L関数の歴史

黒川信重（東京大学数理科学）

L関数のLを最初に使ったのはDirichlet(1837年, 全集第1巻, 311頁(速報), 317頁(詳報))であるが, 何故Lを使ったのかは不明である. ここでは, L(1) を与えるLeibniz(1682年雑誌出版)の有名な級数和 $1-1/3+1/5-1/7+\cdots = \pi/4$ にちなんだものと考えておこう. なお, この級数の歴史は同時期の Gregory(出版せず)との比較が通常なされるが, 1500年ごろのインドにさかのぼるそうである(林隆夫『インドの数学』中公新書, 1993年10月, 259頁).

Dirichletは算術数列の素数定理をL関数のs=1の値が0でないことを類数や単数基準を用いた特殊値表示(Leibnizの公式の拡張)から示して証明し(1837)Gaussの整数環の場合にも拡張した(1840). これを後に Weber(1897) が代数体に拡張を試み, 類体の定式化に至り, Landau(1903) が代数体の算術素イデアル定理を証明した. さらに, Hecke(1917)が代数体のDirichlet L関数に対して解析接続と関数等式を証明し, 量指標のL関数の場合に拡張した(1918/20). ここまでが GL(1) のL関数の歴史である.

次に, GL(2) のL関数は Ramanujan(1916) が $L(s,\Delta)$ の 2次の Euler積表示を予想しMordell(1917)が“Mordell作用素T(p)”(後に“Hecke作用素”と誤称されるようになる)を用いて証明し, 解析接続と関数等式と中心線上に無限個の零点をもつことは Wilton(1929)が証明した. Hecke(1937)はこれを一般のGL(2)の正則保型形式の場合にそのまま拡張したがMordellをほとんど引用せず Wilton に至っては一度も引用していない. いずれにせよGL(2)のL関数をHeckeの名前をつけて呼ぶのは間違っていて, Wiltonが最初にやったのである. その後 GL(2) の非正則(実解析的)な保型形式のL関数は Kober(1935) が行ったが Maass(1949)が普通に引用され, Maass wave form のL関数と呼ばれている. 驚くべきことに Kober はさらに GL(n) の保型形式までも試みた.

GL(n)のL関数の定式化が本格化したのは Matchett(1946) が GL(1) の場合に量指標はGL(1)の保型表現にほかならないことを見て取ったときからである. Tate(1950), 岩澤(1950)がGL(1)の場合を完成し, GL(n)の場合は Gelfand+Piatetskii-Shapiro(1964)や Langlands(1970)の定式化をうけて標準的L関数についてはGodement+Jacquet(1972)が書き上げた.

他の, Artin L関数(Galois表現のL関数) や Hasse-Weil L関数(スキームのL関数)やSelberg L関数(Riemann多様体のL関数)の歴史は前回の報告を参照されたいが, L関数を考える際には「L関数全体は何か？」という問題意識が根底にあることを注意しておきたい. たとえば, 数論で最も基本的なスキーム Spec(Z) を調べることはそのL関数全体を研究することと等価と考えられテンソル圏（淡中圏）の決定に結び付き, Spec(Z) 上の「局所系全体の圏」に至る.

数論的L関数においては「保型L関数以外には新しいL関数はない(一致してしまうという意味で)」と考えるのがLanglands予想(あるいは非可換類体論予想)であって一般に信じられている. この際に「重複度1問題： $L(s,M) = L(s,N) \Leftrightarrow M \sim N$」が大切な問題になってくる. Faltingsは M, N がAbel多様体のときを解いた(Tate予想)し, 代数体の場合にも類似の研究がある. 保型表現の場合は本来の重複度1定理でありGL(n)の場合は出来ており, 逆定理に結び付く. Selberg L関数の場合は砂田利一の解いたGelfandの問題である.

ここで,要約しておくと,L関数の問題は次の７つである：

(1)　L関数のEuler積表示

(2)　L関数の特殊値表示

(3)　L関数の解析接続と関数等式

(4)　L関数の一致(重複度１問題を含む)

(5)　L関数の行列式表示

(6)　L関数の相対テンソル積(Rankin-Selberg convolution など)

(7)　L関数の絶対テンソル積(多重化).

さて,このようにして得られたL関数達をゼータ(L)惑星の生物と見る視点はWeil(1955)によって提出されたが,筆者はこれを進めて完備L(ゼータ)関数の　ＨＯＰＥ　分解(H＝双曲,O＝円,P＝放物,E＝楕円)と地球生物の　カミヨベ　分解(カ＝核,ミ＝ミトコンドリア,ヨ＝葉緑体,ベ＝べん毛)とが大変よく似ていることを注意した(「オイラー積の250年」:1987年10月,現代数学史研究会,京都大学).この類似をたどることによって,細胞融合に対応する絶対テンソル積・多重化という構成法を得る.そのようにして得られる最も簡単な場合である多重三角関数はL(ゼータ)関数の特殊値表示($\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$,...などを含む)や Selberg L関数の関数等式などに使われる.　また相対テンソル積は　Rankin-Selberg convolution (2個の場合)などと呼ばれるが,接合に当たる.このように対応させると,Riemann ゼータ関数$\zeta(s)$は葉緑体になり,Riemann予想は光合成になる.積分表示はタンパク質描像に,行列式表示はＤＮＡ描像に対応する.つまり,行列式表示は生き物のＤＮＡを調べることに当たる.

この行列式表示（正確にはゼータ正規化された行列式表示）は,Malmstén(1849;投稿は1846年5月1日)の後をうけて,ちょうど100年前にLerch(1894)がガンマ関数の場合に与えたのが最初である.Lerchは,これを用いて　"Chowla-Selberg"(1949/67) と誤称されるようになった同一の公式を 1897年に証明している.Chowla-SelbergはLerchもMalmsténも引用していない.Lerch(1897)の公式はLandau(1902)が素イデアル定理の有名な長い論文において１０ページ位にわたり解説しておりSelbergもChowlaも見なかったなどとはもちろん考えられない.なお,よく知られているように,$\zeta(s)$ の行列式表示は Riemann予想と関連しHilbert-Pólya(1915)によって予想されているもののまだみつかっていない.ＤＮＡの無い生き物はいないはずだから絶対見つかるはずであるが,　葉緑体が独立光合成原核生物の共生形であることはSchimper(1885)によって予想されており(共生進化論の起源),Hilbert-Pólya(1915) に対応すると考えられる.その後の歴史を振り返って見ても,ゼータ生物学(数論,数学)は地球生物学から 30年遅れているようである.

Euler, Malmstén, Lerchの結果は

(Ａ)　$1+2+3+\cdots = -1/12$,

(Ｂ)　$1\times 2\times 3\times \cdots = \sqrt{2\pi}$

であり,前者から関数等式が,後者からゼータ正規化積が始まった.ここで,(Ａ)は $\zeta(-1)$,(Ｂ)は $\exp(-\zeta'(0))$ であってともにもともとは発散級数である.このように,普通の意味では無限大になってしまうものから意味のある有限量を引き出すのが数学の醍醐味であって,何もかもコンピュータにまかせればよい,純粋(な)数学者も事務員も証明も数学も不要である,これからは数理だ,などと言うのはそうでもないのである.　なお,Malmstén(1849)

は L'(1) のガンマ関数を用いた公式と s→1－s の関数等式を証明していて, L'(0)がただちに求まる. これが, Lerch(1894,1897)に受けつがれた式である. また, Dirichlet(1837)の L(1)≠0 の証明は L(1) の特殊値表示("Dirichletの類数公式")を示して用いている. これは, 関数等式により L(0) あるいは L'(0) の式になり, Malmstén と一部(偶指標の場合)重なる. L関数を生物とみなす根拠の一つは数論あるいは数学に対する考え方にも求められる. ここでは新しい数や新しいL(ゼータ)を探求することが主題になる. ただし, L(ゼータ)関数については, Euler積を持ち, 複素数全体に解析接続され関数等式を持つことがわかった時点で, ちゃんとしたL(ゼータ)関数の仲間と認められると考えておこう. 新種かどうかという問題 (たとえば, いま問題となっている Fermat予想の"証明"は「楕円曲線のL関数が保型L関数と一致し新種でない」という谷山豊が1955年に提出した問題に帰着する; なお, 最近になって, 谷山予想の名称問題が騒がしくなっていて, 飯高・吉田論文が日本数学会会報に出るそうであり, 他分野の人には現代数学の状況をうかがうに絶好の材料を提供するであろう. この人名呼称はGrothendieckが問題にし非難したことであった:『収穫と蒔いた種と』辻雄一訳, 現代数学社. 数学が人間とは独立な真理を記述するものだとしたら当然である. 命名するのであれば植物学のように命名規則---Linnéによって局所を見ることによって体系化された---に則って行われるべきである. 命名が覆される場合の判定は調査を行う公正な機関に委ねられるべきである. しかし, 他の惑星系との流星バースト通信数学交流のときの人名問題はどうするのだろうか？いずれにせよ, 近い将来「人名を排除した数学史」が書かれねばならない.)は類体論を越えて非可換類体論の定式化も与える重要な問題である. したがって, わたしたちは新種の数あるいは新種のL(ゼータ)関数を探し求めることが本務であって, それはちょうど植物(生物)学者が新しい種の植物(生物)を見つけて報告・登録するのと同様である. なお, L関数の"指標" の違いは生物の性の違いに当たる. これらの新発見の植物が病気の特効薬になるかどうか(新種の数やL関数が日常生活に役に立つかどうか) はもちろん結果としては大事であろうが, 差し当たって(すくなくとも発見に際して)考えるべきことではないであろう. 数理への応用を第一に考えて数学をなし崩しにしていく行き方は改められるべきである. 遺伝子資源問題が現在活発に研究されている. 天変地異に対処するには, あらゆる遺伝子資源を育成して行かねばならない. 人間の浅知恵で優秀なものを選んだと思っているとたん冷害や病気によって絶滅に瀕する. もちろん, 人間が絶滅しても地球あるいは生物体系は平気であるが. 最近の冷害状況を見てもわかるとおり稲の野生種や有機農法等, 日本では切り捨てられてきたものにこそ生きのびる力があるのだ. これは数学および数学の研究法にも当てはまる. 電子を酷使する大掛かりな機材を用いた機械数学コンピュータ派から(A)(B)式などを扱う純虚数学手書派(筆者はここに所属するが, この文章は主催者の要望によってワープロのお世話になっています. 電子に感謝いたします.)まですべてのものがあるべきである. 残念ながら, 現在では機械数学コンピュータ派がほとんどを占めるようになっており電気がなくなった場合や電子の反乱が考えられていない. 数学の特質は何を考えてもよいという自由性にある. 無人島でできない数学とは一体何なのだろうか？ ゼータ(L)惑星の探検は発散級数に興味を持つ夢みる人ならだれでもできる. 電気もコンピュータもいらない. 必要なのは瞑想と紙と鉛筆(なければ土や砂に書きつけてもよい)のみである. ゼータ(L)惑星の歴史は地球の歴史に退化して反映されるに違いない. (1993年10月津田塾数学史研究会発表)