モジュラー方程式について

笠原　乾吉　（津田塾大学）

0. モジュラー方程式という語は19世紀数学にはよく登場するが、日本数学会編「数学辞典」には見つからないほどに、今日では忘れられている。楕円関数の本、例えば S.Lang「Elliptic Functions」にはでてくるが、その定義からは何故モジュラー方程式と呼ぶのかよくわからない。最近、高瀬正仁氏のおかげでずいぶんその事情が明解になった([11], [12])。ここでは高瀬氏のいう三つのモジュラー方程式に加え、上記の Lang の本などにある F. Klein のモジュラー方程式をいれて四つのモジュラー方程式を紹介する。そしてその関係と、私にはまだ不明な点を一二申しあげたい。

以後、n はつねに奇素数としておく。

1. 楕円関数の変換　Jacobi の sn 関数は

$$(1)\qquad x = \mathrm{sn}(u,k) \iff u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

で定義される。k^2 を母数 (modulus)、$k'^2 = 1 - k^2$ を補母数という。

$$\mathrm{cn}(u,k) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2(u,k)}$$

$$\mathrm{dn}(u,k) = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)}$$

$$(2)\qquad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

とおく。$\mathrm{sn}(u, k)$ は $4K$, $2iK'$ を基本周期とする2重周期関数である。

微分方程式

$$(3)\quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

の代数的な積分 $F(x, y) = 0$ を楕円関数の変換という。Abel (1828年[2]) はそれをすべて求めるが、ここでは Jacobi (1829年[4]) による解をかく。(3) の有理関数の解 $y = U(x)/V(x)$ ($U(x)$ はn次、$V(x)$ は $n-1$ 次の多項式) をn次の変換という。Jacobiは一種の未定係数法で U, Vを求める方法を発見したが、別に次のような解析的な解もみつけた。$\Omega = 4(mK + m'iK')/n$, $n' = (n-1)/2$ とおく。

$$(4)\quad \begin{aligned} U &= \frac{x}{M}\prod_{h=1}^{n'}\left(1 - \frac{x^2}{\mathrm{sn}^2 h\Omega}\right) \\ V &= \prod_{h=1}^{n'}\left(1 - k^2x^2\mathrm{sn}^2 h\Omega\right) \end{aligned}$$

$$\lambda = k^n \prod_{h=1}^{n'}\left(\frac{\mathrm{cn}\, h\Omega}{\mathrm{dn}\, h\Omega}\right)^4$$

$$M = (-1)^{n'}\prod_{h=1}^{n'}\left(\frac{\mathrm{cn}\, h\Omega}{\mathrm{sn}\, h\Omega\ \mathrm{dn}\, h\Omega}\right)^2$$

これが (1) の解であるが、Ω を次のようにとることによりn +1個 の解ができる。

$$\Omega_\infty = \frac{4K}{n}, \quad \Omega_j = \frac{4jK + 4iK'}{n}, \quad (j = 0, 1, \cdots, n-1).$$

旧母数 k^2 と新母数 λ^2 との関係式を、高瀬氏にしたがいJacobiのモジュラー方程式という。例えばn =3のとき (4) の λ、kの関係式から、

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1 \qquad \text{(Legendre, 1825年)}$$

がえられるし、$u = \sqrt[4]{k}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$ とおくと、

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0$$

が成立する。

Jacobi はさらに、Ω_∞, Ω_0に対する変換による新母数をそれぞれ λ_∞^2, λ_0^2 とし、それに対応する完全積分 (2) を $\Lambda_\infty, \Lambda_\infty', \Lambda_0, \Lambda_0'$ とするとき、

$$\frac{\Lambda_\infty'}{\Lambda_\infty} = n\frac{K'}{K}, \quad \frac{\Lambda_0'}{\Lambda_0} = \frac{1}{n}\frac{K'}{K}$$

を示した。すなわち、Ω_∞, Ω_0 に対応する n 次の変換によって、sn 関数の周期比がそれぞれ n 倍、$\frac{1}{n}$倍されるのである。

2．<u>周期等分方程式.</u>　　sn nu = a を与えて、sn u = x を求める問題を考える。加法定理から、

$$\operatorname{sn} nu = \frac{xA(x^2)}{Q(x^2)}, \quad x = \operatorname{sn} u$$

となり、A(X), Q(X) は X の $\frac{n^2-1}{2}$ 次の多項式である。上の問題は、方程式 $xA(x^2) - aQ(x^2) = 0$ を解く問題で、これを一般等分方程式という。この方程式の代数的可解性は a = 0 のときに還元され、$A(x^2) = 0$ を<u>周期等分方程式</u>、または特殊等分方程式という。Abel (1828年 [1]) は、この方程式の Galois 群が非原始的であることをみつけ、次のような方程式の代数的可能性に帰着されることを示した。

周期等分方程式の根は、周期等分値 $\operatorname{sn}\frac{4mK + 4m'iK'}{n}$ であるが、n -1 個ずつの n +1 個の列にわかれる。

前記のように、$\Omega_\infty = \frac{4K}{n}$, $\Omega_j = \frac{4jK + 4iK'}{n}$ とおくと、列 R_j は

$$R_j: \quad \operatorname{sn}\Omega_j, \operatorname{sn}2\Omega_j, \cdots, \operatorname{sn}(n-1)\Omega_j$$

である。($j = 0, 1, \cdots, n-1, \infty$).

n -1 変数の対称有理式 $\Phi(x_1, \cdots, x_{n-1})$ をとり、

$$(5) \quad \eta_j = \Phi(\operatorname{sn}\Omega_j, \operatorname{sn}2\Omega_j, \cdots, \operatorname{sn}(n-1)\Omega_j)$$

とおき、η_jはすべて相異なるものとして

$$g(t) = (t-\eta_0)(t-\eta_1)\cdots\cdots(t-\eta_{n-1})(t-\eta_\infty)$$

を考える。$g(t)=0$ を<u>変換方程式</u>という。

周期等分方程式は、体 $Q(k^2)$ 上で変換方程式 $g(t)=0$ を解くことと、体 $Q(k^2, \eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1}, \eta_\infty)$ 上で方程式 $\prod_{h=1}^{n-1}(t-\mathrm{sn}\, h\Omega_j)=0$ を解くことに分解され、後者は巡回方程式で代数的可解である。一般等分方程式は、$Q(k^2)$ に周期等分値を添加した体上でアーベル方程式でこれも代数的可解である。

とくに、偶有理式 $\Phi(X)$ をとり、

$$\eta_j=\prod_{h=1}^{n'}\Phi(\mathrm{sn}\, h\Omega_j)$$

とおくと、これは上の形に変形され、$(t-\eta_0)\cdots(t-\eta_\infty)=0$ は変換方程式になる。Weber [8] は、このようにして偶有理式から作られた特殊な変換方程式を、モジュラー方程式と呼んでいる。ここでは、n^2-1 次の周期等分方程式からでてくる変換方程式の特殊なものとしてのモジュラー方程式、または簡単に<u>Weberの本のモジュラー方程式</u>と呼ぶ。

ここで、Jacobi による $n+1$ 個の n 次の変換 (4) にもどる。$\eta_j=\sqrt[4]{\lambda_j}$ とおくと、

$$\eta_j=\sqrt[4]{k}^{\,n}\prod_{h=1}^{n'}\left(\frac{\mathrm{cn}\, h\Omega_j}{\mathrm{dn}\, h\Omega_j}\right)$$

となるが、$\mathrm{cn}\, h\Omega_j/\mathrm{dn}\, h\Omega_j$ は計算により $\mathrm{sn}^2 h\Omega_j$ の有理式となり、結局この η_j は偶有理式 $\Phi(X)$ による $\prod_{h=1}^{n'}\Phi(\mathrm{sn}\, h\Omega_j)$ の形に変形できる。ゆえに、$g(t)=(t-\eta_0)\cdots(t-\eta_{n-1})(t-\eta_\infty)=0$ は、Weber の本の意味でのモジュラー方程式である。さらに、これは変換前後の新旧の母数 λ_j と k の関係式であり、Jacobi の意味でのモジュラー方程式でもある。

これで、Jacobi のモジュラー方程式が、周期等分方程式の変換方程式の一つであることがわかった。ところが Abel ([1], 全集 pp.309 - 310) は、変換方程式の根が、有理対称式のとり方に本質的によらないことを証明している。即ち、$\Phi(X_1, \cdots, X_{n-1}), \Psi(X_1, \cdots, X_{n-1})$ を二つの対称有理式として (5) により

それぞれ変換方程式の根 η_j, $\widetilde{\eta_j}$ を作ると、$\widetilde{\eta_j}$ は η_j の有理式で表される。（この結果の重要性に気づいたのは、また高瀬氏であった（[11] (二) pp.14 - 13)。これで、変換の母数の間の関係式としてのモジュラー方程式と、周期等分方程式の片割れの変換方程式としてのモジュラー方程式とがしっかり結びつく。

3．虚数乗法　微分方程式（3）において、$\lambda = k$, $1/M = a$ とおき、

$$(6)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

を考える。これが代数的な積分をもつものとすると、aは有理数か虚二次無理数でなければならない。さらに、後者のときは、周期比τも虚二次無理数で $a \in \mathbf{Q}(\tau)$ となる。これらを Abel ([3]) は示した。彼は [2] で証明なしに、母数 k^2 は任意ではありえず、ある方程式を満たしその方程式は代数的に可解であるという。（6）が代数的な積分を持つことは、（6）を積分しauとおいてみれば、sn(au,k) と sn(u,k) とが代数方程式を満たすことと同値である。aが実数でなくてこのことが成立するとき、sn(u,k)は虚数乗法を持つといい、k^2 は特異母数であるという。

特異母数が満たす方程式を、高瀬氏は特異モジュラー方程式と呼び、これが第三のモジュラー方程式である。Kronecker ([5]) は、特異モジュラー方程式の形とその代数的可解性について証明なしに述べている。しかし、特異母数 k^2 そのものについての方程式は、$a = \sqrt{-3}$, $\sqrt{-5}$ について Abel [1] が計算した例位しか具体的な形を私はしらない。

母数 k^2 から重点が周期 $4K$, $2iK'$ にうつり、さらに周期の比 $\tau = iK'/2K$ にうつってきた。母数 k^2 から周期比 τ が定まるが、逆に Jacobi は k を $q = e^{2\pi i\tau}$ で表している。モジュラー方程式を変換の前後の新旧周期比の関係式と考え、さらに楕円関数も Weierstrass のペー関数のように周期格子で定まるものとして格子の生成元（基底）のとり方によらないものとすると、Dedekind の J(τ) (1877年[6])が登場する。

4．Kleinのモジュラー方程式　$J(\tau)$は上半平面で正則な関数で、

$$J(\tau)=J(\tau') \iff {}^{\exists}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),\ \tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

を満たしているものである。Klein(1878年[7])は変換の前と後のJの関係式を調べている（彼によれば、1867年にMüllerが始めたとのこと）。そして

$$f_n(X,\tau)=(X-j(n\tau))(X-j(\tfrac{\tau}{n}))(X-j(\tfrac{\tau+1}{n}))\cdots(X-j(\tfrac{\tau+n-1}{n}))$$

を考える（$j(\tau)=1728J(\tau)$，整数係数にするため）。これは整数係数のXと$j(\tau)$の多項式でそれぞれについてn+1次になることが示され、$\Phi n(X,j(\tau))$，または$j(\tau)=Y$とおき、$\Phi_n(X,Y)$とかく。$\Phi_n(X,Y)=0$が、楕円関数などの今日の教科書に現われるモジュラー方程式であるが、ここではKleinのモジュラー方程式と呼ぶことにする。n次の変換のなかには前述のように周期比τを$n\tau,\frac{\tau}{n}$にするものがあり、$\Phi_n(j(n\tau),j(\tau))=0$，$\Phi_n(j(\frac{\tau}{n}),j(\tau))=0$だから、$j(\tau)$を母数に代わるものと考えればこれはモジュラー方程式と呼ぶにふさわしい。他のn次変換でτが$\frac{\tau+h}{n}$　$(h=1,2,\cdots,n-1)$に写るかどうかは、変換を同種写像と今日風に考えればそうであるが（例えば[10] p.235）、Jacobiのもとの変換については、私は確かめていない。

Kronecker(1857年[5])は、「Abelの論文(全集I.p.426)に、虚数乗法をもつ楕円関数の母数は根号によって表されるという注意がある。しかしそこにはAbelがどのようにして楕円関数の特別なクラスのめざましい性質をみつけたか、示唆に欠けている。」という書き出しで、「興味のある結果を得たので、ここに短くかきとめておく」として、$sn^2(\sqrt{-n}u,k)$が$sn^2(u,k)$の有理式で表されるときのkがみたす特異モジュラー方程式についての結果、とくに判別式が-nの二次形式の類数との関係を述べている。これはDedekindのモジュラー関数$J(\tau)$が現われる以前であり、Kroneckerがどのようにしてここに到達し、どんな証明をもっていたか私には

わからない。以下に、Cox の本 ([10]) にしたがって、Kronecker の結果が Klein のモジュラー方程式によってどのように表されるか、また特異モジュラー方程式も母数を $j(\tau)$ と考えればどうなるかまとめておく。

複素数 ω_1, ω_2 で、虚部 $\mathrm{Im}\,\dfrac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ のものに対し、
$L = \{ a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in \mathbf{Z} \}$ を格子という。$\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ とおくとモジュラー関数 $j(\tau)$ は、格子 L の基底 ω_1, ω_2 のとり方によらないので $j(L)$ とかく。格子 L と格子 L' とが相似とは、$\lambda \neq 0$ があり $L' = \lambda L$ となることである。L と L' が相似

$\Longleftrightarrow$ $j(L) = j(L')$ が成り立つ。

格子の全体を相似という同値関係で類別し、L を含む類を (L) とかこう。格子 L を与えると、Weierstrass のペー関数とよばれる楕円関数 $\wp(u) = \wp(u, L)$ が決まり、これは L をちょうど周期の全体としている。$\alpha \notin \mathbf{R}$ に対し、

$\wp(\alpha u)$ が $\wp(u)$ の有理関数 $\Longleftrightarrow$ $\alpha L \subset L$

となり、この辺りは Jacobi の sn 関数よりペー関数の方が簡明である。このとき、すなわち $\wp(u)$ が α を虚数乗法子とする虚数乗法をもつなら、基本周期の比 τ は虚二次無理数で、α は虚二次体 $\mathbf{Q}(\alpha)$ に入る。$\wp(u)$ の虚数乗法子の全体 $\mathrm{O} = \{ \alpha \in \mathbf{C} \mid \alpha L \subset L \}$ は虚二次体 $\mathbf{Q}(\alpha)$ の order になっている。(即ち、部分環かつ階数 2 の $\mathbf{Z}$−自由加群である。)

さて、虚数乗法をもつ格子 L に対する $j(L)$ の有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式は、O を上記のものとして

$$(7) \qquad H_{\mathrm{O}}(X) = \prod_{i=1}^{h} (X - j(L_i))$$

となり、ここで、$L_1, \cdots, L_h$ は $\mathrm{O} = \{ \beta \in \mathbf{C} \mid \beta L' \subset L' \}$ をみたす格子 L' の相似という同値関係の完全代表系である。実は order O に対し判別式という整数 D が定まり、D を判別式にもつ整数係数原始二次形式 $ax^2 + bxy + cy^2$ に対し、

$$ax^2 + bxy + cy^2 \longrightarrow a \text{ と } \frac{-b + \sqrt{D}}{2} \text{ の生成する格子}$$

という対応で、二次形式の類と上記の格子の類とが一対一に対応するので、hは判別式Dの二次形式の類数である。（order Oの proper fractional O- ideal のイデアル類群の類数でもあるが、ここでは省略。$H_0(X)$は類方程式とよばれ、アーベル方程式で代数的に可解である。）

さらに、Kleinのモジュラー方程式$\Phi_n(X, Y) = 0$に対し、$H_0(X)$は$\Phi_n(X, X)$の既約成分になっている。即ち

$$(8) \qquad \Phi_n(X, X) = c_n \prod H_0(X)^{r(0,n)}$$

が成り立つ。ここで、order Oに対し、$r(0,n)$とは

$$\{\alpha \in O \mid \alpha \text{は原始的、} N(\alpha) = n\} / O^*$$

の個数である。（$\alpha \in O$が原始的とは、$\alpha = d\beta$, $d > 1$は自然数、$\beta \in O$とならないこと、$N(\alpha)$はαのノルム、O^*は環Oの単元の全体)。なお、$r(0,n)$は有限で、nを与えたとき有限個の虚二次体とorderに対するものを除いては0である。

逆に、虚二次無理数τから始めよう。$a\tau^2 + b\tau + c = 0$とする。1とτで生成される格子をLとすると、$a\tau L \subset L$となりLからきまるペー関数は$a\tau$を虚数乗法子として虚数乗法をもつ。したがって、 虚数乗法をもつペー関数の周期比τに対する$j(\tau)$を特異モジュールと呼ぶと、それは虚二次無理数τに対する$j(\tau)$と同値である。そのみたす方程式が (7) の$H_0(X)$で、それがKleinのモジュラー方程式と (8) でむすびついている。

文　献

[1] N.H.Abel, Recherches sur les fonctions elliptiques, J.Reine Angew. Math., 2 (1827), 3 (1828). 全集 1 巻, 263−388.

[2] N.H.Abel, Solution d'un probléme généneral concernant la transformation des fonctiones elliptiques, Astronomische Nachrichten, 6-138 (1828). 全集 1 巻, 403－428。

[3] N.H.Abel, Addition au mémoire précédent, ibid., 7-147 (1829). 全集 1 巻、429－443

[4] C.G.Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, (1829). 全集 1 巻、49－239.

[5] L.Kronecker, Über die elliptischen Funktionen für welche complexe Multiplication stattfindet, 29. Oct. 1857. 全集 1 巻, 179－183.

[6] R.Dedekind, Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, J.Reine Angew. Math., 83 (1877). 全集 1 巻, 174－201.

[7] F.Klein, Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Math. Ann., 14 (1878). 全集 1 巻, 13－75.

[8] H.Weber, Lehrbuch der Algebra, 3 巻、第二版、Vieweg, Braunschweig, (1908).

[9] S.Lang, Elliptic Functions, Addison Wesley, (1973).

[10] D.A.Cox, Primes of the Forms x^2+ny^2, John Wiley., (1989).

[11] 高瀬正仁、虚数乗法論の諸相（一）（二）（三）、プレプリント（1990）。

[12] 高瀬正仁、ガウスの遺産と継承者たち（ドイツ数学史の構想）、海鳴社、（1990）。