1898.

を　K　における　p　の素因子とする。

$\mathfrak{G}$　からの置換　σ　で、K　からのすべての数　A　にたいして

$$(8)\qquad \sigma A \equiv A^{\mathrm{N}\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{P}}$$

がなり立つものをとる。ここで　Np　は　k　における　p　のノルムである。このような置換が存在することは、たとえば　Weber,Algebra II,第二版§１７８、に当たると良い。

σ　は　$\mathfrak{P}$　により一意的に定められる。何故ならば　σ_1　が　σ　と同じ性質を持つ置換とすれば

$$\sigma^{-1}\sigma_1 A \equiv A \pmod{\mathfrak{P}}$$

である。それゆえ　$\sigma^{-1}\sigma_1$　は　$\mathfrak{P}$　の惰性群に属するが、それはわれわれの　p　についての仮定により　$\mathfrak{G}$　の単位元である。

$\mathfrak{P}$　のかわりに　p　の他の素因子　$\mathfrak{P}'$　をとり、たとえば　$\tau\mathfrak{P}=\mathfrak{P}'$　とすれば、容易に示されるように、置換　$\tau\sigma\tau^{-1}$　が　σ　の代わりとして得られる。

このようにして、われわれの素イデアル　p　に置換の類　$\mathfrak{C}$　が一意的に対応付けられる。$\mathfrak{C}$　の置換は良く知られたように　p　の素因子の分解群の生成元である。しかし、この性質からは類　$\mathfrak{C}$　は一般に完全には決定されない。何故ならば、同値な置換のほかになおある種のべきが問題になるからである。[3]　われわれは、素イデアル　p　は類　$\mathfrak{C}$　に属するといい、その類を　$\mathfrak{C}_{\mathrm{p}}$　とかくことにしよう。

さて　Γ　を行列による　$\mathfrak{G}$　のある表現とし　A_{p}　を　$\mathfrak{C}_{\mathrm{p}}$　からのある行列とする。″特性関数″

$$|E-tA_{\mathrm{p}}| \qquad (E\ \text{は単位行列})$$

——ここで縦線は普通のように行列式を表す——は　A_{p}　が同値な行列ににおきかわってもかわらない。よってそれは　$\mathfrak{C}_{\mathrm{p}}$　からの　A_{p}　のとり

---

[3] ここで考えられた素イデアルと置換類との対応については Frobenius がすでに同様の考察を行っている。Frobenius:Über Beziehungen zwischen Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe. Sitzungsberichte Berlin 1896.

かたによらない。そしてまた同値な表現に対して同じである。

χ を Γ に属する指標とし、体 k の χ に属する L－級数を

$$(9) \qquad L(s, \chi; k) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{|E - N\mathfrak{p}^{-s} A_{\mathfrak{p}}|}$$

により定義する。ここで積は相対判別式を割らないすべての素イデアルにわたる。この積が半平面 $\Re(s) > 1$ の各有界閉領域において絶対且つ一様に収束する事は、特性方程式の根が１のべき根であり（９）の分母にはこのような根因子の積が現れることを考えれば容易に証明される。

さて（９）をディリクレ級数に展開し、その係数を指標 χ により表すことが出来る。その公式はそう明らかなものではない。しかし（９）の対数にたいしては簡明な公式を導くことが出来る。

そのためにわれわれの素イデアルと類との対応を、素イデアルのべきに拡張しよう。すなわち、イデアル $\mathfrak{p}^{\nu}$ には $\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}}$ の元の ν－乗からなる類 $\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}^{\nu}}$ を対応付ける。それが類を成すことは容易に示される。さらに σ を $\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}^{\nu}}$ からの置換とするとき

$$(10) \qquad \chi(\mathfrak{p}^{\nu}) = \chi(\sigma)$$

とかく。

さて ε_1、ε_2、…、ε_f を方程式 $|Et - A_{\mathfrak{p}}| = 0$ の根とすれば

$$(11) \qquad \chi(\mathfrak{p}^{\nu}) = \varepsilon_1^{\nu} + \varepsilon_2^{\nu} + \cdots + \varepsilon_f^{\nu}$$

がなり立つ。よって $|t| < 1$ にたいして

$$-\log|E - tA_{\mathfrak{p}}| = -\sum_{i=1}^{f} \log(1 - t\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{f} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i^{\nu}}{\nu} t^{\nu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p}^{\nu})}{\nu} t^{\nu}$$

を得る。

これからのぞまれた公式

$$(12) \qquad \log L(s,\ \chi\ ;\ k) = \sum_{\mathfrak{p}\ \nu} \frac{\chi(\mathfrak{p}^{\nu})}{\nu\,\mathrm{N}\mathfrak{p}^{\nu s}}$$

が得られる。ここで和は相対判別式に素な　k　のすべての素イデアルのべきにわたる。

表現にたいする（９）からも、このほうが更に良いが（１２）からも、二つの指標　χ、χ' にたいして等式

$$(13) \qquad L(s,\ \chi+\chi') = L(s,\ \chi)\ L(s,\ \chi')$$

のなり立つことが分かる。

単純指標に属する　L－級数を原始的　L－級数とよぶ。κ　個の原始的な　L－級数により各　L－級数はあらわされる。すなわち公式（１）が　χ　にたいしてなりたつならば（１３）から

$$(14) \qquad L(s,\ \chi) = \prod_{i=1}^{\chi} (L(s,\ \chi^{i}))^{r_i}$$

がしたがう。

なお体　K　にどのように依存するかについて簡単な注意を与える。Ω　が　K　を含む　k　に関する相対ガロア体、$\mathfrak{H}$　をその群、$\mathfrak{g}$　が　K　に属する部分群ならば　$\mathfrak{G}$　は商群　$\mathfrak{H}/\mathfrak{g}$　と同形である。

さて（８）が　Ω　からのすべての数に対して成り立つならば、それはまず　K　からのすべての数に対して正しい。しかし　$\mathfrak{g}$　の置換は　K　からの数を動かさないから、（８）はまた、A　のみが　K　からの数であるとき傍系　$\sigma\mathfrak{g}$　のすべての元に対して成り立つ。それゆえ　$\mathfrak{H}/\mathfrak{g}$　の各指標がまた　$\mathfrak{H}$　の指標であること、$\mathfrak{H}/\mathfrak{g}$　の単純指標は　$\mathfrak{H}$　の単純指標であることを考えれば、われわれの　K　にたいする　L－級数はまた　Ω　にたいして構成されたものであり、実際原始的な　L－級数はまた原始的なものに移ることがわかる。もちろん（９）において　Ω/k　の相対判別式を割る素イデアルは積から除外される。なおわれわれは有限個の因子のみ異なる　L－級数を本質的には異ならないものと考える。ところで我々は後に　L－級数を不変的に正規化することが出来る。

3.

$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{G}$ の部分群、Ω を $\mathfrak{g}$ に属する K の部分体とする。そのとき $\mathfrak{g}$ は K/Ω の群である。

Δ を $\mathfrak{g}$ の表現、Γ_{Δ} を Δ により誘導された $\mathfrak{G}$ の非原始的表現、ψ および χ_{ψ} をそれぞれ Δ および Γ_{Δ} の指標とする。さてすべての現れる Lー級数（それゆえまたもう一方の基礎体に関するものについても）K/k の相対判別式を割るすべての素数を除いた積を作れば、次の基本的な定理が成り立つ：

定理 1 上述と同じ記号のもとで

(15) $$L(s, \psi; \Omega) = L(s, \chi_{\psi}; k)$$

がなりたつ。

証明：Ω において $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_r$ とする。ここで $\mathfrak{p}$ は K/k の相対判別式を割らないとする。$\mathfrak{q}_i$ の k に関する相対次数を l_i とする。$\mathfrak{P}_i$ を Ω における $\mathfrak{q}_i$ の素因子とし、たとえば $\mathfrak{P}_i = \tau_i \mathfrak{P}_1$ とする。K からの各 A にたいして

$$\sigma A \equiv A^{\mathrm{N}\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{P}_1}$$

がなりたつとする。

$$\sigma_i = \tau_i \sigma \tau_i^{-1}$$

とおけば、K からの各 A にたいして等式

(16) $$\sigma_i A \equiv A^{\mathrm{N}\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{P}_i}$$

がなりたつ。

ゆえに N を Ω におけるノルムとすれば

(17) $$\sigma_i^{l_i} A \equiv A^{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{l_i}} \equiv A^{\mathrm{N}\mathfrak{q}_i} \pmod{\mathfrak{P}_i}$$

がわかる。

置換　$\sigma_i^{l_i}$　はそれが　$\mathfrak{g}$　に属するような　σ_i　の最小べきである。一方では　（１７）　は、Ω　からの数　$A=\alpha$　に応用するときフェルマの定理により

$$\sigma_i^{l_i}\alpha \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{P}_i}$$

をもたらし、われわれの　p　のとりかたより　$\sigma_i^{l_i}\alpha=\alpha$　である。他方、Ω　からの各　α　にたいして　$\sigma_i^{\nu}\alpha=\alpha$　ならば（１６）から

$$\sigma_i^{\nu}\alpha=\alpha\equiv\alpha^{\mathrm{N}p^{\nu}} \pmod{\mathfrak{P}_i}$$

がしたがう。ゆえに　$\mathrm{N}p^{\nu}\geqq \mathrm{N}\mathfrak{q}_i,\ \nu\geqq l_i$　でなければならない。

それゆえ　Ω　において素イデアル　$\mathfrak{q}_i$　は置換　$\sigma_i^{l_i}$　に属する。

さてわれわれは次のことを主張する：

二つの傍系　$\mathfrak{g}\sigma_\nu^a\tau_\nu$　および　$\mathfrak{g}\sigma_\mu^b\tau_\mu$　は　$\nu=\mu$　かつ　$a\equiv b \pmod{l_\nu}$　であるときにかぎり、互いに等しい。

実際そのとき　$\sigma_\nu^a\tau_\nu$　は

$$\sigma_\nu^a\tau_\nu=\tau_0\sigma_\mu^b\tau_\mu$$

の形を持つ。ここで　τ_0　は　$\mathfrak{g}$　に属する。σ_ν　および　σ_μ　の意味より　τ_0　は

$$\tau_0=\sigma_\nu^a\tau_\nu\tau_\mu^{-1}\sigma_\mu^{-b}=\tau_\nu\sigma^{a-b}\tau_\mu^{-1}$$

と計算される。$\sigma\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}_1$　であるから[4)]　$\tau_\mu\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}_\mu$　より

$$\tau_0\mathfrak{P}_\mu=\tau_\nu\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}_\nu$$

がわかる。

それゆえ、置換　τ_0　は　$\mathfrak{q}_\mu$　の素因子　$\mathfrak{P}_\mu$　を　$\mathfrak{q}_\nu$　の素因子　$\mathfrak{P}_\nu$　に移す。しかし　τ_0　は　$\mathfrak{g}$　に属し、したがって　$\tau_0\mathfrak{q}_\nu=\mathfrak{q}_\nu$　であるから　$\mathfrak{P}_\nu$　はまた　$\mathfrak{q}_\mu$　の素因子である。それは　$\mu=\nu$　にた

[4)]　σ　は　$\mathfrak{P}_1$　の分解群に属する。

いしてのみ起こりうる。しかしそのとき $\mathfrak{g}\sigma_\nu^a=\mathfrak{g}\sigma_\nu^b$ であり、それゆえ $a\equiv b\pmod{l_\nu}$ である。

傍系 $\mathfrak{g}\sigma^a{}_\nu\tau_\nu$ はまた $\mathfrak{g}\tau_\nu\sigma^a$ ともかかれる。このようにして $l_1+l_2+\cdots\cdot+l_r$ 個の異なる傍系が存在する。q_i の相対次数の和はちょうど Ω/k の次数に等しく、それゆえ $\mathfrak{G}$ における $\mathfrak{g}$ の指数に等しい。ゆえに $\mathfrak{G}$ の $\mathfrak{g}$ による傍系分解を、（4）であたえた

S_i のかわりに

$$\tau_1、\tau_1\sigma、\cdots\cdot、\tau_1\sigma^{l_1-1}、\tau_2、\tau_2\sigma、\cdots、$$
$$\tau_r、\tau_r\sigma、\cdots\cdot、\tau_r\sigma^{l_r-1}$$

を用いて構成することが出来る。

Δ により誘導される非原始的表現において、元 σ に対応する行列 B_σ を（5）により

$$B_\sigma=(A_{S_i\sigma S_k^{-1}})=(A_{\tau_\nu\sigma^{a-b+1}\tau_\mu^{-1}})$$

の形に取ることが出来る。

さて $\tau_\nu\sigma^{a-b+1}\tau_\mu^{-1}$ が $\mathfrak{g}$ に属するならば $\tau_\nu\sigma^{a-b+1}$ は $\mathfrak{g}\tau_\mu$ に属し、したがって $\nu=\mu$、$a-b+1\equiv0\pmod{l_\nu}$ である。

行列 B_σ のかたちを考えて、それを

$$B_\sigma=\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0\\ 0 & C_2 & \cdots\cdots\cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & C_r\end{pmatrix}$$

の形に分解することが出来る。ここで C_ν は $(A_{\tau_\nu\sigma^{a-b+1}\tau_\mu^{-1}})$ のかたちである。このとき $a-b+1\equiv0\pmod{l_\nu}$ である項のみ

が問題である。そのとき　$a=0, 1, \cdots, l_\nu-2$　にたいして　$b=a+1$　であり　$a=l_\nu-1$　にたいし　$b=0$　である。それゆえ　C_ν　は、E　をそれぞれのサイズに応ずる単位行列とするとき

$$C_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & E \\ A_{\sigma_\nu}^{l_\nu} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

のかたちである。ゆえに特性関数は

$$|E-tB| = \prod_{\nu=1}^{r} |E-tC_\nu|$$

$$= \prod_{\nu=1}^{r} \begin{vmatrix} E & -tE & 0 & 0 \\ 0 & E & -tE & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & E & -tE \\ -tA_{\sigma_\nu}^{l_\nu} & 0 & 0 & E \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{\nu=1}^{r} |E- t^{l_\nu} A_{\sigma_\nu}^{l_\nu}|$$

となる。

この最後の等式は次のようにして得られる：第一列に　t　を乗じそれを第二列に加える。ついで第二列に　t　を乗じたものを第三列に加える、以下同様。

この公式においてわれわれは実際　$\mathfrak{G}$　の　σ　に依存したかたちの傍系分解を得る。しかし（5）は他の傍系分解に関しては同値な行列に移される。そして特性関数は、我々はまさにそれに到達したのであるが、したがって傍系分解のとりかたには依存しない。

ゆえに素イデアル $\mathfrak{p}$ の $L(s, \chi_{\psi}; k)$ への寄与として

$$\frac{1}{|E-\mathrm{N}\mathfrak{p}^{-s}B_{\sigma}|}=\prod_{\nu=1}^{r}\frac{1}{|E-\mathrm{N}\mathfrak{p}^{-l_{\nu}s}A_{\sigma_{\nu}}^{l_{\nu}}|}$$

$$=\prod_{\nu=1}^{r}\frac{1}{|E-\mathrm{N}\mathfrak{q}_{\nu}^{-s}A_{\sigma_{\nu}}^{l_{\nu}}|}$$

が得られる。

さて既に我々は、$\sigma_{\nu}^{l_{\nu}}$ が素イデアル $\mathfrak{q}_{\nu}$ に対応付けられることを見た。よって右辺はちょうど $\mathfrak{p}$ の素因子の、関数 $L(s, \psi; \Omega)$ への寄与を与えている。これで定理 1 は証明された。

上で確定された定理によりまず、K の部分体のゼータ関数を原始的 L－級数に分解することが出来る。

主指標 $\chi=1$、それゆえ行列 E による恒等表現にたいして、属する L－級数 $L(s, \chi_1; k)$ は単に（有限個の因子を除いて）基礎体 k のゼータ関数に等しい。

さて Ω を群 $\mathfrak{G}$ に属する部分体、ψ_1 を $\mathfrak{G}$ の主指標とすれば

$$L(s, \psi_1; \Omega)=\zeta_{\Omega}(s)$$

である。ψ_1 により誘導される非原始的表現 Π_{Ω} は、そのとき単に $\mathfrak{G}$ の傍系（それゆえ、Ω に属するガロア体が K と一致するときは Ω のガロア群）の間の置換群としての $\mathfrak{G}$ の表現である。それに属する指標 $\chi_{\Omega}(\sigma)$ は σ に属する Π_{Ω} の置換に関して不変な項の個数であり、したがって簡単に定められる。

$$\chi_{\Omega}(\sigma)=\sum_{i=1}^{\kappa} g_i \chi^i(\sigma)$$

とおく。ここで（２）により

$$(18) \qquad g_i=\frac{1}{n}\sum_{\sigma}\chi_{\Omega}(\sigma)\chi^i(\sigma^{-1})$$

（n は $\mathfrak{G}$ の位数、したがって K の相対次数である）である。そうすれば（１４）と合わせて 定理１ は

$$(19) \qquad \zeta_{\Omega}(s)=\prod_{i=1}^{\kappa}(L(s, \chi^i))^{g_i}$$

を与える。これがのぞまれた分解である（有限個の因子を除いて）。

体 K にたいしては――それは正則表現に属する――とくに簡単な公式

$$(20) \qquad \zeta_K(s)=\prod_{i=1}^{\kappa}(L(s, \chi^i))^{f_i}$$

が得られる。

公式（１９）には、部分体のゼータ関数の間に成り立つすべての関係が含ま

れている。実際、すべての部分体　Ω　にたいしてなりたつ等式（１９）から　$L(s, \chi^i)$　を消去すれば　$\zeta_\Omega(s)$　の間のすべての関係が得られるのである。等式（１９）はこの意味で関係式の″パラメータ表現″と考えるべきである。この方法で（分解を有理数体にいたるまでづづけくだるとき）関係が本質的に全て得られることは後に示されるであろう。[5]　これですべての関係に関する問題は本質的に解決される。

我々の結果を、他の形に定式化することが出来る。容易に分かるように、$\zeta_\Omega(s)$　の分解（１９）は置換群　Π_Ω　に属する群行列式を既約な関数への分解と平行している。それゆえ次のように言うことが出来る：

$\mathfrak{G}$　の可遷的置換群としての表現にたいする群行列式の間の関係をすべて設定し、そこで群行列式を対応するゼータ関数で置き換えることにより、部分体のゼータ関数の間のすべての関係が得られる。

そのようにして得られた関係はまず有限個の因子を除いて成り立つ。関数等式により、それはヘッケの良く知られた論法にもとづき有限個の除外因子をこめて成り立つ。[6]

部分体の　L－級数の間の関係に対してもまた自然に、おなじ考察が有効である。

5.

さて、アーベル的な場合に原始的　L－級数が普通の　L－関数と一致するかどうかを研究しなければならない。

K/k　が相対アーベル的ならば、置換の各類はそれぞれただ一つの元　σ　からなる。素イデアル　$\mathfrak{p}$　にはしたがってちょうど一つの置換　σ　が対応づけられ、（8）は　$\mathfrak{p}$　の各素因子　$\mathfrak{P}$　にたいして固定された　σ　について成り立つ。

ここで（8）を条件

---

[5] E.Artin:Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper, Math.Ann.Bd.89,を見よ。そこで特別な場合に関係式が得られている。
[6] E.Hecke:Über eine neue Anwendung der Zetafunktion auf die Arithmetik der Zahlkörper.Göttinger Nachrichten 1917

(２１)　　　$\sigma A \equiv A^{\mathrm{N}\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{p}}$

により置き換えることが出来る。

群 $\mathfrak{G}$ の既約表現はさらにすべて一次であり、よってそれは単に $\mathfrak{G}$ のふつうのアーベル群指標 $\chi^{i}(\sigma)$ である。それゆえ

(２２)
$$L(s,\chi^{i}) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\dfrac{\chi^{i}(\sigma)}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{s}}}$$

である。ここで σ はイデアル $\mathfrak{p}$ に対応する置換を意味する。

さて K を k の $\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}$ に関するイデアル類 $C_1, C_2, \cdots C_n$ の群にたいする類体[7]とする。それゆえ主類 C_1 からの素イデアルのみが K において一次の素イデアルの積に完全分解する。

われわれの L－級数が普通のものと一致することは、次が示されれば証明される：

定理　２

ａ）　置換 σ は $\mathfrak{p}$ が含まれるイデアル類 C_i にのみ依存する。

ｂ）　イデアル類と置換との対応づけは一対一であり、$\mathfrak{G}$ とイデアル類群の間の同形写像をもたらす。ゆえに二つの置換の積は対応するイデアル類の積に対応付けられる。

実際、そのとき $\mathfrak{G}$ の指標はまたイデアル類群の指標であり、逆もまたなりたつ。ゆえに我々の意味での L－級数は普通の L－級数である。逆に与えられた類別にたいする普通の L－級数が与えられれば、それは属する類体にたいする L－級数の中に見出される。よってわれわれの新しい定義は実際古い定義の一般化であることが示されたのである。

定理　２　はまたそれ自身興味がある。実際、それは $\mathfrak{G}$ とイデアル類群との間の同形の explicit な表現をもたらす。相対巡回拡大の場合にはさらに我々の定理は（k のなかに必要な １ のべき根が含まれるとき）一般相互法則と完全に一致する。そして文脈は一見したところ何か異様なものに見え

[7] Teiji Takagi:Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers, Journal of the College of Science,Tokyo 1920　と比較せよ。以下では高木　と引用する。

るが、この同一性こそ、定理　2　を任意の体（1　のべき根無し）における一般相互法則の定式化と理解しなければならないことを明示しているものである。

既に言ったことから、事の性質上、さしあたり一般相互法則がわれわれにとって到達可能な場合に、すなわち素数次の体 K およびそれらの合成体にたいしてのみ定理　2　の証明に成功するのはやむをえない。任意の体　K　にたいしては、われわれはさらに後にいたるまで定理　2を前提しなければならない。この任意の体において問題となっている研究では、純粋にアーベル的な事柄をすっかり片付いたものと考えて構わないだけに、いっそうすみやかに定理2を攻撃してしかるべきである。以下の章では我々の定理は成り立っていると仮定する。

我々にとって近づき易い場合に一歩一歩前進しよう。しかし私は事態を際立たせるために出来るだけ一般的な証明を与えることにする。

1。主類　C_1　が、そしてそれのみが恒等置換に対応する。

証明：K　からの各　A　にたいして　$A \equiv A^{N\mathfrak{p}}$　（mod　$\mathfrak{p}$）が、したがってまた　（mod　$\mathfrak{P}$）――ここで　$\mathfrak{P}$　は　$\mathfrak{p}$　の素因子――が成り立つならば　$\mathfrak{P}$　は相対一次である。高木　Satz31　により　$\mathfrak{p}$　は主類に属する。逆に　$\mathfrak{p}$　が主類に属するならば、$\mathfrak{p}$　は相対一次の素イデアルに完全分解し、始めの合同式は　$\sigma = 1$　にたいして成り立つ。

2。定理　2　が　$K／k$　にたいして成り立つならば、それはまた　K　の各部分体　$\Omega／k$　にたいしても成り立つ。

証明：Ω　は次数　r、指数　s　の　$\mathfrak{G}$　の部分群　$\mathfrak{g}$　に対応するとし

$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{g} S_i$　を傍系分解とする。さらに　Ω　は分解　$H_1, H_2, \cdots, H_s$

にたいする類体とする。ここで

$$H_1 = C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_r$$

は主類である。（＋　は和集合を意味する。）　1。により　$\mathfrak{g}$（商群の単位元）は類　H_1　に対応付けられる（$\Omega／k$　にたいして）。

たとえば　$H_i = C_i' H_1$　とする。さて　C_ν　が　K　において置換　τ　に対応する　H_1　からの類ならば　τ　は　$\mathfrak{g}$　に属さなければならない。それゆえ　K　において類　C_i'　が　τ_i　に属するならば　$C_i' C_\nu$　は　$\sigma_i \tau$　に属し、したがって　H_i　は　$\sigma_i \mathfrak{g}$　に属する。逆に　$\mathfrak{G}$　からの各置換はある類　C_i　に対応付けられるから、各傍系　$\sigma_i \mathfrak{g}$　はまたある　H_i　に対応付けられなければならない。さて傍系　$\sigma_i \sigma_k \mathfrak{g}$　が　$H_i H_k$　に属するということは、それに対応することが　C_ν　にたいして仮定されているからあきらかである。

３。我々の定理が二つの互いに素な（teilerfremd）体（それらの共通部分が　k　に等しい）にたいして証明されるならば、それはまた合成体　$K = K_1 K_2$　にたいしても正しい。

証明：$C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$；$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{K}_m$　を共通の法による、それぞれ　K_1, K_2　にたいする類別とする。$\mathfrak{g}_1$　を　K_1　の群、$\mathfrak{g}_2$　を　K_2　の群とする。類　C_i　は　$\mathfrak{g}_1$　からの　σ_i　に、類　$\mathfrak{K}_i$　は　$\mathfrak{g}_2$　からの　τ_i　に対応付けられるとする。そのとき　$K = K_1 K_2$　の群は、σ_i　が　K_2　からの数を、τ_i　が　K_1　からの数を不変にするように選ばれているとき、$\mathfrak{g}_1$　と　$\mathfrak{g}_2$　の直積である。（$C_r, \mathfrak{K}_s$）　により共通部分を示せば、それはちょうど　K　を類体に持つ類別であり、

$$(C_r, \mathfrak{K}_s)(C_u, \mathfrak{K}_v) = (C_r C_u\ ,\ \mathfrak{K}_s \mathfrak{K}_v)$$

がなりたつ。

さて　A_1, A_2　を　K_1　および　K_2　の生成元とし、$A = \varphi(A_1, A_2)$　を　K　からの数、さらに　$\mathfrak{p}$　は　（$C_r, \mathfrak{K}_s$）に属するとすれば、

$$A^{N\mathfrak{p}} \equiv \varphi(A_1^{N\mathfrak{p}},\ A_2^{N\mathfrak{p}}) \equiv \varphi(\sigma_r A_1, \tau_s A_2) \equiv \sigma_r \sigma_s A \pmod{\mathfrak{p}}$$

がなり立つ。

類　（$C_r, \mathfrak{K}_s$）　はそれゆえ　$\sigma_r \tau_s$　に対応付けられる。これですべて証明された。

したがって我々の定理を素数べき次数のすべての巡回拡大にたいして証明す

ればじゅうぶんである。証明は素数次数の場合にのみとにかく完全にうまく行く。

4。$\zeta=e^{2\pi i/m}$ を 1 の m 乗根とすれば、我々の定理は $K=k(\zeta)$ に対して正しい。[8)]

証明： p が体 K において相対一次の素イデアルに分解するならば、$\zeta^{\mathrm{Np}}\equiv\zeta\pmod{\mathfrak{p}}$ でなければならない。ゆえに p が m を割らないならば $\mathrm{Np}\equiv1\pmod{m}$ である。逆にそれが成り立つならば各数 $A=\alpha_0+\alpha_1\zeta+\cdots\cdots$（$\alpha_0$、$\alpha_1$、……は k からの元）にたいしてもまた

$$A^{\mathrm{Np}}\equiv A\pmod{\mathfrak{p}}$$

である。

そのとき p はまた相対一次の素イデアルに完全分解する。主類――それに関して K は類体である――の素イデアル p はそれゆえ合同式 $\mathrm{Np}\equiv1$ により特徴付けられる。$\mathfrak{a}$ が mod m に関して p と同じ類に属するイデアル、すなわち、$\alpha\equiv1\pmod{m}$ かつ総正な α により $\mathfrak{a}=\alpha\mathfrak{p}$ ならば $\mathrm{N}\alpha\equiv1\pmod{m}$ であり、したがって $\mathrm{N}\mathfrak{a}\equiv1\pmod{m}$ である。

K により生成される k の類別は，それゆえ主類のなかに $\mathrm{N}\mathfrak{a}\equiv1\pmod{m}$ であるすべてのイデアルを含む。よってふたつのイデアルが同じ類に属するための必要かつ十分条件は、それらのノルムが mod m に関して合同であることである。

さて $A=\alpha_0+\alpha_1\zeta+\cdots\cdots$ が K からの数ならば

$$A^{\mathrm{Np}}\equiv\alpha_0+\alpha_1\zeta^{\mathrm{Np}}+\cdots\cdots\pmod{\mathfrak{p}}$$

である。

p に対応する置換 σ はしたがって自己同形 $\sigma=(\zeta、\zeta^{\mathrm{Np}})$ である。よって、今言ったことから σ は p が属する類にのみ依存することがわかる。最後に、類の条件（ノルムの合同）は乗法的であるから、類の積に

[8)] 虚数乗法の類体にたいする証明が同様に行われる。それは類体の超越的な構成によって相互法則がどのように得られるかを示している。

は置換の積が対応する。それゆえ、二つの類が同じ置換に属するならばそれらの商は単位元に対応し、したがって主類である（１。による）。置換と同じだけの個数の類が存在するから、対応は一対一である。

５。 k が １ <u>のべき根</u> $\zeta = e^{2\pi i / l^n}$ <u>を含むならば、われわれの定理は次数</u> l^n <u>の相対巡回体</u> K <u>にたいして正しい</u>。

証明： $K = k\left(\sqrt[l^n]{\mu}\right)$ とする。ζ は k に属するから、l に素な k からの各素イデアル $\mathfrak{p}$ は合同式 $N\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{l^n}$ を満たす。それゆえ

$$\left(\sqrt[l^n]{\mu}\right)^{N\mathfrak{p}} \equiv \mu^{(N\mathfrak{p}-1)/l^n} \cdot \sqrt[l^n]{\mu}$$
$$\equiv \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \sqrt[l^n]{\mu} \pmod{\mathfrak{p}}$$

がなり立つ。ここで $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ は l^n－べき指標である。よって素イデアル $\mathfrak{p}$ には自己同形

$$\sigma = \left(\sqrt[l^n]{\mu} \; ; \; \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \sqrt[l^n]{\mu}\right)$$

が対応する。

しかし一般相互法則[9]の本質的な内容は $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ が $\mathfrak{p}$ （より一般には $\mathfrak{p}$ のかわりに、μ に素な任意のイデアル $\mathfrak{a}$ を用いたときの $\mathfrak{a}$）の属する類にのみ依存する、と言うことである。逆に $\mathfrak{p}$ を $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ があらかじめ与えられた値を取るように定めることが出来るから、また各 σ にはちょうどひとつのイデアル類が対応する。$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ の乗法的性質により二つの類の積には置換の積が対応付けられる。

[9] Teiji Takagi: Über das Reziprozitätsgesetz in beliebigen algeraischen Zahlkörpern.Journal of the College of Science,Tokyo 1922.

６．$K=k(A)$ を次数 l^n の巡回拡大、$\zeta=e^{2\pi i/l}$ を １ の l 乗根、そして $\Omega=k(\zeta)$ を次数 m とする。したがって m は $l-1$ の約数であり l と素である。そのとき我々の定理が Ω において $\Omega(A)$ に関して正しいならば、それはまた k において K にたいしても成り立つ。

証明： σ、τ をそれぞれ K/k, Ω/k の群の生成元とする。K は類別 C^{ν} ($\sigma^{l^n}=1$, $C^{l^n}=C_0=$主類) にたいする類体、Ω は類別 $\mathfrak{K}^{\nu}$ ($\tau^m=1$, $\mathfrak{K}^m=\mathfrak{K}_0$) にたいする類体とする。

m と l は互いに素であるから、K と Ω についてもそうである。それらから合成された体 K^* は類別 $(C^{\nu}, \mathfrak{K}^{\mu})$ にたいする類体である。ここで括弧は再び共通部分を示す。

さて、Ω からのイデアルを、k における類別と同じ法にしたがい類別する。そして相対ノルムが C_0 に入るような類全体の集合を $\mathfrak{C}_0$ と記す。われわれはこの $\mathfrak{C}_0$ を主類にとる。$\mathfrak{C}'$ をそのように定められたあるひとつの類とし、そのノルム ($\mathfrak{a}\mathfrak{C}_0$ のノルムは $N\mathfrak{a}\cdot C_0$ に属する。それゆえ実際我々の類のひとつ C^{ν} に属する。) を C^e とするとき、s を $ms\equiv e \pmod{l^n}$ であるようにとり、$\mathfrak{C}'=C^s\cdot\mathfrak{C}_0'$ とおく。そのとき $\mathfrak{C}_0'$ のノルムは C_0 におちる。よって $\mathfrak{C}_0'=\mathfrak{C}_0$ である。類 $\mathfrak{C}=C\mathfrak{C}_0$ はそれゆえ Ω の類群を生成する。そしてまず $\mathfrak{C}^{l^n}=\mathfrak{C}_0$ である。K_1 をこの類別にたいする類体としよう。そのイデアルの Ω に関する相対ノルムは $\mathfrak{C}_0$ におち、k に関するノルムはそれゆえ C_0 におちる。しかし、それはまた Ω からのイデアルの相対ノルムとして $\mathfrak{K}_0$ におち、したがってそれは $(C_0, \mathfrak{K}_0)$ に入る。それゆえ K_1 は K^* と同じ類別にたいする類体であり、高木 により $K_1=K^*$ である。

K^* の群は明らかに $\sigma^{\nu}\tau^{\mu}$ であり、Ω は部分群 σ^{ν} に属する。われわれの定理２ は K^*/Ω にたいして正しいとしているから、σ には類 $\mathfrak{C}$ が、それゆえ σ^{ν} には類 $\mathfrak{C}^{\nu}$ が属するように対応付けられ

る。

$\mathfrak{p}$ を $(C^r, \mathfrak{R}^s)$ からの素イデアルとする。g_s が m と s の最大公約数で $m=g_s e_s$ ならば、分解法則より $\mathfrak{p}$ は Ω において g_s 次の e_s 個の素イデアル $\mathfrak{q}_i$ に分解される。さてたとえば、

$$\sigma^{\nu} \quad A \equiv A^{N\mathfrak{p}} \quad (\mathrm{mod} \quad \mathfrak{p})$$

ならば、$\sigma^{\nu g_s}$ は Ω において $\mathfrak{q}_i$ に属する。$\mathfrak{q}_i$ はそれゆえすべて類 $\mathfrak{C}^{\nu g_s}$ に、そのノルム $\mathfrak{p}^{g_s}$ は $C^{m\nu g_s}$ に属さなければならない。m の約数として g_s は l に素であり、したがって $\mathfrak{p}$ は類 $C^{m\nu}$ に属し、それゆえそれは σ^{ν} にのみ依存する。m は l に素であるから $C^{m\nu}$ は ν とともにすべての類を動く。$C^{m(\nu+\mu)}$ は $\sigma^{\nu+\mu} = \sigma^{\nu} \sigma^{\mu}$ に属する。

5。により、これで我々の定理 2 は素数次に対しては証明された。ゆえにまた（3。により）それらの合成体に対しても証明された。

6.

さてふたたび（付加された仮定はそのままで）任意の体 K に戻ろう。σ を位数 $m(\sigma)$ の $\mathfrak{G}$ からのある元、$\mathfrak{g}^{\sigma}$ を σ のべきの群、Ω を $\mathfrak{g}^{\sigma}$ に属する K の部分体とする。

$\psi_{i}^{(\sigma)}(\tau)$ （$i=1, 2, \cdots, m(\sigma)$，ただし、$i=1$ は主指標とする。）を $\mathfrak{g}^{\sigma}$ の指標（すなわち、普通のアーベル群指標）とし、Ω において K に関する L－級数

$$L(s, \psi_{i}^{(\sigma)})$$

をつくる。

（15）および（7）により、区別のために指数 σ を添加して、

$$(23) \qquad L(s, \psi_{i}^{(\sigma)}) = \prod_{\nu=1}^{\kappa} (L(s, \chi^{\nu}))^{r_{i\nu}^{(\sigma)}} \qquad (i=1, 2 \cdots\cdots, m(\sigma))$$

がなり立つ。

付加されている条件により、左辺では普通のアーベル的な L－級数が生ずる。よって（23）により、我々の関数が解析接続されることの証明が可能となる。まず、$L(s, \chi^{1}) = \zeta_{k}(s)$ である。したがってそれにたいしては解析接続は証明された。

$\nu > 1$ にたいしてわれわれは、$L(s, \chi^{\nu})$ が、主指標 $\psi_{1}^{(\sigma)}$ をのぞいたすべての σ にたいする $L(s, \psi_{i}^{(\sigma)})$ の有理数べきの積によって表される事を示そう。

（23）により、κ 個の方程式

$$(24) \qquad \sum_{\sigma \neq 1} \sum_{i=2}^{m(\sigma)} r_{i\nu}^{(\sigma)} x_{i}^{\sigma} = \delta_{k\nu}, \quad \nu = 1, 2 \cdots, \kappa$$

が、数列 2、3、…、κ のうちの固定された k のおのおのにたいし

て解かれることを示せば十分である。

さて　$i>1$　にたいして常に　$r_{i1}=0$　でありそれゆえ　$\nu=1$　に関して方程式（２４）は恒等式である。よって（２４）においては　$\nu\geqq 2$　と仮定して良い。ゆえに（２４）が解かれるためには、行列

$$(r_{i\nu}^{(\sigma)}),\quad \sigma\neq 1,\quad i=2,\cdots,m(\sigma)\ ;\ \nu=2,\cdots,\kappa$$

（ここで　σ　および　i　は列番号、ν　は行番号である）において、消えない　$(\kappa-1)$　次の小行列式が存在しなければならない。それは方程式

$$(25)\qquad \sum_{\nu=2}^{\kappa} r_{i\nu}^{(\sigma)}\, y_\nu=0$$

が、それを各　$\sigma\neq 1$、$i\geqq 2$　にたいして考えるとき、唯一つの解　$y_\nu=0$　を持つことから結論される。

それを示すために、（２５）に　$\phi_i^{(\sigma)}(\tau)$　（τ　は　$\mathfrak{g}^\sigma$　からのある元を示す――$\tau=1$　もまた許される　）を乗じ、i　について　２　から　$m(\sigma)$　まで加える。そうすれば（６）より

$$\sum_{\nu=2}^{\kappa}(\chi^\nu(\tau)-r_{1\nu}^{(\sigma)})\,y_\nu=0$$

あるいは

$$\sum_{\nu=2}^{\kappa}\chi^\nu(\tau)\,y_\nu=\sum_{\nu=2}^{\kappa} r_{1\nu}^{(\sigma)}\, y_\nu$$

が得られる。

ゆえに左辺は　$\mathfrak{g}^\sigma$　からのすべての　τ　にたいして同じ値を持つ。それは右辺が　τ　に無関係であるからである。さて　$\tau=1$　はすべての　$\mathfrak{g}^\sigma$　に共通な元である。それゆえ左辺は　$\mathfrak{G}$　からのすべての　τ　にたいしてとくに同じ値を持つ。それを　$-y_1=-y_1\chi^1(\tau)$　とかこう。そうすればわれわれの方程式は、すべての　τ　にたいして

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa}\chi^\nu(\tau)\,y_\nu=0$$

と書かれる。$\chi^i(\tau^{-1})$　を乗じ、ν　について加えれば（２）より

$$n\,y_i=0$$

が得られる。これですべてが証明された。

したがって　$L(s,\chi^{\nu})$　はアーベル的な　L－級数により表されるからそれは全平面に接続され、たかだか有限位数の分岐点を持つ。$\nu>1$　にたいしてそれは、我々の導き方により点　$s=1$　において正則で　0　と異なり、普通の　L－級数のもつすべての他の性質を持つ。

さてわれわれの　L－級数の、出発点にとった定義を修正しよう。付随する原始的指標により書かれた個々の　L－関数にたいするアーベル的　L－級数による表現をふりかえろう。この修正に際しては、有限個の因子のみが関係する。したがってこれまで導かれた関係は、我々がもっとも一般な　L－級数を公式　（１４）　により定義するとき、有限個の因子を除いて、新しい　L－級数においても正しく振る舞う。この新しい　L－級数はしかし適当な枝において簡単な関数等式を満たす。それは、原始的なアーベル的　L－級数がそうであるからである。故に　ヘッケ　の結果より、我々の新しい　L－級数の定義を基礎に置くとき、これまでに導かれたすべての公式が精確に成りたつのである。存在するかも知れない分岐点の周りを回ると　L－関数には　1　のべき根が乗ぜられる。最後に、我々の新しい定義は、（ふたたび、関数等式により）アーベル的　L－級数によるどのような表現を用いようと、それには無関係であることが分かる。

関数等式それ自身は

$$L(1-s,\bar{\chi}^{i})=a_i A^s\,(\Gamma(s))^{l_i^{(1)}}\,(\cos(s\pi)/2)^{l_i^{(2)}}\cdot(\sin(s\pi)/2)^{l_i^{(3)}}\,L(s,\chi^{i})$$

の形[10]をしている。ここで　$\bar{\chi}^{i}$　は　χ^{i}　の逆指標であり、a_i　は考えている枝にのみ依存する。ゆえに場合によって、$L(s,\chi^{i})$　の他の枝では因子として　1　のべき根をとることがある。

$l_i^{(1)}$　の決定のために関数等式を（２３）に代入する。右辺ではそのときΓ－因子のべきは　$\sum_{\nu=1}^{\kappa} r_{i\nu}^{(\sigma)} l_{\nu}^{(1)}$　であり、左辺ではそれは[10]　$m\cdot\frac{n}{m(\sigma)}$

[10] E.Landau:Über Ideale und Primideale in Idealklassen.Math.Zeitschr. Bd.2,p.104,Satz LXVI.

（体　Ω　の次数）である。ここで　m　は　k　の次数である。ゆえに各　i　および各　σ　にたいして

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa} r_{i\nu}^{(\sigma)} l_{\nu}^{(1)} = m \cdot \frac{n}{m(\sigma)}$$

でなければならない。$\phi_i^{(\sigma)}(\tau)$　を乗じ、i　について加えれば、（6）により

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa} \chi^{\nu}(\tau)\, l_{\nu}^{(1)} = m \cdot n \cdot \varepsilon_{\tau}$$

が得られる。ここで　$\tau=1$　であるか　$\tau\neq1$　であるかにしたがい　$\varepsilon_{\tau}=1$　または　$=0$　である。

これに　$\chi^{i}(\tau^{-1})$　を乗じ、τ　について加えれば（2）により

$$n\, l_i^{(1)} = m n f_i \quad \text{すなわち} \quad l_i^{(1)} = m f_i$$

を得る。

同様にして現れている定数の一つを詳しく定めることが出来る。すべてをまとめて次の定理を得る：

定理　3　原始的　L－級数　$L(s, \chi^{i})$　は全平面に接続され、たかだか有限位数の乗法的分岐点を持つ。$i>1$　にたいしてそれは点　$s=1$　において正則で　0　と異なる。直線　$\Re(s)=1$　の上および　$\Re s=1$　の左側で上に向かって　$(\log T)^{-1}$　のように減少する領域のなかに　0点を持たない。それは

$$(26)\quad \frac{L(1-s, \bar{\chi}^{i})}{L(s, \chi^{i})} = \varepsilon_i \left(\frac{2}{(2\pi)^s}\right)^{mf_i} (\alpha_i |\Delta|^{f_i})^{s-(1/2)} (\cos(s\pi)/2)^{l_i^{(2)}} (\sin(s\pi)/2)^{l_i^{(3)}} (\Gamma(s))^{mf_i}$$

のかたちの関数等式を満たす。ここで　Δ　は　k　の判別式、α_i　は有理整数の有理数べきの積、そして　ε_i　は、たかだか考えている枝に依存する　$|\varepsilon_i|=1$　を満たす数である。

さらに　$l_i^{(2)}$　および　$l_i^{(3)}$　は有理数である。

同じようにして、我々の関数の一意性――それは特別な場合には明白におもわれる――もまた確立されてしかるべきである。そう難しくなく、少なくとも n の素因子のみが分岐次数を整除しうることが証明される。

しかしながらわれわれの L－級数について（主指標を除いて）整関数がかかわっていることの証明には完全に新しい方法が要求されるであろう。

7.

上で導かれた結果を用いて、フロベニウスの予想を公式（１２）により証明することが出来る。[11]

しかし、それを困難なく強めることが出来る。すなわち（１２）から良く知られた方法により

$$(27)\qquad \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \leqq x} \chi^{i}(\mathfrak{p}) = \delta_{1i}\, Li(x) + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}})$$

が得られるのである。ここで $\delta_{11}=1$ で、それ以外では $\delta_{1i}=0$ である。

さて $\mathfrak{C}_r$ を一つの固定された類、σ を $\mathfrak{C}_r$ からの一つの置換、そして $\pi(x, \mathfrak{C}_r)$ を $\mathrm{N}\mathfrak{p} \leqq x$ である k からの $\mathfrak{C}_r$ に属する素イデアルの個数とする。

（２７）に $\chi^{i}(\sigma^{-1})$ を乗じ、i について加えれば（３）から

$$\frac{n}{h_r}\pi(x, \mathfrak{C}_r) = Li(x) + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}})$$

が従う。

定理 4 $\pi(x, \mathfrak{C}_i)$ を類 $\mathfrak{C}_i$ に属する $\mathrm{N}\mathfrak{p} \leqq x$ の素イデアルの個数とすれば

$$(28)\qquad \pi(x, \mathfrak{C}_r) = \frac{h_r}{n} Li(x) + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}})$$

がなり立つ。

ゆえにこれらの素イデアルの密度は $\mathfrak{C}_i$ からの $\mathfrak{G}$ の置換の密度にひ

[11] 脚注 [3] で引用された論文の §５ 公式（１６）、（１８）を見よ。

としい。とくに各類 $\mathfrak{C}_i$ には無限に多くの素イデアルが存在する。

この定理は算術級数定理の一般化であり（われわれの一般相互法則の力をかりて）それを特別な場合として含む。その本当の意味は、なお解明を待たれている。

8.

定理 5 有理数の基礎体 R において、原始的 L－級数の間には乗法的関係は存在しない。

証明：$\prod_{i=1}^{\kappa}\left(L\left(s,\ \chi^{i}\right)\right)^{x_i}=1$ とする。

これから（１２）により

$$\sum_{p^{\nu}}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \chi^{i}\left(p^{\nu}\right)\right)\frac{1}{\nu\, p^{\nu s}}=0$$

が与えられる。

定理 4 より各類 $\mathfrak{C}$ には無限に多くの素イデアルが存在する。それゆえ $\mathfrak{G}$ からの各 τ にたいして

$$\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \chi^{i}(\tau)=0$$

が成り立たなければならない。

しかしこれから良く知られた方法で

$$x_i=0$$

が結論される。

上で導かれた定理は、一般に任意の基礎体に対してはなり立たない。それはその場合、共役な素イデアルがすべてを壊してしまうからである。実際明らかな実例（すでに二次体にたいして）を構成することが出来る。そこではたとえば共役な指標は同じ L－級数に対応付けられる。

定理 5 を基にすれば、ある ζ－関数あるいは L－級数の間の全ての関係をいかに求めるかが分かる。我々は、問題の関数が定義されるようなすべ

ての体を含み、それを　R　の原始的　L－級数に分解するような絶対ガロア体を考えよう。そのとき消去法により、すべての関係が得られる。何故ならばおのおの、定理　５　によっては与えることの出来ない原始的　L－級数の間の関係に行き着くからである。２。の終わりに与えた注意により結局われわれは一意性の証明にのみ役立つ共通ガロア体への移行をせずに済ませることが出来る。それは原始的　L－級数への分解は、高次の体においても同じものであるからである。これですべての乗法的関係を決定することに対して、確定した結論に達した。

９。

終わりに、得られた結果をアーベル体の系列に入らないもっとも簡単な体、イコサエーダ体に応用しよう。まずこの場合に問題の相互法則が証明されることに注意しよう。実際、４　を除いて　６０　の素因子は　３　および　５　だけである。また　４　は、イコサエーダ群は位数　４　の元を含まず位数　２　の元のみを含むから、４元群（Vierergruppe)に導かれる。

５個の類　$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4, \mathfrak{C}_5$　が存在する。それぞれ１、１５、２０、１２、１２個の元を持つ。これらの類に属する基礎体の素イデアルの密度はしたがって　１／６０，１／４，１／３，１／５，１／５　である。

さらに位数が１、３、３、４、５　である　５個の単純指標が存在する。それぞれ属する　L－級数を　$L_3^{(1)}$，$L_3^{(2)}$，L_4，L_5（主指標には体　k　のゼータ関数　ζ　が属する）とする。

部分体のゼータ関数（添数字は体の相対次数を意味する）にたいして、われわれの方法により容易に次の結果が得られる：

$$
\begin{aligned}
\zeta_5 &= \zeta L_4 \\
\zeta_6 &= \zeta L_5 \\
\zeta_{10} &= \zeta L_4 L_5 \\
\zeta_{12} &= \zeta L_3^{(1)} L_3^{(2)} L_5 \qquad (29) \\
\zeta_{15} &= \zeta L_4 (L_5)^2 \\
\zeta_{20} &= \zeta L_3^{(1)} L_3^{(2)} (L_4)^2 L_5 \\
\zeta_{30} &= \zeta L_3^{(1)} L_3^{(2)} (L_4)^2 (L_5)^3 \\
\zeta_{60} &= \zeta (L_3^{(1)} L_3^{(2)})^3 (L_4)^4 (L_5)^5
\end{aligned}
$$

Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen

Gruppencharakteren

(一般指標を係数とする　Lー級数の理論について)

Emil Artin

(Abhandlungen der Mathematischen Seminar im Hamburg,1923,pp.292-306

=Collected Works pp.165-179)

フロベニウス群指標を係数とする　Lー級数[1]の理論にたいするこれまでの基礎は二つの点で欠陥がある。第一にこれらの関数の定義は間接的である。すなわちそれらは、我々の関数の積展開では分岐しない素イデアルの寄与のみが完全に与えられ、それに反し、判別式の約数の寄与はアーベル的　Lー級数との結び付きに基づいて後から追加して導入され、また実際明示的ではない、という状況である。第二に、ある種の関数等式の存在は証明され、その計算方法も分かるが、それは一般には詳しくは知られていない。

それ故以下、このような欠陥を改めたこの理論の基礎付けを与えよう。その定義は始めから完全であり、関数等式は定数因子を除いて明確に定められる。この機会に私はまた、理論のどの部分が類体論を用いないで統制されるかを示そう。それは解析的整数論において意味を持つであろう。そのほかわれわれは、ガロア体の拡大体に対するゼータ関数の間にある関係の個数を精密に与えることが出来る。これまでと同様、我々の関数の一価性および整関数かどうかに関する問題は解決されないままである。

この論文を読むためには、私の論文" Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper"[2]　の知識が仮定される。そこで導入された導手は関数等式の指数的因子 (exponentialfaktors) の本質的な部分を形づくる。

1.　補助定理

1。　D　の第一節で述べられた考察を二、三補充しよう。まず、そこの最終結論を次のように鋭くする：

[1] E.Artin,Über eine neue Art von L-Reihen,Hamburg Abhandlung, vol.3.同じく H.Hasse;Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper,Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung,Erg. vol.6,p.146.　この報文 (Bericht)の p.193 に与えられている　Lー級数に関する問題は、我々の研究のきっかけとなった。

[2] E. Artin, Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper, Crelle,vol.146.　これは常に　D　と引用される。

D．（7）において　$i=1$　とおくと、すなわち主指標を考えると、$p_1=1$　により、　$R_1^\rho=1$　である。ゆえに　（6）において主指標を持つ項を左辺に移項すれば、等式

$$(1)\qquad \chi_{\phi_1^\rho}(\sigma)-\chi_1(\sigma)=\sum_{i=2}^{h'} R_i^\rho\,\Xi_i(\sigma)$$

が得られる。また、この等式について、それは可解であると主張しよう。D．において与えられた指示を文字通り繰り返すだけで良い。そうして次が得られる：

主指標とことなる各有理指標は　$\chi_{\phi_1^\rho}(\sigma)-\chi_1(\sigma)$　の形の表現の、有理係数一次結合である。ここで　$\chi_{\phi_1^\rho}$　は、部分群　$\{\rho\}$　の主指標から誘導された全群の指標で　$\chi_1(\sigma)$　は主指標である。

なお、有理指標の個数を決定しよう。[3] すでに有理指標は群の Abteilung[*] の関数であることは良く知られている。我々は逆に次のことを主張する：

σ　の属する Abteilung にのみ依存する関数　$f(\sigma)$　の各々は、有理指標の一次結合である。

まず　$f(\sigma)$　が　σ　の 共役類　にのみ依存するならば、群の単純指標から一次合により得られる：

$$(2)\qquad f(\sigma)=\sum c(\chi_\nu)\cdot\chi_\nu(\sigma)\text{。}$$

ここで　$c(\chi_\nu)$　はある定まった数である。$(i,\ n)=1$　ならば、σ　を　σ^i　で置き換えても　$f(\sigma)$　は変わらない。しかし各指標はそのとき代数的共役に移る。i　を適当に選んで、$\chi_\nu(\sigma)$　が予め与えられた任意の指標に移るように出来る。しかし（2）における係数は一意的に定められるから、数　$c(\chi_\nu)$　は互いに代数的に共役な指標にたいして同じ値をとることがわかる。ゆえに（2）において共役な指標はすべて有理指標にまとめることが出来る。これで我々の定理が証明された。

---

[3] この個数の決定は既にいささか異なる方法で　G.Frobenius und I.Schur,Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen, Berliner Berichte,1906,p.18　に扱われている。

[*]（訳注）群　$\mathfrak{G}$　からの元　σ　の Abteilung とは、σ　と同じ位数をもつ　σ　のべきから生成される、$\mathfrak{G}$　からの共役類全体の集合のことである。（末綱恕一：解析的整数論、では　区　、セール：有限群の線形表現、ではΓ$_R$-共役類とよばれている。）

このような表現は明らかに有理指標により一意的に表されるから次の結果が得られる：

(一次独立な) 有理指標の個数は Abteilung の個数に等しい。

われわれはなお次のことを知っていなければならない：

群 $\mathfrak{G}$ の各指標はアーベル的部分群の指標から誘導される指標の一次結合である。係数は有理数で、その分母はたかだか群位数の素因数を含む。指標のなかに群の主指標が入っていないならば、一次結合としての表現に対してもまた主指標から誘導された指標は要しない。

この定理の証明には既に二度も出会っている。[4] それゆえ再び証明することは避けよう。

2。 この節もまた D. の同じ番号の対応する節の補強である。$\mathfrak{G}$ の各指標 χ および k からの各素イデアルべき $\mathfrak{p}^h$ にたいして

$$(3) \qquad \chi(\mathfrak{p}^h) = \frac{1}{e}\,\chi(\sigma^h \mathfrak{T})$$

と定義する。ここで σ は D. における σ_1 である。D. の公式 (12) はそのとき、さらに

$$(4) \qquad \chi_\phi(\mathfrak{p}^h) = \sum_{f_i \mid h} f_i \phi(\mathfrak{q}_i^{h/f_i})$$

を示す。

さて数 $\chi(\mathfrak{p}^h)$ の構造を詳しく調べよう。それは行列 $A_{\sigma^h} \cdot \frac{1}{e} A_{\mathfrak{T}}$ のトレースである。ここで A_τ は指標 $\chi(\tau)$ に属する表現であり、$A_{\mathfrak{T}}$ は対応する行列にわたる和を意味する。そのとき

$$\left(\frac{1}{e}A_{\mathfrak{T}}\right) \cdot \left(\frac{1}{e}A_{\mathfrak{T}}\right) = \frac{1}{e^2}\,A_{\mathfrak{T}\mathfrak{T}}$$

$$= \frac{1}{e^2}\,A_{e\mathfrak{T}} = \frac{1}{e}A_{\mathfrak{T}}$$

がなり立つ。これから行列 $\frac{1}{e}A_{\mathfrak{T}}$ 自身

[4] 脚注[1] で引用された論文を見よ。

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形に変換されなければならないことを示す。ここで　0　は　零行列、E　は単位行列を意味する。この表現が、同様の形に変換されたと考える。

さて、行列　A_σ　を対応した形に分解する：

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} B_\sigma & C_\sigma \\ D_\sigma & F_\sigma \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{T}$　は　$\mathfrak{Z}$　の正規部分群であるから、A_σ　と　$\frac{1}{e} A_{\mathfrak{T}}$　とは可換である。それは方程式　$C_\sigma = 0$，$D_\sigma = 0$　を生ずる。

これで

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} B_\sigma & 0 \\ 0 & F_\sigma \end{pmatrix} \text{、したがって} \quad A_{\sigma^h} \cdot \frac{1}{e} A_{\mathfrak{T}} = \begin{pmatrix} B_\sigma^h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得た。これから　B_σ^h　が商群　$\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$　を表現することがわかる。

素イデアルべきに　$A_{\mathfrak{p}^h}$　を対応付け

$$(5) \qquad A_{\mathfrak{p}^h} = \begin{pmatrix} B_\sigma^h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mathfrak{p}}^h$$

と定義する。そのとき、$\chi(\mathfrak{p}^h)$ はちょうどこの行列のトレースである。

素イデアルが　K/k　の相対判別式を割らないならば、簡単に

$$\chi(\mathfrak{p}^h) = \chi(\sigma^h) \quad \text{かつ} \quad A_{\mathfrak{p}^h} = A_{\sigma^h}$$

である。これは私が以前の論文で基礎においた定義であるが、しかしながらそれは、$\mathfrak{p}$ が相対判別式を割らない素イデアルのときのみ有効である。

一般に、フロベニウス置換は惰性群で割ることをのぞいて定められる。そのように変更しても　$\chi(\mathfrak{p}^h)$　の値は固定されている。

さて、K'/k　を、K　を含むガロア体とし、その群を　$\overline{\mathfrak{G}}$　とする。$\overline{\mathfrak{H}}$　を　K

に属する群とする。そのとき、もとの群 $\mathfrak{G}$ の元は商群 $\bar{\mathfrak{G}}/\bar{\mathfrak{H}}$ の傍系を意味するものと考えられる。$\bar{\mathfrak{G}}$ からの元を $\bar{\sigma}$、$\bar{\tau}$、…・ とかく。一方、$\mathfrak{G}$ の元は σ、τ、…・ と書かれる。したがってそれは $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ の元をも示すことになる。$\mathfrak{P}_1'$ を K' における $\mathfrak{P}_1$ の素因子とする。$\bar{\mathfrak{Z}}$、$\bar{\mathfrak{T}}$、$\bar{\sigma}$ を k に関する $\mathfrak{P}_1'$ の分解群、惰性群およびフロベニウス置換とする。$\bar{\tau}$ が $\bar{\mathfrak{Z}}$ に属するならば $\bar{\tau}\mathfrak{P}_1'=\mathfrak{P}_1'$ であり、それゆえまずたしかに $\bar{\tau}\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}_1$ である。したがって $\tau=\bar{\tau}\bar{\mathfrak{H}}$ は $\mathfrak{Z}$ の元である。逆に、τ が $\mathfrak{Z}$ に属し、$\bar{\tau}$ が τ からのある置換ならば、まず $\bar{\tau}\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}_1$ である。さて $\bar{\tau}\mathfrak{P}_1'\neq\mathfrak{P}_1'$ の場合、$\bar{\tau}\mathfrak{P}_1'$ は $\mathfrak{P}_1$ の約数でなければならない。そのとき $\bar{\mathfrak{H}}$ からの元 $\bar{\kappa}$ を適当に選んで $\bar{\kappa}\,\bar{\tau}\mathfrak{P}_1'=\mathfrak{P}_1'$ とすることが出来る。しかし $\bar{\kappa}\,\bar{\tau}$ はまた τ の元である。それゆえ、同様に $\bar{\tau}\mathfrak{P}_1'=\mathfrak{P}_1'$ であるように $\bar{\tau}$ をとることが出来る。それゆえ $\mathfrak{Z}=\bar{\mathfrak{Z}}\,\bar{\mathfrak{H}}/\bar{\mathfrak{H}}$ であることが分かった。$\bar{\tau}$ が $\bar{\mathfrak{T}}$ に属するならばさらに $\tau=\bar{\tau}\bar{\mathfrak{H}}$ は $\mathfrak{T}$ に属することも分かる。逆に、τ が $\mathfrak{T}$

逆に、τ が $\mathfrak{T}$ の元で $\bar{\tau}$ が τ の元ならば、上で示されたことより、適当に選べばそれはとにかく $\bar{\mathfrak{Z}}$ に属する。それゆえ K' からのすべての数 A' にたいして合同式

$$\bar{\tau}A' \equiv A'^{Np^{\nu}} \pmod{\mathfrak{P}_1'}$$

が、適当な、A' に依存しない ν に関してなり立つ。A' としてとくに K からの数を取れば、法は $\mathfrak{P}_1$ に拡大され、また作用は $\mathfrak{T}$ からの元の作用でなければならない。さて、A' を K からの $\bmod\ \mathfrak{P}_1$ の原始根にとれば、指数は $N\mathfrak{P}_1$ のべきでなければならない。しかし、K に関する $\mathfrak{P}_1'$ の分解群の適当な置換 $\bar{\kappa}$ は K' からのすべての数に対して同じ作用を持つ。そのとき $\bar{\kappa}$ は $\bar{\mathfrak{H}}$ に属する。$\bar{\tau}$ を $\bar{\tau}\,\bar{\kappa}^{-1}$ でおきかえればこの新しい $\bar{\tau}$ は $\bar{\mathfrak{T}}$ に属する。それは $\mathfrak{T}=\bar{\mathfrak{T}}\,\bar{\mathfrak{H}}/\bar{\mathfrak{H}}$ を示す。

最後に、$\bar{\sigma}$ が k に関する $\mathfrak{P}_1'$ のフロベニウス置換ならば $\bar{\sigma}$ の定義合同式は $\sigma=\bar{\sigma}\bar{\mathfrak{H}}$ が k に関する $\mathfrak{P}_1$ のフロベニウス置換であることを示している。

χ が $\mathfrak{G}$ の指標であり、また $\overline{\mathfrak{G}}$ の指標と考えられるとき、我々の考察から直ちに $\chi(\mathfrak{p}^h)$ が古い意味と同じ値をとることがわかる。すなわち

K' が K を含む体で χ が K に応ずる指標ならば、$\chi(\mathfrak{p}^h)$ の値は、それが K において構成されているか、K' において構成されているかによらない。

2. L－級数の定義

3. さて、指標 χ に属する、体 K/k の L－級数の対数を

$$\log L(s, \chi, K/k) = \sum_{\mathfrak{p}^h} \frac{\chi(\mathfrak{p}^h)}{h \cdot N\mathfrak{p}^{hs}} \tag{6}$$

により定義する。ここで和は k からのすべての素イデアルのべきにわたる。

我々の級数が半平面 $\Re(s) > 1$ において収束することは容易に分かる。この半平面に含まれる任意の有界閉領域においてこの級数は絶対一様に収束する。

さてこの級数に対する一つの素イデアル $\mathfrak{p}$ の寄与を考察しよう。それは行列級数

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{A_{\mathfrak{p}}^h}{h \cdot N\mathfrak{p}^{hs}}$$

のトレースのことである。ここで $A_{\mathfrak{p}}^h$ は (5) で定義されている。

行列 $A_{\mathfrak{p}}$ の特性方程式の根を考えれば、この級数はまた次のように表されることがわかる：

$$\mathrm{Spur}\left(\sum_{h=1}^{\infty} \frac{A_{\mathfrak{p}}^h}{h \cdot N\mathfrak{p}^{hs}}\right) = -\log \left| E - N\mathfrak{p}^{-s} A_{\mathfrak{p}} \right|$$

ここで E は考えている次数の単位行列で、縦線は行列式を意味する。[5] そして積展開

---

[5] 脚注 [1] における積公式にたいする類似の証明を見よ。

(7) $$L(s, \chi, K/k) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{\left| E - N\mathfrak{p}^{-s} \ A_{\mathfrak{p}} \right|}$$

が見出される。これはまた、半平面　$\Re(s) > 1$　において成り立つ。

4。　2。の最後の定理から次が示される：

<u>K' が　K　を含むガロア体ならば</u>

(8) $$L(s, \chi, K'/k) = L(s, \chi, K/k)$$

<u>が成り立つ</u>。

Ω　を中間体とし、ϕ　を　K/Ω　の指標とする。χ_{ϕ}　が　ϕ　から誘導された指標であるとき、二つの　Lー級数　$L(s, \chi_{\phi}, K/k)$ と　$L(s, \phi, K/\Omega)$ を互いに比較しよう。そのためには　(4)　が助けになる；誘導された指標にたいする級数 (6) を考え、(4) をふりかえる。そうすれば

$$L(s, \chi_{\phi}, K/k) = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{h} \sum_{f_i | h} \frac{f_i \phi (\mathfrak{q}_i^{h/f_i})}{h \cdot N\mathfrak{p}^{hs}}$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}_i | \mathfrak{p}} \sum_{\nu} \frac{\phi(\mathfrak{q}_i^{\nu})}{\nu \cdot N\mathfrak{q}_i^{\nu s}}$$

$$= \sum_{\mathfrak{q}} \sum_{\nu} \frac{\phi(\mathfrak{q}^{\nu})}{\nu \cdot N\mathfrak{q}^{\nu s}}$$

が得られる。しかし右辺には丁度　Lー級数　$\log L(s, \phi, K/\Omega)$　が生じているから、重要な公式

(9) $$L(s, \phi, K/\Omega) = L(s, \chi_{\phi}, K/k)$$

が得られた。関係式

(10) $$L(s, \chi_1 + \chi_2, K/k) = L(s, \chi_1, K/k) \ L(s, \chi_2, K/k)$$

は殆ど自明である。

χ_1 が主指標ならばすべての $\mathfrak{p}^h$ にたいして常に $\chi_1(\mathfrak{p}^h)=1$ である。よって

$$L(s, \chi_1, K/k)=\zeta_k(s)$$

である。とくに（9）において ϕ として主指標をとれば

（11）　$\zeta_\Omega(s)=L(s, \chi_{\phi_1}, K/k)$

がえられる。ここで $\zeta_\Omega(s)$ は中間体 Ω のゼータ関数である。

最後に、K/k をアーベル的とする。χ が単純指標ならば（8）により体 K/k を巡回的と仮定することが出来る。K は導手としてのある法 $\mathfrak{f}$ による k 上の類体である。指標 χ は（8）により群の生成指標であると仮定することが出来る。素イデアル $\mathfrak{p}$ が K/k の判別式をわるならば、したがって導手をわるならば、その惰性群は単位群とは異なる。ゆえに

$$\chi(\mathfrak{p}^h)=\frac{1}{e}\chi(\sigma^h\mathfrak{T})=\frac{1}{e}\chi(\sigma^h)\cdot\sum_{\tau\in\mathfrak{T}}\chi(\tau)=0$$

である。何故ならば、そのときまた χ は群 $\mathfrak{T}$ の、主指標とは異なる指標であるからである。それゆえ級数（6）において、和は $\mathfrak{f}$ と素な素イデアルにたいしてとりさえすればよい。このような素イデアルのおのおのにたいしては $\mathfrak{T}=1$ である。それゆえ $\chi(\mathfrak{p}^h)=\chi(\sigma^h)$ である。一般相互法則からさらに $\chi(\mathfrak{p}^h)$ が法 $\mathfrak{f}$ による k における類別――それに関し K は類体である――の固有の指標であることがわかる。

K/k がアーベル的ならば、体の L－級数はおのおの通常の意味のアーベル的 L－級数であり、実際それは固有の指標に属する。逆に通常の L－級数のおのおのは、体を適当に選ぶときの我々の意味での L－級数である。

3. ガンマ因子

5. この節では K は有理数体の抽象的有限次拡大である。このような体には附値が定義される。すなわち、それを普通の数体に埋め込むことができる。ヘンゼルおよびハッセ[6]の研究から、ここでもまたイデアル論的用語を用いるのが好都合であることがわかる。すなわち、埋め込みを体の無限素因子と考えるのである。そのとき、共役な複素埋め込みは本質的に異なったものとは考えられない。それらは同じ素因子と見る。

この意味で各体には共役体の個数に対応して r_1+r_2 個の附値 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \cdots\cdot$ $\mathfrak{p}_{r_1+r_2}$ が存在する。ここで r_1 および r_2 は慣例通りである。附値を、像体が実であるか虚であるかにしたがい、実の附値、虚な附値に分類する。基礎体にたいしてすでに定められている附値を表す拡大体の附値を、基礎体の附値の因子という。基礎体の各附値にたいし、その延長である少なくとも一つの拡大体の附値が存在することは明らかである。普通の意味のイデアルはこの節では現れない。ドイツ文字はすべて無限素点をあらわす。

分解群および分解体の概念を無限素点に移そう。[7]

k を再び基礎体、K/k を相対ガロア体、$\mathfrak{p}$ を k の附値とし、$\mathfrak{P}$ を K における $\mathfrak{p}$ の素因子とする。

附値 $\mathfrak{P}\tau$ とは次のものと理解する：まず K からの数に自己同形 τ を作用させる；ついで、この像が附値 $\mathfrak{P}$ によってどのような数に移されたかを見る；そしてこの結果を最初の数に対応付けるのである。さてどのような自己同形に対して $\mathfrak{P}\tau=\mathfrak{P}$ となるかを考えよう。素因子の意味についての我々の約束により、写像 $\mathfrak{P}$ と写像 $\mathfrak{P}\tau$ の間の違いはたかだか第二のものが第一のものの複素共役であるところにある。すでに $\mathfrak{p}$ が虚ならばそういうことはない。それはそのときには基礎体が固定されないからである。$\mathfrak{p}$ が実ならば、$\mathfrak{P}$ もまた実のときには″違い″はない。そのときには恒等的自己同形しかないからである。しかし $\mathfrak{p}$ が実で $\mathfrak{P}$ が虚ならば、複素共役への埋め込み

---

[6] Hensel,Zahlentheorie,Berlin 1913,p.292 ff. では有理数体にたいしてのみ公表されている。一般には H.Hasse,Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper,Crelle 153,p.115, 同じく″Bericht″第Ｉa部、§2、に扱われている。

附値とは本来絶対値を対応付ける事と理解するべきである。そのとき数体への各埋め込みがこの対応付けを与えるが、共役複素写像は同じ附値を与えるのである。

[7] この概念は既に Hasse.Bsricht Ⅱ,p.30,脚注に示されている。

なりそれゆえ位数2をもつような置換がただ一つ存在する。この自己同形に関しては、複素共役に移されても何も変わらないような、すなわち、附値 $\mathfrak{P}$ により実数に写されるような K の数のみが固定されたままである。そのとき $\mathfrak{P}$ を固定する置換を k に関する $\mathfrak{P}$ の分解群といい、この群に属する体を分解体 Z という。$\mathfrak{p}$ が実のとき、Z は附値 $\mathfrak{P}$ に関して K の最大実部分体である。

$\mathfrak{P}$ から $\mathfrak{P}\tau$ のかたちで $\mathfrak{p}$ のすべての素因子が得られる。そのとき、分解体は $\tau^{-1}Z$ に移り、分解群 $\mathfrak{Z}$ は $\tau^{-1}\mathfrak{Z}\tau$ に移る。

$\mathfrak{Z}$ の生成元を k に関する $\mathfrak{P}$ のフロベニウス置換といい、σ とかく。$\mathfrak{P}\tau$ のそれは $\tau^{-1}\sigma\tau$ である。

6。 さてつぎのように関数を定義しよう：

(12) $\gamma(s, \chi, \mathfrak{p}, K/k) =$

$$\begin{cases} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{\chi(1)} & \mathfrak{p}\ \text{が虚なとき、} \\ \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{\frac{\chi(1)+\chi(\sigma)}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{\frac{\chi(1)-\chi(\sigma)}{2}} & \mathfrak{p}\ \text{が実のとき。} \end{cases}$$

これらの関数は明らかに、その定義に関し $\mathfrak{p}$ のどの素因子 $\mathfrak{P}$ を用いようと無関係である。

さて、以前 Lー関数に対して得たのと類似の定理を証明しよう。

K'/k を、K を含むガロア体とする。$\mathfrak{P}'$ を $\mathfrak{P}$ の K' における素因子とする。その他の点では、以前の記号をその儘用いることとする。

われわれは次の公式を主張する：

(13) $\gamma(s, \chi, \mathfrak{p}, K/k) = \gamma(s, \chi, \mathfrak{p}, K'/k)$

証明：

a) $\mathfrak{p}$ が虚ならば、主張は自明である。

b) $\mathfrak{p}$ および $\mathfrak{P}$ は実とする。そのとき $\sigma=1$。K' の最大実部分体は K

を含まなければならない。それゆえ $\overline{\sigma}$ は部分群 $\overline{\mathfrak{H}}$ に含まれる。これからわれわれの主張は従う。

c) $\mathfrak{p}$ は実、$\mathfrak{P}$ は虚とする。そのとき $\mathfrak{P}'$ も虚である。Z は Z' の部分体であるが K は Z' の部分体ではない。したがって $\overline{\sigma}$ は群 $\overline{\mathfrak{H}}$ には含まれないが、傍系 σ には確かに含まれる。ゆえに $\sigma=\overline{\sigma}\ \overline{\mathfrak{H}}$ であり、ここからすべては導かれる。

更に、Ω を相対次数 m の中間体とする。われわれは次を主張する：

$$(14)\qquad \gamma(s, \chi_{\phi}, \mathfrak{p}, K/k) = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} \gamma(s, \phi, \mathfrak{q}, K/\Omega)$$

ここで $\mathfrak{q}$ は体 Ω における $\mathfrak{p}$ の素因子を動く。

証明：

a) $\mathfrak{p}$ を虚とする。そのとき $\mathfrak{p}$ は Ω においてちょうど m 個の素因子をもつ。何故ならば、複素共役写像は現れないからである。素因子はまた虚であり、我々の主張は $\chi_{\phi}(1)=m\phi(1)$ よりしたがう。

b) $\mathfrak{p}$ を実とする。$\mathfrak{P}$ から出発して素因子 $\mathfrak{P}\tau^{-1}$ をつくり、このような二つの素因子が、いつ Ω の同じ素点を定めるかを尋ねよう。そのとき、置換 τ_1^{-1}、τ_2^{-1} は体 Ω において殆ど等しい作用を持たなければならない。それらは附値 $\mathfrak{P}$ に関したかだか複素共役だけ異なる。それゆえ、$\mathfrak{Z}$ からの元を右から掛ける事を除いて τ_1、τ_2 は $\mathfrak{U}$ からの左因子だけ異なる。したがって、$\mathfrak{U}\tau_1\mathfrak{Z}=\mathfrak{U}\tau_2\mathfrak{Z}$ である。それゆえ Ω において $\mathfrak{p}$ の異なる素因子を定めるために、分解 $\mathfrak{G}=\sum\mathfrak{U}\tau_i\mathfrak{Z}$ を考える。K からの素因子 $\mathfrak{P}\tau_i^{-1}$ はそのときすべて異なり、$\mathfrak{p}$ の Ω における異なるすべての素因子 $\mathfrak{q}_i$ を実際にはちょうど定める。複合物 $\mathfrak{U}\tau_i\mathfrak{Z}$ を

$$\mathfrak{U}\cdot\tau_i\mathfrak{Z}\tau_i^{-1}\cdot\tau_i$$

の形に書けば、それは、$\tau_i\mathfrak{Z}\tau_i^{-1}$ が $\mathfrak{U}$ の部分群であるとき、ちょうど一つの $\mathfrak{U}$ の傍系を与える。それは、$\mathfrak{P}\tau_i^{-1}$ の分解体 Z_i は Ω の拡大体であること、それゆえ対応する Ω の附値 $\mathfrak{q}_i$ は実ではなくなることを意味する。最後の種類の τ_i は $\tau_i\sigma\tau_i^{-1}$ が $\mathfrak{U}$ に属するようなものである。この τ_i はしかし誘導指標をつくるときに必要である。それは公式

$$\chi_{\phi}(\sigma) = \sum_{\tau_i} \phi(\tau_i \sigma \tau_i^{-1})$$

においてこのような τ_i についてだけ和をとる必要があるからである。

これで

$$\chi_{\phi}(\sigma) = \sum_{\mathfrak{q}:\text{実}} \phi(\sigma_{\mathfrak{q}})$$

が成り立つことが分かった。それに反し

$$\chi_{\phi}(1) = m\phi(1) = \sum_{\mathfrak{q}:\text{虚}} 2\phi(1) + \sum_{\mathfrak{q}:\text{実}} \phi(1)$$

である。それゆえ

$$\gamma(s, \chi_{\phi}, \mathfrak{p}, K/k) = \prod_{\mathfrak{q}:\text{虚}} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \right)^{\phi(1)}$$

$$\cdot \prod_{\mathfrak{q}:\text{実}} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right)^{\frac{\phi(1)+\phi(\sigma_{\mathfrak{q}})}{2}}$$

$$\cdot \prod_{\mathfrak{q}:\text{実}} \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \right)^{\frac{\phi(1)-\phi(\sigma_{\mathfrak{q}})}{2}}$$

$$= \prod_{\mathfrak{q}} \gamma(s, \phi, \mathfrak{q}, K/\Omega)$$

がしたがう。最後に

$$(15) \qquad \Gamma(s, \chi, K/k) = \prod_{\mathfrak{p}} \gamma(s, \chi, \mathfrak{p}, K/k)$$

（$\mathfrak{p}$　はすべての無限素点を動く）

とおけば、直ちに次の等式が導かれる：

$$(16) \quad \Gamma(s, \chi_1+\chi_2, K/k) = \Gamma(s, \chi_1, K/k)\,\Gamma(s, \chi_2, K/k),$$

$$(17) \qquad \Gamma(s, \chi, K'/k) = \Gamma(s, \chi, K/k),$$

$$(18) \qquad \Gamma(s, \chi_{\phi}, K/k) = \Gamma(s, \phi, K/\Omega).$$

関数　$\gamma(s, \chi, \mathfrak{p}, K/k)$　におけるガンマ関数の指数は、非負有理整数である

事を証明しよう。疑わしいのは　$\sigma\neq 1$　のときだけである。指標のある元における値は絶対値がたかだか　$\chi(1)$ であり、σ　は位数　2　であるから符号についての主張は成り立つ。$\dfrac{\chi(1)+\chi(\sigma)}{2}$ の分子は部分群の指標値の和であり、それゆえ群の位数で割り切れる。　他の指数は　$\chi(1)-\dfrac{\chi(1)+\chi(\sigma)}{2}$　の形に書かれる。

7。　我々はさらに各指標　χ　に次の数を対応付ける：

$$(19)\qquad A(\chi, K/k)=\frac{|d|^{\chi(1)}N_k(\mathfrak{f}(\chi,K/k))}{\pi^{n\chi(1)}}$$

ここで　n　は体　k　の次数、d　は　k　の判別式　そして　$\mathfrak{f}(\chi, K/k)$　は指標　χ　の導手である。

さて殆ど計算することなく、この数が次の等式を満たすことが示される[8)]：

$$(20)\qquad A(\chi_1+\chi_2, K/k)=A(\chi_1, K/k)\,A(\chi_2, K/k)\text{、}$$

$$(21)\qquad A(\chi, K'/k)=A(\chi, K/k)\text{，}$$

$$(22)\qquad A(\chi_\phi, K/k)=A(\phi, K/\Omega)\text{。}$$

最後に次の定義を与える：

$$(23)\qquad \xi(s,\chi,K/k)=\{A(\chi,K/k)\}^{s/2}\cdot$$

$$\cdot\,\Gamma(s,\chi,K/k)\,L(s,\chi,K/\mathrm{k})$$

あるいは詳しく書いて

$$(24)\qquad \xi(s,\chi,K/k)=\left(\frac{|d|^{\chi(1)}N_k(\mathfrak{f}(\chi,K/k))}{\pi^{n\chi(1)}}\right)^{s/2}\cdot$$

$$\prod_{\mathfrak{p}}\gamma(s,\chi,\mathfrak{p},K/k)\cdot L(s,\chi,K/k)\text{。}$$

---

8) 導手の必要な性質については　D　を見よ。

我々の関数に対して、既に得られた結果に基づき次の公式が成り立つ：

(25) $\xi(s, \chi_1+\chi_2, K/k)=\xi(s, \chi_1, K/k)\,\xi(s, \chi_2, K/k)$,

(26) $\xi(s, \chi, K'/k)=\xi(s, \chi, K/k)$,

(27) $\xi(s, \chi_{\phi}, K/k)=\xi(s, \phi, K/\Omega)$.

完全のため、導手の定義をも与えておこう：

(28) $\mathfrak{f}(\chi、K/k)=$

$$\frac{1}{\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{e}}\left(e\chi(1)-\chi(\mathfrak{T})+p^{R_1}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_1)+p^{R_2}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_2)+\cdots\cdot\right)$$

それは　k　からの整イデアルである。

4. 有理指標にたいする L－級数

8。（24）において χ を主指標にとり、（12）および

$$L(s,\chi_1,K/k)=\zeta_k(s)$$

であると言う事実を考えれば

$$\xi(s,\chi,K/k)=\left(\frac{|d|}{\pi^n}\right)^{s/2}\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{r_2}\cdot$$

$$\cdot\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1}\zeta_k(s)$$

$$=2^{r_2}\pi^{r_2/2}(2^{-r_2}\pi^{-n/2}\sqrt{|d|})^s\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1}(\Gamma(s))^{r_2}\zeta_k(s)$$

が得られる。

定数因子を除いて、右辺は s を $1-s$ で置き換えても不変な、ゼータ関数の理論で良く知られた式である。それゆえ

$$\xi(s,\chi_1,K/k)=\xi_k(s)$$

とおく。（27）により

$$\xi(s,\chi_{\phi_1},K/k)=\xi_\Omega(s)$$

である。（1）から等式

$$\frac{\xi_{\Omega^\rho}(s)}{\xi_k(s)}=\prod_{i=2}^{h'}(\xi(s,\Xi_i,K/k))^{R_i^\rho}$$

および

$$\frac{\zeta_{\Omega^\rho}(s)}{\zeta_k(s)}=\prod_{i=2}^{h'}(L(s,\Xi_i,K/k))^{R_i^\rho}$$

がしたがう。方程式（1）が可解である事は有理指標 Ξ_i にたいする L－級数のお

のおのが $\dfrac{\zeta_{\Omega}(s)}{\zeta_k(s)}$ の形の式のべきの積として表されることを保証する。同様のことは関数 $\xi(s, \Xi_i, K/k)$ にたいしても成り立つ。それゆえ

有理指標にたいする関数 $L(s, \Xi, K/k)$ および $\xi(s, \Xi, K/k)$ のおのおのは解析接続される。そして実際、これらの関数のあるべきは有理型である。また、関数等式

(29) $\xi(1-s, \Xi, K/k) = \varepsilon \cdot \xi(s, \Xi, K/k)$

が成り立つ。ここで ε は 1 のべき根である。

半平面 $\Re(s) \leqq 0$ には、(29)により、特異点は存在しない。最後に、Ξ_i が主指標でないならば 関数 $L(s, \Xi_i, K/k)$ は点 $s=1$ において正則で 0 と異なる。

関数 $L(s, \Xi_i, K/k)$ を援用すれば、素イデアルの分布の理論を群の Abteilung により統制することができる。このことの研究には、それは原理的には新しい何物をももたらさないから、我々は立ち入らない[9]。

基礎体として有理数体をとれば、公式

(30) $$\zeta_{\Omega}(s) = \prod_{i=1}^{h'} (L(s, \Xi_i, K/k))^{R_{i,\Omega}}$$

が得られる。それは実際、K の部分体のゼータ関数の間に成り立つすべての関係式の考えられる限りの単純なパラメータ表示である。即ち、関数 $L(s, \Xi_i, K/k)$ の間の関係式は存在しないことが証明される。

$$\prod_{i=1}^{h'} (L(s, \Xi_i, K/k))^{x_i} = 1$$

の形の関係式は、対数を考えれば、方程式

[9] 基本的な漸近的評価がすでに Frobenius,Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Berliner Berichte,1896, に与えられている。

$$\sum_{p,h} \sum_{i=1}^{h'} \frac{x_i \Xi_i (p^h)}{h \cdot p^{hs}} = 0$$

に導かれる。さてしかし、フロベニウスによれば各 Abteilung には、群の元 τ の各々に対して

$$\sum_{i=1}^{h'} x_i \Xi_i (\tau) = 0$$

が成り立つような素数 p が存在する。指標の一次独立性により $x_i = 0$ となる。公式 （３０）から $L(s)$ を消去すれば、ゼータ関数の間に存在しうるすべての関係式に導かれる。それが可能なかぎりの単純なパラメータ表示であることは、関数

$$L(s, \Xi_i, K/k)、$$

それゆえパラメータ自身、がまた再びゼータ関数により表され得るという事態から与えられる。したがってまた我々は、生ずる関係式の個数への洞察を得る。それを次のように言い表すことができる：

部分体の独立なゼータ関数の個数は関数 $L(s, \Xi_i, K/k)$ の個数、それゆえ部分体の群の Abteilung の個数に等しい。

ここでもう一度、はっきりと注意しよう：ここまで類体論はどこにも本質的には必要とされていない。実際、アーベル的指標にたいする L－級数が普通の L－関数と一致することの証明を、これまでの考察から言ってもはや必要としないであろうから、断念することができる。次の章でこの事実は確かに基本的な意味を持つであろう。解析数論の多くの目的にとってはしかし、有理指標に対する L－級数で十分である。したがって、このような目的のためには類体論を援用することは必ずしも必要ではない[10]。

[10] 確かに導手について、導手が基礎体 k のイデアルであることは、普通はそこで類体論を必要とするから、その証明を断念しなければならない。

5. 任意の指標

9。 有理指標にたいする L－級数はさらに単純指標に対する L－級数に分解される。これらの関数の解析接続が可能であることを証明し、関数等式を設定しようとするならば類体論、そして実際一般相互法則を用いなければならないであろう。すなわち、アーベル体の L－級数は通常の L－級数と一致することを証明しなければならない。この証明は既に得られている。そしてそこでは実際、類体論が用いられている。

更に、アーベル的な場合に関数 $\xi(s, \chi, K/k)$ もまた関数等式の理論において良く知られた関数と一致することも証明されるであろう。そこで、K/k をアーベル的とし χ を生成単純指標とする。そのとき、

$$
\gamma(s, \chi, \mathfrak{p}) = \begin{cases} \Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right) & \mathfrak{p}\text{：虚、} \\ \Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right) & \mathfrak{p}\text{、}\mathfrak{P}\text{：共に実、} \\ \Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right) & \mathfrak{p}\text{：実、}\mathfrak{P}\text{：虚} \end{cases}
$$

である。L－級数の関数等式と比較すれば、$\Gamma(s, \chi, K/k)$ がちょうど我々に必要な ガンマー因子であることがわかる。数 $A(\chi, K/k)$ に関しては

$$
A(\chi, K/k) = \frac{|d|\, N_k(\mathfrak{f}(\chi, K/k))}{\pi^n}
$$

である。D. によりイデアル $\mathfrak{f}(\chi、K/k)$ は実際普通の意味での指標の導手であるから、我々の関数 $\xi(s, \chi, K/k)$ は関数等式

$$
\xi(1-s, \chi, K/k) = \xi(s, \overline{\chi}, K/k) \cdot W(\chi)
$$

を満たす。ここで $W(\chi)$ は絶対値が 1 の数で、$\overline{\chi}$ は χ の複素共役である。

今や我々は、1。の終わりに与えた定理を引用し、それを援用して有理指標の場合と全く同様に、一般に $L(s, \chi, K/k)$ および $\xi(s, \chi, K/k)$ は対応するアーベル的関数により表現されることを証明する。そして、一般な関数 $L(s, \chi, K/k)$ にたいして、有理指標に対する関数と全く同じ定理を証明する。そうして、関数等式のみを

とくに記すことにしよう：すなわち、

$$\xi(1-s, \chi, K/k) = \xi(s, \overline{\chi}, K/k) \cdot W(\chi).$$

ここで　$W(\chi)$ は絶対値が　1　の数で、$\overline{\chi}$　は　χ　の複素共役である。

関数等式を他のかたちに述べることができるが、それは（３１）から容易に導かれる：

$$L(1-s, \chi) = W(\chi) \left(\frac{2}{(2\pi)^s}\right)^{n\chi(1)} (d^{\chi(1)} \mathrm{N}\mathfrak{f}(\chi, K/k))^{s-(1/2)}$$

（３２）

$$\cdot \left(\cos\frac{s\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}\chi(1)+\sum_{\nu=1}^{r_1}\frac{1}{2}\chi(\sigma_\nu)}$$

$$\cdot \left(\sin\frac{s\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}\chi(1)-\sum_{\nu=1}^{r_1}\frac{1}{2}\chi(\sigma_\nu)}$$

$$\cdot (\Gamma(s))^{n\chi(1)} L(s, \overline{\chi}).$$

半平面　$\Re(s) \leqq 0$　における　０点　については、関数　$L(s, \chi, K/k)$ は（χ　が主指標でないとき）次のような　０点をもつ：

$s=\ 0, -2, -4, \cdots$ において　位数　$\frac{n}{2}\chi(1)+\sum_{\nu=1}^{r_1}\frac{1}{2}\chi(\sigma_\nu)$ の　０点

$s=-1, -3, -5, \cdots$ において　位数　$\frac{n}{2}\chi(1)-\sum_{\nu=1}^{r_1}\frac{1}{2}\chi(\sigma_\nu)$ の　０点

L－級数のその他の応用については、引用された論文を参照せよ。

量指標に対する　L－級数にも自然に全理論は移される。それを実行することには本質的な難点は存在しない。したがってこの点に詳しく立ち入ることは省略しよう。

Hamburg,Oktober,1930.

Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes

(一般相互法則の証明)

Emil Artin

(Abhandlungen der Mathematischen Seminar im Hamburg,1930,pp.353-363
=Collected Works pp.131-141)

私の論文[1)]" Über eine neue Art von L-Reihen" (新しい種類の Lー級数 について) において、私は一般相互法則を定式化し、特別な場合にその証明を与えた。このとらえかたには、特別な場合として (任意の m にたいする) mー乗剰余の相互法則が含まれている。一方、この特別な場合からさしたる困難無く一般相互法則に再び立ち戻ることが出来る。そこで与えられた定式化は (基礎体の1のべき根について何も仮定する必要はないと言うことを除いて) まさに数論的な研究にふさわしい形であると私には思われる。

さてそれに対して一般的になり立つ証明を与えよう。証明の基本的思想の一つ、円分拡大を用いること、について私はチェボターレフ[2)]の重要な論文に感謝する。予備知識としてイデアル論における普通の定理群、イデアル類における素イデアルの存在定理、および相対アーベル体に関する高木理論[3)]の結果が仮定される。それに反して、既に存在している相互法則は必要とされない。またアイゼンスタインの相互法則も必要ではない。さらに上述の Lー級数を扱った論文についての知識も仮定されない。

最後の部分でなお、一般相互法則から mー乗剰余にたいする相互法則が従うことが示される。そこでは一つの把握形式としてその法則が直ちに得られることになる。そこからフルトヴェングラー[4)]の良く知られた簡単な方法の助けを借りて、ほんの何行かで通常の定式化が導かれるのである。

なお、Lー級数に関する私の論文の結果は、その論文で定理2と呼ばれた主張がここで証明されるのであるから、いまやすべて保証されることも、指摘させていただきたい。

[1)] この雑誌 Abhandlung Hamburg 第3巻、p.89 を見よ。

[2)] N.Tschebotareff,Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören.Math.Ann. 95 (1925), p.191 また O.Schreier,Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff.Abh.Hamburg,Bd.V ,p.1, を見よ。

[3)] T.Takagi,Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers. Journal of the College of Science,Tokyo 1920.

[4)] Ph.Furtwängler,Die Reziprozitätsgesettze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern,Math.Ann.67(1909)、とくに p.27、また Furtwängler, Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten、Bd.157 (1927),p.15. を見よ。

1。

後で与える我々の証明を中断しないために、我々本来の主題に先駆けて、ある種の素数の存在に関する簡単な補助定理を与えておこう。

<u>補助定理</u>　1：fを与えられた自然数、p_1、p_2 を与えられた二つの素数——それらは等しくても良い——とする。そのとき、無限に多くの素数 q が存在して、有理数体 R における mod q の既約剰余類群 $\mathfrak{R}$ は次の性質を持つ：$\mathfrak{R}$ の部分群 $\mathfrak{R}_0$ が存在して p_1, p_2 は商群 $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0$ の同じ傍系 $\mathfrak{R}_1$ に属し、かつこの傍系 $\mathfrak{R}_1$ は位数 f を持つ。

証明：1。$f=1$ にたいしては、q として p_1、p_2 と異なる任意の素数を取ることが出来る。$\mathfrak{R}_0=\mathfrak{R}$ ととれ。

2。$f>1$ にたいして q は次のように詳しく定められる：一般に、$\mathfrak{R}_0$ は f 乗剰余の部分群であるとする。しかし f が偶数で p_1、p_2 のうちの一つが f の約数のときには $\mathfrak{R}_0$ を $2f$ー乗剰余の部分群とする。以下、″または″という言葉はこの例外の場合を指す。

ζ を 1 の原始的 f 乗根、または $2f$ 乗根とする。$k_0=R(\zeta)$ とし、

$k_1=k_0(\sqrt[f]{p_1/p_2})$ または $k_1=k_0(\sqrt[2f]{p_1/p_2})$ とおく。d を f の素因子とすれば、$\sqrt[d]{p_1}$ は $p_1=(p_1/p_2)^{\nu}\cdot\lambda_0^d$ ——λ_0 は k_1 からの数——であるときにかぎり k_1 に含まれる。[5] それゆえ数 $\sqrt[d]{\dfrac{p_2^{\nu}}{p_1^{\nu-1}}}$ は k_0 にふくまれなければならない。それを R に添加すれば、k_0 はアーベル体であるから、ガロア体を生じなければならない。それは $d=2$ のときのみ可能、また p_1 または p_2 が f の約数であるときのみ可能である。この例外の場合においてはしかし実際、数 $\sqrt{p_1}$ または $\sqrt{p_2}$ は k_0 に属する。それは、その場合 $i=\sqrt{-1}$ が k_0 に属するからである。したがってそのとき、$\sqrt{p_1}$ は実際 k_1 に属する。しかしこの例外の場合には、すくなくとも $\sqrt[4]{p_1}$ は k_1 に属さない。そのことは厳密に確認される。したがって，何れの場合にも $k_2=k_1(\sqrt[f]{p_1})$ または $k_2=$

[5] $\sqrt[d]{p_1}$ を k_0 に添加したものは k_1 の部分体を生成しなければならない。指数 ν は事情によっては分数かもしれない。

$k_1(\sqrt[2f]{p_1})$ は k_1 の相対 f 次の巡回拡大である。かかるものとしてそれは、位数 f の巡回群をなす k_1 におけるあるイデアル類別にたいする類体である。$\mathfrak{K}$ がこの群の生成類ならば $\mathfrak{K}$ の素イデアルは k_2 で分解しない。$\mathfrak{K}$ のなかには R に関して 1 次である無限に多くの素イデアルが含まれる。$\mathfrak{q}$ をそのような素イデアルの一つとし、さらにそれは p_1、p_2、f に素とする。$\mathfrak{q}$ が割る有理素数を q とする。この q が望まれた性質を持つことを示そう。

$\mathfrak{q}$ は一次の素イデアルであるから k_1 の各数は、したがってとくに

$$\sqrt[f]{p_1/p_2} \quad \text{または} \quad \sqrt[2f]{p_1/p_2}$$

は mod $\mathfrak{q}$ で有理数に合同である。たとえば

$$x \equiv \sqrt[f]{p_1/p_2} \pmod{\mathfrak{q}} \quad \text{または} \quad x \equiv \sqrt[2f]{p_1/p_2} \pmod{\mathfrak{q}}$$

とする。これから

$$x^f \equiv p_1/p_2 \pmod{\mathfrak{q}} \quad \text{または} \quad x^{2f} \equiv p_1/p_2 \pmod{\mathfrak{q}}$$

がしたがう。これらの合同式は、有理数が対象であるから、mod q でなり立たなければならない。よって p_1/p_2 は部分群 $\mathfrak{R}_0$ に属すること、それゆえ p_1 および p_2 は同じ傍系 $\mathfrak{R}_1$ に属することが証明された。一般には p_1^f は $\mathfrak{R}_0$ に含まれる。例外の場合には、$\sqrt{p_1}$ は k_1 に属する。それゆえ有理数 y が存在し $y \equiv \sqrt{p_1}$ (mod $\mathfrak{q}$ がなり立つ。これから $y^{2f} \equiv p_1^f$ (mod q) がしたがう。すなわち p_1^f は $2f$ 乗剰余であり、よって傍系 $\mathfrak{R}_1$ はたかだか位数 f を持つ。その位数が丁度 f であることを示すためには f のどの約数 d にたいしても数 p_1^d は f 乗または $2f$ 乗剰余であることを証明しなければならない。たとえば、$f=df_1$ とする。

$\mathfrak{q}$ は k_2 において分解しない。したがってまた中間体 $k' = k_1(\sqrt[f_1]{p_1})$ または $k' = k_1(\sqrt[f_1]{\sqrt{p_1}})$ においても分解しない。それゆえ p_1 または $\sqrt{p_1}$ は体 k_1 において mod $\mathfrak{q}$ に関して f_1 乗剰余ではない。さて $p_1^d \equiv x^f$ (mod $\mathfrak{q}$) または $p_1^d \equiv x^{2f}$ (mod q) としよう。そうすれば k_1 において

$$(p_1 - x^{f_1})(p_1 - (\zeta x)^{f_1}) \cdots (p_1 - (\zeta^{d-1} x)^{f_1}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$$

または

$$(\sqrt{p_1} - x^{f_1})(\sqrt{p_1} - (\zeta x)^{f_1}) \cdots (\sqrt{p_1} - (\zeta^{2d-1} x)^{f_1}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$$

がしたがう。よって因数のうちの一つは $\equiv 0$ でなければならず、p_1 または $\sqrt{p_1}$

は mod q に関して f_1 乗剰余となるであろう。これで我々の補助定理は証明された。

2。

さて一般的な研究から始めよう：

k を任意の代数的数体とし、それを″基礎体″にとる。K をガロア群 $\mathfrak{G}$ をもつ k の相対アーベル拡大体とする。

$\mathfrak{p}$ を k からの素イデアルで K/k の相対判別式を割らないとする。また $\mathfrak{P}$ を K における $\mathfrak{p}$ の素因子とする。そのとき次のような $\mathfrak{G}$ からのちょうど一つの置換 σ が存在する：[6] K からのすべての整数 A にたいして

$$(1) \qquad A^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma(A) \pmod{\mathfrak{P}}。$$

ここで $N\mathfrak{p}$ は以下でも同様であるが、R に関する k における ノルム を意味する。素因子 $\mathfrak{P}$ をその共役 $\tau(\mathfrak{P})$ で置き換えれば σ は $\tau\sigma\tau^{-1}$ にかわる。しかし $\mathfrak{G}$ はアーベル群であるから（1）はまた $\mathfrak{p}$ のすべての共役素因子にたいして成り立つ。これより、K からのすべての整数 A にたいしてさらに

$$(2) \qquad A^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma(A) \pmod{\mathfrak{p}}$$

が成り立つことが結論される。

置換 σ と素イデアル $\mathfrak{p}$ は互いに対応づけられる。良く知られたように、σ は $\mathfrak{p}$ の分解群の生成置換である。しかし逆に、そのことによって σ は特徴づけられない。それは分解群の生成元としてはなお σ のべきが用いられるからである。この事実から次のことを読みとる：σ の位数を f とすれば、$\mathfrak{p}$ は K において f 次の素イデアルだけの積にいっぱいに分解する。とくに、K において相対一次の素イデアルに完全分解する $\mathfrak{p}$ にたいしてのみ $\sigma=1$ である。

さて $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{G}$ の部分群、K_0 を $\mathfrak{g}$ に属する K の部分体とする。K_0/k の群は商群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ である。さて $\mathfrak{p}$ が K において置換 σ に属するならば、

---

[6] たとえば Weber, Algebra II, 第2版, §178 を見よ。また Frobenius: Über Beziehungen zwischen Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe. Sitzungsberichte Berlin 1896. を見よ。

(2) はとくに K_0 からのすべての数 A_0 にたいしてなり立つ。しかしそのような数は $\mathfrak{g}$ からの置換にたいして不変であるから $\sigma\mathfrak{g}$ の任意の置換は σ のかわりとなりうる。これで $\mathfrak{p}$ が K_0 において傍系 $\sigma\mathfrak{g}$ に属することが示された。とくに、$\mathfrak{p}$ が K_0 において相対一次の素イデアルに完全分解するのは、$\mathfrak{p}$ が K_0 において商群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ の単位元に属するとき、すなわち σ が $\mathfrak{g}$ からの置換であるときに限る。

さらに K' を (k に関し) K と素な、k の相対アーベル拡大とし、その群を $\mathfrak{G}'$ とする。$\mathfrak{G}'$ の置換は σ'、$\cdots\cdots$ と書かれる。$\mathfrak{G}$ の置換 σ にもともとの意味のほかに、K' のすべての数を固定すると言う条件を、一方 $\mathfrak{G}'$ の置換 σ' は K からの数を固定するという条件を与えれば、合成体 KK' のガロア群は良く知られたように二つの群の直積 $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ である。さて $\mathfrak{p}$ が KK' において置換 $\sigma\sigma'$ に属するならば (2) は $\sigma\sigma'$ および KK' のすべての数にたいして成り立つ。とくにこれを K の数に作用させ、σ' がこの数を不変にすることに注意すれば、$\mathfrak{p}$ は K において σ に、同様に K' において σ' に属することがわかる。それゆえ、$\mathfrak{p}$ は K において σ に、K' において σ' に属するならば $\mathfrak{p}$ は KK' において $\sigma\sigma'$ に属し、逆もまたなり立つ、と言うことが出来る。

この定理はまず特別な体に応用される。ζ を 1 の原始 m 乗根とする；$K=k(\zeta)$ とおく。$\mathfrak{p}$ が K において置換 σ に属し $\mathfrak{p}$ が m に素ならば (2) は K からのすべての数に対して成り立つ。とくに $A=\zeta$ にたいして成り立つ。それゆえ

$$\zeta^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma(\zeta) \pmod{\mathfrak{p}}$$

である。しかしこれから $\sigma(\zeta)=\zeta^{N\mathfrak{p}}$ がしたがう。ζ は体 K を生成するから $\sigma=(\zeta\to\zeta^{N\mathfrak{p}})$ により置換 σ は完全に記述される。ここで $\to$ は〝…に移す〟ことを意味する記号である。相対アーベル体として K は k からのイデアルの適当な類別にたいする類体である。主類には K において相対一次の素イデアルに分解するすべての素イデアルが属している。ゆえにそれにたいしては $\sigma=1$ である。したがってそれは k からの素イデアル $\mathfrak{p}$ で $N\mathfrak{p}\equiv 1 \pmod{m}$ をみたすものである。それゆえ主類には k からのイデアル $\mathfrak{a}$ で、$\mathfrak{a}$ は m に素でありかつ $N\mathfrak{a}\equiv 1 \pmod{m}$ を満たすものがすべて含まれる。それは、イデアル類にはそのノルム

が mod m に関して互いに合同となる k からのイデアルが常に含まれることをわれわれに示している。

こうして $\sigma=(\zeta\to\zeta^{N\mathfrak{p}})$ は $\mathfrak{p}$ が属するイデアル類にのみ依存する事が示された。したがって、ひとつのイデアル類には丁度ひとつの置換が対応し、逆もまた成り立つ。$\mathfrak{a}$ がイデアルならば $\mathfrak{a}$ の類は丁度置換 $\sigma=(\zeta\to\zeta^{N\mathfrak{p}})$ に対応付けられる。これからさらに二つの類の積には対応する置換の積が対応付けられることも分かる。

さて K の部分体 K_0 に移ろう。それは k からのイデアルのある類別に対する類体である。その類別は古いイデアル類にたいする群の、ある部分群 $\mathfrak{H}$ による商群を構成することにより得られる。$\mathfrak{H}$ からの素イデアルそしてそれのみが K_0 において相対一次の素イデアルに完全分解する。$\mathfrak{H}$ の類に対応する置換は $\mathfrak{H}$ と同形な群 $\overline{\mathfrak{H}}$ を作る。したがって $\overline{\mathfrak{H}}$ は、ちょうど K/k のガロア群の K_0 に属する部分群である。K_0/k の群は $\overline{\mathfrak{H}}$ の傍系から成り立っている。K_0 における素イデアルには属する傍系が対応づけられるから、ここでふたたび k における新しいイデアル類と K_0/k のガロア群の置換との間の一対一対応が生ずること、そして二つの類の積には置換の積が対応することがわかる。

k のこの特別な拡大体 K_0 を相対円分体と名付ける。そのガロア群は、素イデアルと置換との対応を通して、k からのイデアル類の群――それに関して体 K_0 は類体である――に関係付けられる。この類別は k のイデアルノルムの、有理数体 R における適当な mod m に関する類別ということになる。類と置換の間の対応は同形であるから、さらに素イデアル $\mathfrak{p}$ に対応する置換は $\mathfrak{p}$ が属する類に対応する置換であるから、相対円分体に関しては――しかし当然そのような体に関してだけ――イデアル類と置換とは同じ文字で示されるであろう。ゆえにそのとき、$\mathfrak{p}$ は類 σ に属する、あるいは $\mathfrak{p}$ は 置換 σ に対応する、というとき、それらは同じ意味である。

さて K をふたたび k の任意の相対アーベル拡大体、$\mathfrak{G}$ を K/k のガロア群とする。K は k のあるイデアル類別にたいする類体である。その類を簡単に K に応ずるイデアル類という。われわれは、K に応ずる同じ一つの類に属するすべての素イデアルには同じ一つの置換 σ が対応付けられることを示そう。まず次の補助定理を証明する。

<u>補助定理</u> 2：$\mathfrak{p}_1$ および $\mathfrak{p}_2$ を K に応ずる同じ類の素イデアルとする。素イデアル $\mathfrak{p}_1$ には位数 f の置換 σ が対応しているとする。さらに K に素な相対円分体 K' が存在し、K' に応ずる k のイデアル類は $\mathfrak{p}_1$ および $\mathfrak{p}_2$ に因子無縁な有理整数 m を法として次のように定義される：$\mathfrak{p}_1$ および $\mathfrak{p}_2$ は K' に応ずる同じ類 σ' に属し、σ' は位数 f をもつとする。そのとき、素イデアル $\mathfrak{p}_2$ には置換 σ が対応付けられる。

<u>証明</u>：合成体 KK' をつくる。それは k におけるイデアル類別にたいする類体であり、その主類は K に応ずる類別にたいする主類と K' に応ずるそれとの共通部分である。$\mathfrak{p}_1$ および $\mathfrak{p}_2$ は K に応ずる同じ類に属すると同じく、K' に応ずる同じ類に属するから、それはまた KK' に応ずる同じ類にも属する。KK の部分体 K_0 に移れば、K_0 に応ずる類別は商群構成を通して得られる。それゆえ、まずたしかに $\mathfrak{p}_1$ および $\mathfrak{p}_2$ は K_0 に応ずる同じイデアル類に属する。しかし k の素イデアルの K_0 における分解法則は、その素イデアルが属する K_0 に応ずるイデアル類にのみ依存する。 ゆえに $\mathfrak{p}_1$ が K_0 において一次の素イデアルに完全分解しなければならないのならば、$\mathfrak{p}_2$ についてもそうである。

さて K_0 を KK' の部分体で、$\sigma\sigma'$ により生成される $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ の巡回部分群 $\mathfrak{g}$ に属するとする。それゆえ $\mathfrak{g}$ は置換 $(\sigma\sigma')^{\nu}=\sigma^{\nu}\cdot\sigma'^{\nu}$ から成り立っている。さて $\mathfrak{p}_1$ は K において σ に属し、K' において σ' に属する。よって、KK' において $\sigma\sigma'$ に属する。$\sigma\sigma'$ は $\mathfrak{g}$ に属するから、したがって、$\mathfrak{p}_1$ は K_0 において相対一次の素イデアルに完全分解する。それとともに $\mathfrak{p}_2$ は K_0 において相対一次の素イデアルに完全分解する。ゆえに KK' において $\mathfrak{g}$ の置換、たとえば $\sigma^{\nu}\sigma'^{\nu}$ に属する。それゆえ $\mathfrak{p}_2$ は K' において置換 σ'^{ν}

に属する。しかし、仮定より、$\mathfrak{p}_2$ は K' において σ' に属する。f は σ' の位数であるから、それゆえ、$\nu\equiv 1 \pmod{f}$ でなければならない。しかし f はまた σ の位数であるから、$\mathfrak{p}_2$ は KK' において $\sigma\sigma'$ に属し、したがって K において σ に属する。これで我々の証明はおわる。

この定理の応用に際しては相対円分体を必要としない。k の R におけるイデアルノルムを $N\mathfrak{p}_1$, $N\mathfrak{p}_2$ が位数 f の同じ類に属するように適当な法 m に関して類別することができれば（絶対円分体を適当に選ぶことにより）必要な相対円分体の存在は保証される。

さて、$\mathfrak{p}_1$ 、$\mathfrak{p}_2$ を絶対一次の k のふたつの素イデアルとし、$N\mathfrak{p}_1=p_1$, $N\mathfrak{p}_2=p_2$ とおけば、補助定理 1 より直ちに望まれた類別が存在することがわかる；法 m としてはさらに素数をとることが出来る。K に応ずる同じイデアル類に属する絶対一次のすべての素イデアルはそれゆえ同じ置換に対応付けられる。

$\mathfrak{p}$ が K に応ずるある類 $\mathfrak{K}$ に属する絶対 a 次の素イデアルならば、$N\mathfrak{p}=p^a$、p は素数、とおくとき、補助定理 1 は $p_1=p_2=p$ とし、f のかわりに af（ここで f は素イデアル $\mathfrak{p}$ に対応する置換 σ の位数である）とおいて応用される。そのとき素数 p は対応して生ずる有理数の類別に関する位数 af の類に属し、したがって $N\mathfrak{p}$ は位数 f の類に属する。これで k において類別が確定された。$\mathfrak{p}$ がこの新しい類別に関したとえば $\mathfrak{K}'$ に属するならば、$\mathfrak{K}'$ は位数 f をもつ。ちょうど $\mathfrak{p}$ が属している $\mathfrak{K}$、$\mathfrak{K}'$ の共通部分は再び k にたいするある定まった類別に関するイデアル類である。したがってこの共通部分に絶対一次の素イデアル $\mathfrak{p}'$ が属する。そのとき $\mathfrak{p}$ および $\mathfrak{p}'$ は $\mathfrak{K}$ にも $\mathfrak{K}'$ にも属する。よって $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}'$ と同じ置換、すなわち、$\mathfrak{K}$ からのすべての絶対一次の素イデアルと同じ置換、に属する。

K' が K と素であると言う条件は常に念頭に置かれている。それはそのとき、無限に多くの素数の法 q を自由に扱うことが出来るからである。

さて、K に応ずる同じ類に属するすべてのイデアルは同じ置換に対応付けられることを証明しよう。そうすれば、K に応ずる各イデアル類には K/k のガロア群のちょうど一つの置換 σ が対応付けられる。さらに、二つの類の積には対応する二つの置換の積が対応付けられること、そして実際、異なる類は異なる置換に対応することが示めされるであろう。

$\mathfrak{K}_1$、$\mathfrak{K}_2$ を K に応ずる k の二つのイデアル類とし、それらはそれぞれ置換 σ_1、σ_2 に対応付けられるとする。σ_1、σ_2 の位数をそれぞれ f_1，f_2 とする。算術数列 $q_1 \equiv 1 \pmod{f_1}$，$q_2 \equiv 1 \pmod{f_2}$ にはそれぞれ無限に多くの素数が存在するから、$m = q_1 q_2$ を、R 上の 1 の m−乗根の体 $\mathfrak{C}$ と K との共通部分がちょうど R であるように定めることが出来る。$\mathfrak{C}$ を K に添加すれば k に関して K と素な円分体 K' で k に関する相対次数が

$$\varphi(m) = (q_1 - 1) \cdot (q_2 - 1)$$

であるものが生ずる。それは二つの独立な、位数がそれぞれ $q_1 - 1$，$q_2 - 1$ である基底類 σ_1'、σ_2' から得られるイデアル類別に応ずる類体である。K は K' と素（k に関して）であるから、合成体 KK' は次のような類別にたいする類体である：K に応ずる各類は KK' に応ずる $\varphi(m)$ 個の新しい類に分解する。したがって、K に応ずる各類は K' に応ずる各類と空でない共通部分を持つ。

$\mathfrak{p}_1$ を $\mathfrak{K}_1$ と σ_1' の共通部分に属する素イデアル、$\mathfrak{p}_2$ を $\mathfrak{K}_2$ と σ_2' の共通部分に属する素イデアル、$\mathfrak{p}_3$ を $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ と $\sigma_1'\sigma_2'$ の共通部分に属する素イデアルとする。$(\sigma_1\sigma_1')^{\nu}(\sigma_2\sigma_2')^{\mu}$ の形のすべての置換のなす部分群 $\mathfrak{g}$ に属する KK' の部分体 K_0 を考える。$\mathfrak{p}_1$ および $\mathfrak{p}_2$ は KK' においてそれぞれ $\sigma_1\sigma_1'$ および $\sigma_2\sigma_2'$ に属するから、それらは K_0 において相対一次の素イデアルに完全分解する。それゆえ $\mathfrak{p}_1$ および $\mathfrak{p}_2$ は、したがってまた $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ は K_0 に応ずる k の類別の主類に属する。さて $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ は $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ と $\sigma_1'\sigma_2'$ の共通部分からのイデアルである。K_0 に応ずる主類はそれゆえ $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ と $\sigma_1'\sigma_2'$ の共通部分のイデアルを含む、したがって共通部分全体を含む。ゆえに $\mathfrak{p}_3$ はこの主類に属し、K_0 において相対一次の素イデアルに完全分解する。それゆえ素イデアル $\mathfrak{p}_3$ は KK' において群 $\mathfrak{g}$ の置換 、たとえば

$$(\sigma_1\sigma_1')^{\nu} \cdot (\sigma_2\sigma_2')^{\mu} = (\sigma_1^{\nu}\sigma_2^{\mu}) \cdot (\sigma_1'^{\nu}\sigma_2'^{\mu})$$

に属する。したがって、$\mathfrak{p}_3$ は K' において $\sigma_1'^{\nu}\sigma_2'^{\mu}$ に属する。しかしつくりかたより $\mathfrak{p}_3$ は K' において $\sigma_1'\sigma_2'$ に属する。よって

$$\nu \equiv 1 \pmod{(q_1 - 1)}, \qquad \mu \equiv 1 \pmod{(q_2 - 1)}$$

がなり立たなければならない。K において、$\mathfrak{p}_3$ は $\sigma_1{}^{\nu}\sigma_2{}^{\mu}$ に属する；さてしかし、q_1-1，q_2-1 はそれぞれ f_1、f_2 により割り切れる；ゆえに

$$\sigma_1{}^{\nu}\sigma_2{}^{\mu} = \sigma_1\sigma_2$$

である。それゆえ、素イデアル $\mathfrak{p}_3$、したがって類 $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ 全体は $\sigma_1\sigma_2$ に属する。すなわち、二つの類の積には対応する置換の積が対応付けられる。

k に応ずるイデアル類群と K/k のガロア群との間の我々の対応はとにかく準同形である。ゆえに両方の群の単位元が互いに一対一に対応することが示されるならば、われわれの対応は更に同形となる。すなわち、異なる類は異なる置換に対応する。しかしそれは明らかである；何故ならば K に応ずる主類の素イデアル、そしてそれのみが K において相対一次の素イデアルに完全分解し、したがって置換 $\sigma=1$ に対応付けられるからである。

我々の得た結果をまとめて次の定理を得る：

一般相互法則：k の素イデアルを（2）により K/k のガロア群のただ一つの置換 σ に対応付け、k におけるイデアル類別は、それにたいして K が類体となるようなものとすれば、同じ類に属するすべての素イデアルは同じ置換に対応付けられる。そうして得られたイデアル類と置換との対応は一対一である。イデアル類群はそれによって K/k の置換群に同形に移される：すなわち二つの類の積には置換の積が対応付けられる。

5。

なお m－乗剰余の相互法則の証明に一般相互法則を応用しよう。ここで m は任意の自然数（素数である必要はない）である。

k は 1 の m－乗根を含むとする。μ を k からの数とするとき、$K=k(\sqrt[m]{\mu})$ とおく。$\mathfrak{p}$ が相対判別式および μ に素な、（2）の意味で置換 σ に対応する素イデアルならば、（2）はとくに数 $A=\sqrt[m]{\mu}$ にたいしてなり立つ。そのとき $\sigma(\sqrt[m]{\mu})=\zeta^{\nu}\cdot\sqrt[m]{\mu}$ である。ここで ζ^{ν} はある適当な 1 の m

一乗根である。（2）から、$\sqrt[m]{\mu}$ で割って

$$\mu^{\frac{Np-1}{m}} \equiv \zeta^{\nu} \pmod{p}$$

がしたがう。これはちょうど m一乗剰余記号 $\left(\dfrac{\mu}{p}\right)$ の定義合同式である。したがって $\sigma = \left(\sqrt[m]{\mu} \rightarrow \left(\dfrac{\mu}{p}\right)\sqrt[m]{\mu}\right)$ である。一般相互法則により $\left(\dfrac{\mu}{p}\right)$ は p が属する、K に応ずるイデアル類にのみ依存することがわかる。イデアル類の積には対応する置換の積が対応するから、ヤコービ記号 $\left(\dfrac{\mu}{\alpha}\right)$ もまた α が属する、K に応ずるイデアル類にのみ依存する。これで次が示された：

m一乗剰余記号の相互法則（第一形）：記号 $\left(\dfrac{\mu}{\alpha}\right)$ は $k(\sqrt[m]{\mu})$ が類体となるような類別に応ずる、α のイデアル類にのみ依存する。

m が素数の場合に対して、すでに 高木[7] はこれを相互法則のもっとも重要な主張として認識していた。フルトヴェングラーは m が素数または素数の平方である場合に対して、証明された定理からほんの二、三行で普通の定式化に到達することを可能ならしめる一つの方法を開発していた。[8] わたしは、これを任意の指数 m に移すことをハッセから教えて頂いた。なお、この方法を簡単に報告することが許されよう。それは、まずその方法によって一般相互法則の意味に光が当てられたからである。

k からの総正な数 α は $k(\sqrt[m]{\alpha})$ の相対判別式が m に素なとき、m にたいして本源的（primär）といわれる。m にたいして本源的な k からの数 α はまた k の拡大体においてもそうである事は明らかである。k からの数 α は、α が本源的で、かつ α が k においてあるイデアルの m一乗であるとき、特異本源的で

---

[7] T.Takagi:Über das Reziprozitätsgesetz in beliebigen algebraischen Zahlkörpern Journal of the College of Science,Tokyo 1922,p.2.
[8] 脚注 [4] で引用した論文を見よ。

ある（singulär primär）といわれる。そのときクンマー体についての良く知られた定理からわかるように体 $k(\sqrt[m]{\alpha})$ は k 上不分岐である。したがって、α は総正であるから、$k(\sqrt[m]{\alpha})$ にたいする類別は絶対イデアル類群から商群構成により得られることになる。ゆえに $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が同値な（絶対の意味で）イデアルならば、それらはまず、$k(\sqrt[m]{\alpha})$ に応ずる同じイデアル類に属し、したがって

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$$

である。

あと簡単な二つの補助定理のみが必要である：

補助定理 3：K を k の拡大、α を k からの数、$\mathfrak{A}$ を K からのイデアル、さらに $\mathfrak{N}$ を相対ノルムの記号とし、記号 $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}\right)_K$ の添え字 K は K において考えることを意味するとする。一方、添え字なしの $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$ は今までのように k のなかで考えることを意味する。そのとき

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{N}\mathfrak{A}}\right)$$

がなり立つ。

証明は、m が素数の場合のそれを一語一語たどればよい。$\mathfrak{A}$ が素イデアルのときは（その場合で十分である）記号の定義から容易に得られる。

補助定理 4：α を k からの数、$\mathfrak{p}$ を α の素因子とし、α は $\mathfrak{p}^n$ できっかり割り切れるとする。そのとき、$\mathfrak{p}^n$ は体 $k(\sqrt[m]{\alpha})$ においてイデアルの m 乗である。

証明： $\mathfrak{A} = (\mathfrak{p}^n, \sqrt[m]{\alpha})$ とおく。そのとき、$\mathfrak{A}^m = (\mathfrak{p}^{nm}, \alpha)$ であり、したがって $\mathfrak{A}^m = \mathfrak{p}^n$ である。

さて、次の定理を証明しよう：

m−乗剰余の相互法則（第二形）：α および β が二つの互いに素な、かつ m に素な数とし、それらのうちの一つは m にたいして本源的であるとする。そのとき

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

がなり立つ。

証明：補助の体として $K=k\,(\sqrt[m]{\alpha/\beta})$ をとり、簡単のため $\Delta=\sqrt[m]{\alpha/\beta}$ とおく。たとえば α は k において本源的とする。α と β は互いに素であるから補助定理 4 から、α および β が K においてイデアルの m 乗であることがわかる：$\alpha=\mathfrak{A}^m$、$\beta=\mathfrak{B}^m$ 。さらに $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}=\Delta$、$\alpha=\beta\cdot\Delta^m$ がなり立つ。したがって α は K において特異本源的であり、β もまたそうである。さて、$\mathfrak{C}$ が $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ に同値な、そしてこれらのイデアルおよび m に素なイデアルならば

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}\right)_K = \left(\frac{\beta\cdot\Delta^m}{\mathfrak{C}}\right)_K = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{C}}\right)_K = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)_K$$

がなり立つ。

r が K/k の相対次数ならば、$\mathfrak{N}(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}^r$、$\mathfrak{N}(\mathfrak{B})=\mathfrak{B}^r$ であるから補助定理 3 より

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}^r}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}^r}\right)$$

が得られる。

r は m の約数であるから、$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}^m}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}^m}\right)$ がなりたつが、それは今主張している関係式である。

同じように補充法則が得られる。ハッセがしらせてくれたが、われわれの把握の仕方からヒルベルトの相互法則の定式を得ることにも彼は成功した。

Hamburg, Mathematisches Seminar, Juli, 1927.

代数的数体の判別式の群論的構造

(Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper)

Emil Artin

(Journal für die reine und angewandte Mathematik (=Crelle Journal) vol.146 1931,p.p.1-15 =Collected Works p.p.180-194)

相対アーベル体の相対判別式と類体論の導手との間には密接な関係が存在する。すべての中間体の相対判別式についての知識は、これらの体の導手についての知識をもたらし、その逆も然かりである。この関係は導手ー判別式ー公式により媒介される。その公式の証明は　Lー級数の関数等式の助けを借りて解析的に導かれるか、ハッセ氏が簡単に示したように、ノルム剰余理論から引き出される[1)]。さて我々は、このような構造定理が一般にガロア拡大の場合にも証明されるのではないかという期待を持つ。今日までわれわれは非アーベル体における分解定理については何も知らないから、このような洞察は形式的な方法でのみ実現され得る。

我々は、ガロア体の群の各指標に、基礎体のあるイデアルが対応付けられること、そして、アーベル体の場合に似た方法で、各中間体の判別式がこの″導手″から構成されることを示そう。その群がアーベル的ならば、このイデアルは普通の意味での指標の導手と一致する。一般の場合に、それはフロベニウス指標にたいする　Lー級数の関数等式において、アーベル的な場合の導手と同じ役割を演ずる[2)]。当然我々は、アーベル的でない場合にもまた、我々のイデアルが分解法則に関して際立った役割を演ずるであろう、と期待する。しかし私はこの問題については何も表明することは出来ない。

ともかく私には、この問題を検討することは代数的数論の将来の発展に対し、新しい概念の重要性を示すであろう、と思われる。この論文の結果を直接に基礎付ける事をのぞむ

[1)] H.Hasse,Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper,Teil I,Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 35 (1926),Satz 16 を参照せよ。Bd.36 (1927) の、この Berichts の Teil I a§8 には、この私の論文で用いられる、ガロア体の理論からの概念の基礎付けが与えられている。さらに H.Hasse,Führer,Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-Abelscher Zahlkörper,Crelle J. 162 (1930).

[2)] E.Artin,Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharacteren,Hamburger Abhandlungen 6 (1931). 脚注1で引用された Hasse 氏の Berichts ,Ergänzungsband 6 (1930),S.193, に提示された L-級数についての問題は我々の研究のきっかけとなった。

とき、おそらく分解法則の秘密のとばりを突き破ることになろう。

すなわち、事情はこうである：

我々のイデアルはアーベル的な場合に″本当の″導手であると言う事実（ここで自然に類体論を必要とする）から考えれば、すべての他の定理は、我々の導手が基礎体の整イデアルであると言う事実を除いて、初等的に証明される。この最後の認識はさしあたり類体論の助けによって得られるだけである。しかし私はそれが本質的に必要であるとは思わない。証明は例えば、合同式（１５）を一般化することによりもたらされるであろう。

なおその上に、なにはともあれ次の検討を約束したい：

中間体の判別式は、因数分解される。それはあたかも、判別式を群行列式として書き表すときの様子に似ている。おそらくそれは実際にそう書かれるであろうし、またそれを直接に捕らえることができるであろう。このような書き表し方から、この論文のすべての定理を推論することができるであろう。しかし私はまた、このような書き表し方から未知の分解法則を推察することができるであろうと確信している。しかしながら、すべては将来の発展に委ねられている。

なお、指標の導手に対する明示的公式は、類体論を新しく補強するものであることを付言させていただきたい。

§１。　補助定理

１。　群 $\mathfrak{G}$ の単純指標 $\chi_i(\sigma)$ と部分群 $\mathfrak{U}$ の単純指標 $\phi_k(\sigma)$ との間には、フロベニウス[3]に由来する、良く知られた関係が存在する：

σ が部分群 $\mathfrak{U}$ に属さないとき $\phi_k(\sigma)$ の値は０であると定め、さらに τ_i は $\mathfrak{G}$ に関する $\mathfrak{U}$ の右傍系の完全代表系を動くとすれば、関数

$$(1)\qquad \chi_{\phi_k}(\sigma) = \sum_i \phi_k(\tau_i \sigma \tau_i^{-1})$$

は群 $\mathfrak{G}$ の（一般には単純ではない）指標である。

$$(2)\qquad \chi_{\phi_k}(\sigma) = \sum_{i=1}^{h} r_{ik}\chi_i(\sigma), \qquad k=1, 2, \cdots, l$$

[3] G.Frobenius,Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen,Sitzungsberichte Berlin 1898. さらに A.Speiser,Gruppenntheorie,第一版 (1923) §52 または 第二版 (1927) §62.

を $\chi_i(\sigma)$ によるその表現とすれば、逆に $\chi_i(\sigma)$ にたいして、部分群 $\mathfrak{U}$ のなかで

$$(3)\qquad \chi_i(\sigma)=\sum_{k=1}^{l} r_{ik}\phi_k(\sigma),\ \sigma\in\mathfrak{U}\qquad i=1,2,\cdots,h$$

が成り立つ。

数 r_{ik} にたいしては

$$(4)\qquad r_{ik}=\frac{1}{q}\sum_{\tau\in\mathfrak{U}}\chi_i(\tau)\phi_k(\tau^{-1})$$

がであることがわかる。これらの公式において n, q は $\mathfrak{G}$ および $\mathfrak{U}$ の位数、h, l は $\mathfrak{G}$ および $\mathfrak{U}$ の指標の個数である。 $\chi_{\phi_k}(\sigma)$ は $\phi_k(\sigma)$ から誘導された指標とよばれる。

$\chi(\sigma)$ が $\mathfrak{G}$ の指標ならば、その代数的共役もまた指標である。代数的指標の共役系の和もまた指標であり、有理整数値のみをとる。それは有理指標と呼ばれる。i が n に素な数ならば、関数 $\chi(\sigma^i)$ は関数 $\chi(\sigma)$ からつくられる：トレースとしての $\chi(\sigma)$ の表現において 1 の n−乗根をその i−乗でおきかえる——したがって、共役な代数的指標に移る——ことにより得られるのである。これから、有理指標 $\Xi_k(\sigma)$ は方程式

$$(5)\qquad \Xi_k(\sigma^i)=\Xi_k(\sigma),\qquad (i,k)=1$$

を満たすことがわかる。したがってそれは、単に、いわゆる群の Abteilung の関数である。

$\mathfrak{G}$ からの元 ρ から生成される部分群を $\mathfrak{U}^\rho$ と書く。これらいろいろの部分群を区別するために、必要なかぎり、上の公式において上つき添え字 ρ を用いることにする。さらに、群の主指標にはつねに添数1 を対応づけることにしておく。特に、公式（2）において k にたいして値 1 を代入する。そのとき、左辺では有理指標が生ずる。単純指標による表現は一意的である。それゆえ、右辺では共役な代数的指標は等しい係数 r^ρ_{ik} をもつ。ゆえに、共役な代数的指標をひとまとめにすれば、次の形の公式が得られる：

(6) $$\chi_{\psi_i^\rho}(\sigma) = \sum_{i=1}^{h'} R_i^\rho\ \Xi_i(\sigma)\ 。$$

ここで　$\Xi_i(\sigma)$　は単純指標から得られる有理指標、h' はその個数そして　R_i^ρ は古い係数　r_{i1}^ρ　を新しく番号付けしたものである。（4）において共役な代数的指標 $\chi_i(\tau)$　の系について和をとれば、p_i を単純指標がどれだけ　$\Xi_i(\sigma)$ のなかに現れるかを示す数とするとき、R_i^ρ　にたいする表示式

(7) $$R_i^\rho = \frac{1}{q^\rho\ p_i} \sum_{\nu=1}^{q^\rho} \Xi_i(\rho^\nu)$$

が得られる。

さて（6）において元　ρ　を群　$\mathfrak{G}$　の全体にわたって動かせば、問題の有理指標を未知数とする一次方程式系を得る。それが解を持つことを主張する。方程式系の行列は（R_i^ρ）である。ここで　i　はたとえば行番号、ρ　は列番号とする。方程式系の可解性は、そのなかに　h'　個の一次独立な方程式が存在するとき、すなわち、行列の中に h' 個の一次独立な列が見出されるとき、保証される。それはまた、行列の　h' 個の行が一次独立であるときにも確かにそうである。よって

(8) $$\sum_{i=1}^{h'} R_i^\rho x_i = 0\ ,\ \rho \varepsilon \mathfrak{G},$$

を行列の行の間の一次関係とせよ。そこに（7）を代入し、本質的でない因子　q^ρ　を取り除き、x_i　を等価な　$x_i p_i$　で置き換える。そうすれば関係式

(9) $$\sum_{\nu=1}^{q^\rho} \sum_{i=1}^{h'} \Xi_i(\rho^\nu)\ x_i = 0\ ,$$ ($\mathfrak{G}$　からのすべての元　ρ　にたいして)

が得られる。しかし、そのうえ

(10) $$\sum_{i=1}^{h'} \Xi_i(\rho)\ x_i = 0,$$ ($\mathfrak{G}$　からのすべての　ρ　にたいして)

が成り立つ。

$\mathfrak{G}$ の単位元に対して、これは（9）からただちにしたがう。（10）が q^{ρ} より位数が小さいすべての元に対して証明されるとすれば、（9）において ν が q^{ρ} と互いに素であるような項のみが残る。しかし、これらはすべて ρ と同じ Abteilung に属し、有理指標はこのべきにたいして ρ にたいすると同じ値をもつ。それゆえ、ρ にたいする（10）がしたがう。

（10）はただ一つの x_i でも $\neq 0$ であれば、Ξ_i が一次従属であることを意味するであろう。しかしそういうことはない：何故ならば、Ξ_i はすべて異なる単純指標から構成されているからである。これで方程式系（6）の可解性が証明される。しかし、われわれにとっては次の、幾らか弱い結果で十分である：

<u>各有理指標は、部分群の主指標から誘導された指標の有理数係数一次結合である。</u>

2。

さて、数論的な考察に移ろう。基礎体 k として、ある代数的数体をとる。K を k 上ガロアとし、$\mathfrak{G}$ をその群、Ω を中間体、$\mathfrak{U}$ を属する部分群とする。$\mathfrak{p}$ を k からの素イデアルとする。次の記法を用いる：

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1^{e_1}\mathfrak{q}_2^{e_2}\cdots\cdots\mathfrak{q}_s^{e_s}$$

を Ω における $\mathfrak{p}$ の分解とする。$\mathfrak{P}_i$ を K における $\mathfrak{q}_i$ の素因子とし、$\mathfrak{P}_i = \kappa_i \mathfrak{P}_1$ とする。ここで κ_i は $\mathfrak{G}$ の元である。$\mathfrak{P}_i^{e_i'}$ を $\mathfrak{q}_i$ を割る $\mathfrak{P}_i$ の最高べきとする。$e = e_i e_i'$ とおかれる。したがって e は $\mathfrak{p}$ を割る $\mathfrak{P}_i$ の最高べきである。f_i および f を $\mathfrak{q}_i$ および $\mathfrak{P}_i$ の k に関する相対次数、f_i' を Ω に関する $\mathfrak{P}_i$ のそれとする。$\mathfrak{Z}$ および $\mathfrak{T}$ を k に関する $\mathfrak{P}_1$ の分解群および惰性群とする。したがって $\mathfrak{Z}_i = \kappa_i \mathfrak{Z} \kappa_i^{-1}$, $\mathfrak{T}_i = \kappa_i \mathfrak{T} \kappa_i^{-1}$ は $\mathfrak{P}_i$ のそれぞれ対応する群である。そのような群と $\mathfrak{U}$ との共通部分は、上に横棒を付けて示される。それゆえ、$\overline{\mathfrak{Z}}_i$ および $\overline{\mathfrak{T}}_i$ は $\mathfrak{P}_i$ の Ω における対応する群である. σ_i を素因子 $\mathfrak{P}_i$ に対応する k に関するフロベニウス置換とし、ρ_i をこの素因子の Ω に関するフロベニウス置換とする。これらの置換はそれぞれ対応する分解群

$\mathfrak{Z}_i$, $\overline{\mathfrak{Z}}_i$ を生成する。

ある体におけるある素イデアルの絶対ノルムは一貫して N と記される。それは、誤解は生じないからである。フロベニウス置換 σ_i および ρ_i の意味より、そのとき K からの各整数 A にたいして 合同式

$$\sigma_i^{f_i} A \equiv A^{\mathrm{N}\,\mathfrak{q}_i} \pmod{\mathfrak{P}_i} \text{ および } \rho_i^{-1} A^{\mathrm{N}\,\mathfrak{q}_i} \equiv A \pmod{\mathfrak{P}_i}$$

それゆえ

$$\rho_i^{-1}\,\sigma_i^{f_i}\,A \equiv A \pmod{\mathfrak{P}_i}$$

が成り立つ。最後の合同式は、 $\rho_i^{-1}\,\sigma_i^{f_i}$ が $\mathfrak{T}_i$ に属すること、したがって

$$\sigma_i^{f_i}\,\mathfrak{T}_i = \rho_i\,\mathfrak{T}_i$$

であることを意味する。さて、$\mathfrak{T}_i$ は $\mathfrak{Z}_i$ の正規部分群であり、σ_i および ρ_i は $\mathfrak{Z}_i$ に属する。ゆえにまた、 $\sigma_i^{\nu f_i}\mathfrak{T}_i = \rho_i^{\nu}\,\mathfrak{T}_i$ がしたがう。これから $\mathfrak{U}$ からの元、すなわち ρ_i^{ν} 、は傍系 $\sigma_i^{\nu f_i}\mathfrak{T}_i$ に属することが結論される。

さて逆に、$\mathfrak{U}$ からの元 $\gamma = \sigma_i^{\mu}\,\tau_i$ はいつ傍系 $\sigma_i^{\nu f_i}\mathfrak{T}_i$ に属するか、を尋ねよう。そのとき、K からのすべての整数 A にたいして合同式

$$\gamma A \equiv A^{\mathrm{N}\,\mathfrak{p}^{\mu}} \pmod{\mathfrak{P}_i}$$

が成り立つ。A としてとくに Ω からの元を取れば、それにたいしては $\gamma A = A$ であるから

$$A \equiv A^{\mathrm{N}\,\mathfrak{p}^{\mu}} \pmod{\mathfrak{q}_i}$$

がしたがう。mod $\mathfrak{q}_i$ の原始根が存在することから、μ は f_i で整除されなければならない。これでわれわれは、さきほど考えた場合に立ち戻った。そのとき

$$\sigma_i^{\mu}\,\mathfrak{T}_i = \rho_i^{\mu/f_i}\mathfrak{T}_i$$

が成り立つ。さて $\rho_i^{\mu/f_i}\,\tau_i$ が $\mathfrak{U}$ に属するためには、τ_i が $\mathfrak{U}$ に、それ

ゆえ $\overline{\mathfrak{T}}_i$ に属さなければならない。まとめて次が示された：

μ が f_i で割れないならば、$\sigma_i^{\mu}\,\overline{\mathfrak{T}}_i$ と $\mathfrak{U}$ との共通部分は空である。μ が f_i で割り切れるならばその共通部分は $\rho_i^{\mu/f_i}\mathfrak{T}_i$ から成る。

$\mathfrak{U}\zeta_i\kappa_i$ および $\mathfrak{U}\zeta_k'\kappa_k$ のかたちの二つの傍系を考える。ここで ζ_i は $\mathfrak{Z}_i$ からの、ζ_k' は $\mathfrak{Z}_k$ からの元である。これらが等しいのはどんなときであろうか。元 $\gamma=\zeta_k'\kappa_k\kappa_i^{-1}\zeta_i^{-1}$ は $\mathfrak{U}$ に属さなければならない。さてしかし、それが素イデアル $\mathfrak{P}_i$ を $\mathfrak{P}_k$ に移すことは直ちに分かる。$\mathfrak{q}_i$ の素因子からの元は $\mathfrak{q}_i$ の素因子にのみ再び移されるから、まず $i=k$ である。よって $\gamma=\zeta_i'\zeta_i^{-1}$ である。かたちからこの元は $\mathfrak{Z}_i$ に属する。それは $\mathfrak{U}$ に属するから $\overline{\mathfrak{Z}}_i$ に属さなければならない。すべてのことなる傍系を得るためには ζ_i は法 $\overline{\mathfrak{Z}}_i$ に関する $\mathfrak{Z}_i$ の完全剰余系を走らさなければならない。

$\mathfrak{Z}_i$ の位数は ef、$\overline{\mathfrak{Z}}_i$ のそれは $e_i'f_i'$、$\mathfrak{Z}_i$ の $\overline{\mathfrak{Z}}_i$ に関する指数は e_if_i である。それゆえこの完全剰余系を $\zeta_{i\nu}$ で示すならば、傍系

$$\mathfrak{U}\zeta_{i\nu}\,\kappa_i、\quad i=1,\ 2,\cdots,\ s\ ;\ \nu=1,\ 2,\cdots,\ e_if_i$$

は互いに異なる。それらの個数は $\sum_{i=1}^{s} e_if_i$ であり、したがってそれは Ω の k に関する拡大次数、すなわち $\mathfrak{G}$ の $\mathfrak{U}$ に関する指数である。それゆえこれらはちょうど傍系の全体である。我々はこの系 $\zeta_{i\nu}\,\kappa_i$ を、公式（1）を援用して誘導指標を構成するのに用いることができる。すなわち ϕ を $\mathfrak{U}$ のある指標とする。そのとき

$$(11)\qquad \chi_{\phi}(\lambda)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{e_if_i}\phi\,(\zeta_{i\nu}\,\kappa_i\lambda\kappa_i^{-1}\,\zeta_{i\nu}^{-1})$$

が成り立つ。我々は指標の変数に群要素の複合物をも代入し、自然な方法でそれを個々の指標値の和と理解しよう。そのとき、公式（11）は λ が複合物であるときにも成り立つ。そこから多くの公式を導くことができる：

まず、λ として複合物 $\sigma_1^{g}\mathfrak{T}$ をとる。右辺の変数値では、それは κ_i および $\zeta_{i\nu}$ により変換される。始めの変換によりそれは $\sigma_i^{g}\,\mathfrak{T}$ に移される。後の変換

では不変である。なぜならば、$\mathfrak{X}_i$ は巡回的商群を持つ $\mathfrak{Z}_i$ の正規部分群であり、$\zeta_{i\nu}$ は $\mathfrak{Z}_i$ に属するからである。こうして

$$\chi_{\phi}(\sigma_1{}^{g}\mathfrak{X}) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{e_i f_i}\phi(\sigma_i{}^{g}\mathfrak{X}_i) = \sum_{i=1}^{s} e_i f_i \phi(\sigma_i{}^{g}\mathfrak{X}_i)$$

が得られた。さてしかし、変数値が $\mathfrak{U}$ に属さなければ関数 ϕ の値は 0 に等しい。それゆえなお右辺において、変数値と $\mathfrak{U}$ との共通部分を作ることが許される。上で定められた共通部分から、

$$\chi_{\phi}(\sigma_1{}^{g}\mathfrak{X}) = \sum_{f_i | g} e_i f_i \phi(\rho_i^{g/f_i}\overline{\mathfrak{X}}_i)$$

がしたがう。

第二に、$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{Z}$ のある正規部分群とする。公式（１１）において λ に $\mathfrak{B}$ を代入する。群 $\kappa_i\mathfrak{B}\kappa_i^{-1}$ を $\mathfrak{B}_i$ とかき、それが $\mathfrak{Z}_i$ の正規部分群であることを考えれば、右辺における変数の値は $\mathfrak{B}_i$ である。共通部分を作ると以前と同様、公式

$$(13) \qquad \chi_{\phi}(\mathfrak{B}) = \sum_{i=1}^{s} e_i f_i \phi(\overline{\mathfrak{B}}_i)$$

に導かれる。

最後に公式（１）において $\sigma=1$ とおき、$\mathfrak{G}$ の $\mathfrak{U}$ に関する指数、すなわち体 Ω の k に関する次数を m と書けば、次の等式が得られる：

$$(14) \qquad \chi_{\phi}(1) = m\phi(1)$$

この論文では公式（１２）の応用はない。ここでは、それがここの状況のもとで良く理解されるから導いたのである。私は他の論文でそれを用いるであろう。[4]

なお、値 $\chi(\mathfrak{B})$ の意味について一言。$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{G}$ のある部分群とし、v をその位数とする。$\mathfrak{G}$ の指標 χ はまた $\mathfrak{B}$ の指標である。それを $\mathfrak{B}$ の単純指標の和に分解し、指標に対する関係を考慮すれば $\frac{1}{v}\chi(\mathfrak{B})$ が非負の有理整数であることがわかる。それは指標 χ のなかに $\mathfrak{B}$ の主指標がどれだけ現れるか、その回数を表す。とくに $\chi(\mathfrak{B})$ の値は常に高々 $v\chi(1)$ に等しく、ちょうどそれに等しいのは、群 $\mathfrak{G}$ の χ に属する表現が $\mathfrak{B}$ の各元に対して単位行列をもたらすとき、かつそのときに限る。

---

[4] 脚注 2 を見よ。

3。

最後の補助定理としてなお、惰性群と分岐群の間の関係をみることが必要である。この補助定理の一部分は、すでにスパイザー (Speiser)氏により得られている。[5)]

素イデアル $\mathfrak{P}_1$ の第 i 分岐群を $\mathfrak{V}_i$ と書く。Π を $\mathfrak{P}_1$ の一乗でちょうど割り切れる K の数とする。τ を惰性群の任意の元とし、それは Π を $A\Pi$ に移すとする。ここで A は $\mathfrak{P}_1$ に素な数である。τ_i を第 i 分岐群の元とする：すなわち Π を $\bmod\ \mathfrak{P}_1^{i+1}$ に関し固定するとする。その $\bmod\ \mathfrak{P}_1^{i+2}$ に関する作用は合同式

$$\tau_i\Pi \equiv \Pi+\Pi^{i+1}B \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+2}}$$

により記述されるとする。

$$\tau_i A \equiv A \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+1}}$$

により

$$\tau_i(A\Pi) \equiv A\tau_i\Pi \equiv A\Pi+(A\Pi)^{i+1}\frac{B}{A^i} \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+2}}$$

がしたがう。

$$\tau^{-1}(A\Pi)=\Pi \quad および \quad \tau^{-1}\left(\frac{B}{A^i}\right)\equiv\frac{B}{A^i} \pmod{\mathfrak{P}_1}$$

により

$$\tau^{-1}\tau_i\,\tau\Pi \equiv \Pi+\Pi^{i+1}\frac{B}{A^i} \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+2}}$$

である。最後にこれから

$$\tau_i^{-1}\tau^{-1}\tau_i\,\tau\Pi \equiv \Pi+\Pi^{i+1}B\left(\frac{1}{A^i}-1\right) \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+2}}$$

がしたがう。

元 $\tau_i^{-1}\tau^{-1}\tau_i\,\tau$ は $B\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1}$ または $A^i\equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}_1}$ であるとき、かつそのときにかぎり $\mathfrak{V}_{i+1}$ に属する。τ_i が $\mathfrak{V}_{i+1}$ に属さない事を仮定すれば $B\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1}$ でそれゆえ $A^i\equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}_1}$ である。したがって、$\tau^i\Pi \equiv A^i\Pi\equiv\Pi \pmod{\mathfrak{P}_1^2}$ である。すなわち τ^i は $\mathfrak{V}_1$ に属さなければならない。

これで次の命題を得た：

<u>元 $\tau_i^{-1}\tau^{-1}\tau_i\tau$ は τ_i が $\mathfrak{V}_{i+1}$ に属するかまたは τ^i が $\mathfrak{V}_1$ に属するとき、かつそのときにかぎり $\mathfrak{V}_{i+1}$ に属する。</u>

[5)] A.Speiser, Die Zerlegungsgruppe , Crelle 149 (1919)

ついでに　スパイザーの定理が得られる：

群　$\mathfrak{V}_i/\mathfrak{V}_{i+1}$　は群　$\mathfrak{V}_1/\mathfrak{V}_{i+1}$　の中心に含まれる。

しかしわれわれは、数　$\chi(\mathfrak{V}_i)$ の間の合同関係を導くために我々の結果を用いる。惰性群は位数　e　を持つ。e　を　$e_0 p^{R_1}$　と因数分解する。ここで　e_0　は　p　に素で、p　は素イデアル　$\mathfrak{p}$　に属する有理素数である。そのとき、商群　$\mathfrak{T}/\mathfrak{V}_1$　が位数　e_0　の巡回群であることは良く知られている。いまや　τ　は　mod　$\mathfrak{V}_1$　の生成剰余類の代表と考えられる。

$\mathfrak{V}_{i+1}$ に属さない、$\mathfrak{V}_i$ からの元　τ_i　は　$\tau^{-\nu}\tau_i\tau^{\nu}$　の形のすべての元が同一の類にはいるように類に分けられる。そうして得られた類は互いに交わらず、一つの類に属する元の個数は、どの類に対しても、$\tau^{-k}\tau_i\tau^{k}=\tau_i$　となるような最小数　k　で与えられる。まず、たしかにそのとき　$\tau_i^{-1}\tau^{-k}\tau_i\tau^{k}$　は　$\mathfrak{V}_{i+1}$　に含まれる。それゆえ　τ^{ik}　は　$\mathfrak{V}_1$　に属さなければならない。したがって、数　ik　は　e_0　により割り切れなければならない。さて　χ　が指標ならば、同一の類に属するすべての元は同一の指標値をもち、したがって指標値の和は　k　によって割りきれる代数的整数である。すべての類について和を取り、なお　i　を乗ずれば、数　$i(\chi(\mathfrak{V}_i)-\chi(\mathfrak{V}_{i+1}))$　が得られる。これでその数が　e_0 で割り切れることが確定した。よって合同式

$$i\chi(\mathfrak{V}_i)\equiv i\chi(\mathfrak{V}_{i+1}) \pmod{e_0} \tag{15}$$

が成り立つ。

χ　として主指標をとり、$\mathfrak{V}_i$　の位数を　p^{R_i}　と書けば、特別な場合として

$$i p^{R_i}\equiv i p^{R_{i+1}} \pmod{e_0} \tag{16}$$

が与えられる。

最後に、$\mathfrak{G}$　をアーベル群と仮定する。そのとき、次のことが結論される：

$\mathfrak{V}_{i+1}$ が　$\mathfrak{V}_i$　と異なるならば、i　は　e_0　によって割り切れる。

この結果は他の方法でハッセ氏により得られている。[6]

---

[6] 脚注　1　で引用された第二の論文を参照せよ。

§2。 指標の導手

4。ここで相対体 K/k たいする指標の導手の定義を与えよう：

(17) $\mathfrak{f}(\chi、K/k)$

$$= \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e}[e\chi(1)-\chi(\mathfrak{T})+p^{R_1}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_1)+p^{R_2}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_2)+\cdots\cdot]}$$

ここで積は k からのすべての素イデアルにわたる。[7] ここに現れている数および群については既に説明されている。十分大きな添数にたいして分岐群は単位元のみから成っているから、指数部分の和は有限項で切れる。さらに素イデアルが判別式を割らないとすればすでに惰性群は単位元のみから成るから、問題の素イデアルは導手にはなんの寄与も与えない。（17）は実際イデアルを定義する。2。の終わりに与えた注意から、指数は非負の有理数であり、少なくとも最初の部分 $\chi(1)-\frac{1}{e}\chi(\mathfrak{T})$ は整数であることがわかる。われわれは指数部分の項はすべて有理整数であること、したがって

$$\mathfrak{f}(\chi、K/k)$$

は、体 k の整イデアルであることを示そう。この事実は非常に深い結果である。さしあたりわれわれは、導手が体に属さないかもしれないことを認めよう。そして純形式的に計算を進めよう。そのとき、ノルムが何を意味するかは明らかである。しかしノルムもまた、それを考えている体のイデアルではないかも知れない。

計算法則

(18) $\mathfrak{f}(\chi_1+\chi_2、K/k)=\mathfrak{f}(\chi_1、K/k)\,\mathfrak{f}(\chi_2、K/k)$

は直ちに証明される。

これまで通り、部分群 $\mathfrak{U}$ には中間体 Ω が対応するとする。二つの導手

$$\mathfrak{f}(\chi_\phi、K/k) \quad および \quad \mathfrak{f}(\phi、K/\Omega)$$

の間の関係を調べよう。

---

[7] この公式がそもそも意味を持つためには、指数の部分で常に二つずつの項が括弧でくくられていると考えなければならない。見易くするために括弧を省略した。

群 $\kappa_\nu \mathfrak{B}_i \kappa_\nu^{-1} = \mathfrak{B}_\nu^i$ は $\mathfrak{P}_\nu$ の k に関する第 i 分岐群である。それと $\mathfrak{U}$ との共通部分は Ω に関する第 i 分岐群である。$\overline{\mathfrak{B}}_\nu^i$ の位数は $p^{R_\nu^i}$ と書かれる。公式 （１３）は

$$\chi_\phi(\mathfrak{B}_i) = \sum_{\nu=1}^{s} e_\nu f_\nu \phi(\overline{\mathfrak{B}}_\nu^i)$$

をもたらす。これは（１４）および等式 $m = \sum_{\nu=1}^{s} e_\nu f_\nu$ とともに、一目瞭然な計算により次の変形を与える：

$$\mathfrak{p}^{\frac{1}{e}\left[p^{R_i}\chi_\phi(1)-\chi_\phi(\mathfrak{B}_i)\right]}$$

$$= \mathfrak{p}^{\frac{m}{e}(p^{R_i}-1)} \mathfrak{p}^{-\frac{1}{e}\sum_{\nu=1}^{s} e_\nu f_\nu (p^{R_\nu^i}-1)\phi(1)} \cdot \mathfrak{p}^{\frac{1}{e}\sum_{\nu=1}^{s} e_\nu f_\nu [p^{R_\nu^i}\phi(1)-\phi(\overline{\mathfrak{B}}_\nu^i)]}$$

$$= N_{\Omega/k}\left(\mathfrak{p}^{\frac{1}{e}(p^{R_i}-1)\phi(1)} \cdot \prod_{\nu=1}^{s} \mathfrak{q}_\nu^{-\frac{1}{e'_\nu}(p^{R_\nu^i}-1)\phi(1)} \mathfrak{q}_\nu^{\frac{1}{e'_\nu}[p^{R_\nu^i}\phi(1)-\phi(\overline{\mathfrak{B}}_\nu^i)]} \right)$$

似た方法で、惰性群の寄与もまた変形される。

さて、相対差積 $\mathfrak{d}_{K/k}$ および $\mathfrak{d}_{K/\Omega}$ は次の値を持つ：

$$\mathfrak{d}_{K/k} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e}(e-1+p^{R_1}-1+\cdots\cdots)} \quad ;$$

$$\mathfrak{d}_{K/\Omega} = \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{\nu=1}^{s} \mathfrak{q}_{\nu}^{\frac{1}{e'_{\nu}}(e'_{\nu}-1+p^{R^1_{\nu}}-1+p^{R^2_{\nu}}-1+\cdots)}$$

これからつぎがしたがう：

$$\mathfrak{f}\ (\chi_{\phi}、K/k) = N_{\Omega/k}\left(\left(\frac{\mathfrak{d}_{K/k}}{\mathfrak{d}_{K/\Omega}}\right)^{\phi(1)} \cdot \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{\nu=1}^{s} \mathfrak{q}_{\nu}^{\frac{1}{e'_{\nu}}[e'_{\nu}\phi(1)-\phi(\overline{\mathfrak{T}}_{\nu})+p^{R^1_{\nu}}\phi(1)-\phi(\overline{\mathfrak{B}}^1_{\nu})+\cdots]}\right)$$

しかしこの公式の最後の部分は、ちょうど導手　$\mathfrak{f}\ (\phi、K/k)$　である。これでつぎの基本的公式が得られた：

(19)　　$\mathfrak{f}\ (\chi_{\phi}、K/k) = \mathfrak{D}_{\Omega/k}^{\phi(1)} \cdot N_{\Omega/k}(\mathfrak{f}\ (\phi, K/\Omega))$

ここで　Ω　の　k　に関する相対判別式を　$\mathfrak{D}_{\Omega/k}$　と書いた。

χ　が主指標ならば、$\mathfrak{f}\ (\chi、K/k) = 1$　である。これを、極めて重要な（１９）の特別な場合を提示するために用いる。すなわち（１９）において　ϕ　として主指標　ϕ_1　をとる。そうすれば次の公式が得られる：

(20)　　$\mathfrak{D}_{\Omega/k} = \mathfrak{f}\ (\chi_{\phi_1}、K/k)$。

この公式は　K　のすべての部分体にたいする判別式の、希まれた分解をもたらす。実際、誘導された指標を、群の単純指標によって表すことができる。そして（１８）により単純指標の導手による判別式の表現を得る。それゆえ、導手は判別式理論を精密にしたものと考えられるのである。

さらに、共役な代数的指標にたいして導手が同じ値をとるということは、ほとんど自明な性質である。

さて、導手が、この最後の性質により、公式（１８）および（２０）とともに、特徴付けられることは極めて注目に値する：

群 $\mathfrak{G}$ の各指標 χ に イデアル $\mathfrak{F}(\chi)$ が、公式（１８）、（２０）が成り立つように対応付けられ、共役な代数的指標には同じイデアルが対応するならば、イデアル $\mathfrak{F}(\chi)$ は導手 $\mathfrak{f}(\chi、K/k)$ に等しい。

すなわち、

$$\mathfrak{F}_1(\chi) = \frac{\mathfrak{F}(\chi)}{\mathfrak{f}(\chi、K/k)}$$

とおけば、これに対しても公式（１８）は成り立つ。一方、（２０）のかわりに、より簡単な等式

$$\mathfrak{F}_1(\chi_{\phi_1}) = 1$$

が成り立つ。１。で証明された補助定理のもとに、いまや各有理指標 Ξ にたいしてもまた $\mathfrak{F}_1(\Xi) = 1$ が成り立つ。さてしかし、イデアル $\mathfrak{F}_1(\chi)$ から、べきをとることにより $\mathfrak{F}_1(\Xi)$ の形のイデアルが生ずるから、したがって各指標 χ にたいして $\mathfrak{F}_1(\chi) = 1$ が成り立つ。これで我々の定理は証明された。

この結果は二度応用される。

まず、体 K を広いガロア体 K' に拡張する。$\mathfrak{G}'$ を K'/k の群とし、K が部分群 $\mathfrak{H}$ に属するならば、$\mathfrak{G}$ は商群 $\mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$ に同形であり、それと同一視される。したがってここでは、これまでの群の元を傍系と考えなければならない。群 $\mathfrak{G}$ の各指標はそのときまた群 $\mathfrak{G}'$ の指標であり、以下常に同じ文字で示される。これは、すべての指標関係が $\mathfrak{G}'$ にその儘保持され、また誘導された指標に対してもそうであるだけに、いっそう具合が良い。さて、$\mathfrak{G}$ の各指標に対して

$$\mathfrak{F}(\chi) = \mathfrak{f}(\chi、K'/k)$$

とおけば、このイデアルにたいして再び（１８）および（２０）が成り立つ。そしてそれは、共役な代数的指標に対して同じ値を持つ。よって

$$(21) \qquad \mathfrak{f}(\chi、K'/k) = \mathfrak{f}(\chi、K/k)$$

がしたがう。

公式は、導手がこれまでより深い意味で体 K の不変量であることを意味している。

第二に、群 $\mathfrak{G}$ をアーベル的であるとしよう。χ が $\mathfrak{G}$ の単純指標ならば、われわれは $\mathfrak{F}(\chi)$ を類体論の導手ととる。そのとき合成された指標に対して $\mathfrak{F}(\chi)$

が　（１８）　を満たすように定義される。そうすれば、我々の関数に対して　（２０）は、類体論の導手−判別式−公式以外の何物でもない。[8]　$\mathfrak{F}(\chi)$　が共役な代数的指標にたいして同じ値を取ることは自ずから明らかである。これで次が示された：

K/k　がアーベル的ならば、導手　$\mathfrak{f}(\chi、K/k)$　は類体論で良く知られた導手である。

この基礎的な事実をもとに私は　$\mathfrak{f}(\chi、K/k)$　は、非アーベル的な場合に未だ知られざる分解法則にたいしてもまた、類体論の導手と同様の役割を演ずるであろうという希望を抱く。しかしこのことについて言うべきことはなにもない。

---

[8] 脚注　1　を見よ。χ_{ϕ_1}　は　$\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$　の正則（regular)表現に属する。それゆえ$\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$　の各単純指標をちょうど一度ずつ含む。

5。

$\mathfrak{f}$ (χ、K/k) が k の整イデアルであるかどうか、という問題に向かおう。指数がすでに非負であることは知られているから、それらが整数であることを示しさえすればよい。それゆえ、括弧の中の数が e で割り切れることを示さなければならない。e の分解 $e=e_0 p^{R_1}$ に応じて、証明は e_0 で割り切れること、および p^{R_1} で割り切れることのそれに分けられる。

e_0 で割り切れることの証明から始める。式の指数部分において $p^{R_i}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_i)$ を $i[p^{R_i}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_i)]-(i-1)[p^{R_i}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_i)]$ でおきかえる。括弧の中の項をまとめなおし、

$$i\,(p^{R_i}-p^{R_{i+1}}) \quad \text{および} \quad i\,[\chi(\mathfrak{V}_i)-\chi(\mathfrak{V}_{i+1})]$$

の形の項をすべて出す。(15) および (16) によりこれらの項は e_0 で割り切れる。したがってまた括弧でくくられた表現全体も e_0 で割り切れる。

p^{R_1} で割り切れることは、本質的な深みにある事実のようである。証明は三段階にわけられる。

a) 素数べき位数の群への帰着。

V を第一分解体とする。したがってそれは、部分群 $\mathfrak{V}_1$ に属する K の部分体である。$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{P}_1$ で割り切れる V からの素イデアルとする。K/V の惰性群を分岐群と同様に構成するために、$\mathfrak{T}$、$\mathfrak{V}_1$、$\mathfrak{V}_2$、……と $\mathfrak{V}_1$ との共通部分を求めなければならない。そのとき、新しい惰性群は $\mathfrak{V}_1$ である。しかし、分岐群はなにも変わらない。新しい惰性群の位数はちょうど p^{R_1} である。さて、χ は部分群 $\mathfrak{V}_1$ の指標でもある。そこで導手 $\mathfrak{f}$ (χ、K/V) をつくり、$\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{f}$ (χ、K/k) への寄与と $\mathfrak{q}$ の寄与とを比較する。$\mathfrak{q}$ の寄与はつぎの通りである:

$$\frac{1}{p^{R_1}}\Bigl(p^{R_1}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_1)+p^{R_1}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_1)+ \\ +p^{R_2}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_2)+\cdots\cdots\Bigr).$$

この和の最初のふたつの項は、いずれにしてもそれらは整数であるからたいしたことはない。$\mathfrak{f}$（χ、K/V）が　V　の整イデアルであることが示されるならば、古い括弧の中の表現も　p^{R_1}　で割り切れることがしたがうであろう。なぜならば、それらの指数は本質的な点で一致するからである。そして　$\mathfrak{V}_1$　は位数　p^{R_1}　の群である。

b）　以上より、$\mathfrak{G}$　は素数べき位数の群と取ることができる。　ブリッヒフェルト (Blichfeldt)[9] の定理により、そのとき群の各表現は単項的 (monomial) である。それゆえ各指標は適当な部分群の一次の指標から誘導される。ψ　をその部分群の指標とし、Ω　を部分群に属する中間体とする。ここで公式　（１９）を応用することができる。そうすれば、$\mathfrak{f}$（χ、K/Ω）が体　Ω　の整イデアルならば、$\mathfrak{f}$（χ、K/k）もまた　k　からのイデアルであることがわかる。

c）それゆえさらに　χ　として一次の指標をとってもよい。しかしこのような指標の各々はすでに巡回的商群の指標であり、公式　（２１）から、群　$\mathfrak{G}$　として巡回群を考えればよいことになる。そこで再び我々は類体論に出会う。すなわち、そのとき

$$\mathfrak{f}（\chi、K/k）$$

は類体論における導手と一致しているのである。それ故我々のイデアルが体のイデアルであることは自明となる。

これで次のことが示された：

<u>イデアル</u>　$\mathfrak{f}$（χ、K/k）<u>は</u>　k　<u>からの整イデアルである</u>。

特にこの定理により、以前の結果は初めて意味を持つことになった。何故ならば、それが実際おのずから体における判別式の分解に係わる問題であることが初めて分かったからである。

なお、次のような言い換えをしよう：

指標　χ　がどのような真のガロア的部分体の指標でもないとき、導手　$\mathfrak{f}$（χ、K/k）は　<u>ちょうど</u>　K　に属する、と言うことにする。

K/k の判別式の約数のみが、導手　$\mathfrak{f}$（χ、K/k）を割ることができる。しかし、

[9] A.Speiser,Gruppentheorie, 第一版　定理130 または第二版　定理 169. この定理の似たような応用はハッセ氏により、脚注１に引用された彼の報文、補充巻、6 (1930) の 160 ページに与えられている。

$\mathfrak{f}(\chi、K/k)$ がちょうど K に属するならば、判別式のすべての約数が実際にそれを割る。すなわち、$\dfrac{1}{e}(p^{R_i}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}^i))$ の寄与は負ではないから、$\mathfrak{p}$ はとくに $e\chi(1)-\chi(\mathfrak{T})=0$ であるときにかぎり、$\mathfrak{f}(\chi、K/k)$ を割ることは出来ない。2。の終わりに与えた注意から、χ に属する表現が $\mathfrak{T}$ の各元に対して単位行列に帰着されなければならないことがわかる。さてしかし、$\mathfrak{G}$ の元でそうなるようなものは $\mathfrak{G}$ の正規部分群を作り、χ はこの正規部分群の商群にたいする指標である。したがって我々の仮定により、この群は単位元からなる群に帰着されなければならない。同じ事は群 $\mathfrak{T}$ にたいしても成り立つ。それゆえ $\mathfrak{p}$ は K/k の判別式を割らない。これまでに見出された性質はふたたび見通し良く組み立てられるであろう：

イデアル

(17) $\mathfrak{f}(\chi、K/k)=$

$$\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e}[e\chi(1)-\chi(\mathfrak{T})+p^{R_1}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_1)+p^{R_2}\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_2)+\cdots]}$$

は k からの整イデアルである。K/k がアーベル的ならば、それは類体論の導手である。それは、ちょうど K/k に属するとき、判別式のすべての約数により、そしてそれらのみによって割り切れる。次の公式がなりたつ：

(18) $\mathfrak{f}(\chi_1+\chi_2、K/k)=\mathfrak{f}(\chi_1、K/k)\,\mathfrak{f}(\chi_2、K/k)$ 、

(19) $\mathfrak{f}(\chi_\phi、K/k) = \mathfrak{D}_{\Omega/K}^{\phi(1)}\cdot N_{\Omega/k}(\mathfrak{f}(\phi, K/\Omega))$ 、

(21) K' が K の拡大ならば、$\mathfrak{f}(\chi、K/k)=\mathfrak{f}(\chi、K'/k)$ 。

次の公式により中間体の判別式を得ることが出来る：

(20) $\mathfrak{D}_{\Omega/k} = \mathfrak{f}(\chi_{\phi_1}、K/k)$

あるいは $\chi_{\phi_1}=\sum_{\nu=1}^{h} g_\nu \chi_\nu$ が χ_{ϕ_1} の単純指標への分解であるとき、

(20a) $\mathfrak{D}_{\Omega/k} = \prod_{\nu=1}^{h} (\mathfrak{f}(\chi_\nu, K/k))^{g_1}$

（χ_{ϕ_1} は単に Ω が属する置換群の指標である）。特に

$$(20b) \qquad \mathfrak{D}_{K/k} = \prod_{\nu=1}^{h} (\mathfrak{f}(\chi_\nu, K/k))^{Z\nu(1)}$$

である。

われわれはいまや容易に、判別式についてのミンコウスキーの定理から、導手についてのミンコウスキーの定理に移行することが出来る。

6。

基礎体として有理数体をとれば、χ が主指標でないとき、少なくとも一つの素数は導手を割る。何故ならば、K' が体で $\mathfrak{f}(\chi)$ がそれにちょうど属する時、少なくとも一つの素数が K' の判別式を割るからである。

基礎体 k が任意で $\mathfrak{f}$ が与えられたイデアル、n が与えられた有理整数ならば n 次の体 K/k であって、導手として $\mathfrak{f}$ がそれにちょうど属するようなものすべてを求めたい。K/k の判別式の約数は $\mathfrak{f}$ の約数であることを知っているから、ヒルベルトの数論報告 (Zahlbericht) の定理８０を援用して、判別式に対して有限個の可能性のみが問題になることが分かる。与えられた相対判別式および与えられた次数にたいし ミンコウスキー により有限個の体のみ存在する。これでつぎのことが証明された：

$\mathfrak{f}$ が k からの与えられたイデアルならば、与えられた次数の拡大体で、それに $\mathfrak{f}$ がちょうど属するものは有限個しか存在しない。基礎体が特に有理数体ならば数 1 は主指標に対する導手として、したがって、ちょうど基礎体自身にのみ属する導手として現れる。

上で言明された定理は、体の次数のかわりに指標の次数にのみ制限を課するときにも正しい、ということを証明無しに言明しておきたい。この事実の証明はいくらか長たらしいものである。

最後に、私はなお注意を喚起したい：私は他の論文で一般な群指標を係数とする L－

級数の理論において、導手が、アーベル指標を係数とする　L－級数にたいすると同様の役割を演ずること示した。[10]

1930年 11月 9日 受領

[10] 脚注２　を見よ。