代数的数論 —— Zolotareff の場合

三宅克哉（東京都立大　理）

1．数学史として「代数的数論」の成立課程を見るとき，その最大の転機のひとつが，一般の（有限次）代数的数体における「因子論」の確立である．先ず Kummer [Ku 1-3] は円分体において「因子論」が整合的に成立しうることを提示し，これをプロトタイプとして Kronecker [Kr3] と Dedekind [De1-6] がその一般化を競ったことはよく知られている．またすでに Dedekind が 1878 年の [De3] の序文と二箇所の脚注で触れているように，Zolotareff も理想数に関する理論を発表している．（これについては最近出版さた Kolmogorov and Yushkevich の編集になる [KY] に記事がある．平松豊一氏はこのシムポジウムのあとで筆者にそれを教示された；感謝する．）

しかし，当然のことながら，これらの数学者達にとっては一般論としての「因子論」の確立が最終目的であったわけではなく，これに取り組んだ，あるいは取り組まざるを得なかった明快で，強い数学的な問題意識があった．例えば Kummer にとっては Gauss 以来の「高次冪剰余の相互法則」の樹立が大眼目であった；実際，一般の素数次についての長大な論文 [Ku4] が著されることになる；この意味では Kummer は円分体を扱えば十分であったろう（もっとも必然的にその上のいわゆる Kummer 拡大を研究しなければならなくなる）．また Kronecker は，自己の強い数学観から，師 Kummer が提示した「理想数」に対して明確な数学的な表現を与えなければならないという問題意識を持っていた．さらに同時に，アーベルの影響のもとで，虚数乗法を持つ楕円関数とそのモデュライについて深く観察を進めて明確な方向を見い出していた（[Kr 1, 2]）；「虚２次体については，そのす

べての『理想数』が自然な拡大体において『実際の（複素）数』によって表現される」（単項化定理）．おそらく Kronecker にとってはこの現象が明確に浮かび上がる形で代数的数論が展開されなければならなかった．

一方 Dedekind は 1871 年に [De1] によって初めてイデアルの概念を提示するが，ここではすでに一般の代数的数体とその「因子論」が明確に意識されて与えられている．しかし 1900 年に出版された純 3 次体に関する詳細な研究 [De7] は，彼自身の言によれば，もともと 1871 年ないし 1872 年にまとめたものが骨格になっており，これが以後の彼の代数的数論研究のよりどころになっている；特に 2 次体に関する Dirichlet [Di 1-3] の解析的な理論を非アーベル的な純 3 次体で展開することが強く意識されていたものと思われる（[M2] を参照のこと）．

さてそれでは Zolotareff の「因子論」はどのような数論的背景から浮かび上がってきたのだろうか？　これがこの小論のテーマである．その答えは「楕円積分が初等的に不定積分出来る場合の研究」である．しかしこの微積分の問題がどうして Zolotareff を「因子論」へと向かわせたのか？　以下に見る数学の展開を今思い浮かべることが出来る人はあるまい．

2．事は Abel に始まる．いわゆる Crelle Journal が発刊されたその年，1826 年に彼は論文 [A1]，

Sur l'intégration de la formule différentielle $\dfrac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, R et ρ étant des fonctions entières,

を出版した．彼自身が楕円関数に関する大論文 [A2] を著して時代を画する前年のことであり，まだ楕円関数は存在していなかった．まず x の多項式 P, Q, R を与え，

$$\int \frac{M\,dx}{N\sqrt{R}} = \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$$

を満たす多項式 M, N と P, Q, R との関係を取り出した後，$\rho = \frac{M}{N}$ が多項式になる場合にこのような ρ ないし R を特徴づけて行く．関係式 $P^2 - Q^2 R = N$ が成り立つことから，$\sqrt{R}$ の連分数展開を考察する．特に R の次数は偶数で，それを $2n$ とすれば ρ の次数は $n-1$ となり，また log の中を２乗して P', Q' を選んで

$$\int \frac{2\rho\, dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{P' + Q'\sqrt{R}}{P' - Q'\sqrt{R}}$$

を得る；しかも P' と Q' が共通因子を持たないように取れば $P'^2 - Q'^2 R = a$, a は定数，となる．結論として，$\sqrt{R}$ の連分数展開が周期的で，周期が回文的になる場合に，その周期部分から得られる有理式 $y = \frac{P'}{Q'}$ とそれから定まる多項式 2ρ によってこの積分関係式が満たされることが示される．（この場合 log の中の分母を有理化すれば，上式右辺は $\log(P'' + Q''\sqrt{R})$ + constant の形になり，しかも $P''^2 - Q''^2 R = a'$, a' は定数，である．）

この論文の最終節で Abel は R が４次の場合を調べ，$R = x^4 + 4x^2 + 8x + 4$, $2\rho = 12x + 4$, に対応する実例を与えており，さらに $R = \left(x^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{5}-1\right)^2 x$, $\rho = x + \frac{\sqrt{5}+1}{14}$ の場合も同様に対数関数で積分されると述べている．また興味深いことに，論文の最後に彼は次のようなコメントを付けている：この形の積分が対数関数で表されるならば結果はすべて $\log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$ の定数倍の形になるという注目すべき定理（ce théorème remarquable）が得られており，これを機を改めて証明する．しかし楕円関数はここではまったく触れられてはおらず，それを仄めかすものは見当たらない．

３．この Abel の結果は，定性的には明快ではあるが，与えられた R についての連分数展開に関わる彼の条件が満たされているかどうかの判定は原理的には不可

能である；例えばあらかじめ連分数展開の周期の長さを押さえることが出来ない．

1861 年に Tchebichef は [Tc] で R が 4 次の場合，すなわち

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx \qquad (*)$$

が対数関数によって積分されるためのひとつの判定法を与えた．但し，我々にとって興味深いことに，彼の方法は係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が有理数である場合に限られる．実例として上記の Abel の第一の例を取り上げ，さらに $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+5x^3+3x^2-x}}\,dx$ はどのような A に対しても対数関数によって積分されることがない，としている．しかし証明は全く与えられていなかった．

これに完全な証明を付けたのが [Tc] と同じ Liouville の Journal に1874 年に発表された Zolotareff [Z1] である．Zolotareff は当時のペテルスブルグにおける Tchebichef 門下の駿英で，27 歳であった．彼はこの年に博士号を得，1876 年にペテルスブルグ大学の教授に迎えられると共に，ペテルスブルグ科学アカデミー会員に選ばれている；しかし惜しむらくは，車との事故から敗血症によって 1878 年に他界してしまう（Kolmogorov and Yushkevich [KY]）．

没後に出版された「因子論」の論文 [Z2] の序文では，Zolotareff は，[Z1] で証明を与えた Tchebichef の方法を係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が「どのような実数値」〈des valeurs réelles quelconques〉の場合についても対応できるようにするために Kummer の理論の一般化を図った，と明言している．さらに Selling [S] や Dedekind [De1] にも触れた上で，Kummer のものに匹敵する理論は未だなし，としている．Selling [S] には根本的な欠陥があるので論外とする．筆者の見るところ，Zolotareff は Kummer の理論をまさにそのまま擦って行く形で進めており，具体的に応用する観点から見た Kummer の利点を評価してそのまま受け継いでいる．これに対し当時の時代を越えていた Dedekind の定性的な，とくに最初の [De1] での控えめな理論展開は，無限集合を初めて正面切って用いた事もあり，Zolotareff には到底満足出来るもの

ではなかったものと思われる．Zolotareff [Z1] を手にして，一方で Kummer の健全性と，他方で Dedekind [De1] の画期的であったことについて，その歴史的な意味が実感される．

また上に Zolotareff の言葉〈des valeurs réelles quelconques〉をそのまま書き写した．Kummer [Ku2] の題名，Zur Theorie der complexen Zahlen，とか Zolotareff [Z1]，Sur la théorie des nombres complexes，あるいは Selling [S] のそれを見てもわかるように，これらにおいて〈des nombres complexes〉は今日の「一般の複素数」ではなく，代数的な複素数を指していた．従って Zolotareff の〈des valeurs réelles quelconques〉も「代数的な実数」と解すべきであり，特に上記のアーベルの例，

$$R=\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2 x, \qquad \rho = x+\frac{\sqrt{5}+1}{14},$$

の場合，が強い刺激を与えていたものと推測される．

4．「因子論」との関わりを浮かび上がらせるために，以下に Tchebichef の方法の概略を紹介する．Tchebichef もまず注意していることであるが，与えられた $R(x) = x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ に対して，（＊）の積分が対数関数で表わされるとしてもそれは唯一の定数 A に限る．実際，もし異なる二つの A の値に対してそうなるとすると，差をとれば楕円関数が対数関数で表わされることになるからである．

さてまず Jacobi の変換を利用して $z=\dfrac{x^2+c'+\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}{2x+c}$ により

$$\int\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{z+B}{\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}}\,dz+\frac{1}{2}\log z$$

と変換する；ここで $B=-\dfrac{\alpha}{2}+2A$ で，c, c', l, m, n はすべて $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の簡単な有理式であり，逆の変換は $x=\dfrac{z^2-\frac{\alpha}{2}z+\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}}{2z}$ で与えられる．従って積分 $\displaystyle\int\frac{z+B}{\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}}\,dz$ を考えれば十分である．さらに $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ がすべて

有理数であるから z（と B）を適当な整数倍で置き換えて，l, m, n はすべて整数であるとしてよい．

この積分が対数関数で与えられるとしよう．記号を節約することにして $R = R(z) = z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$ と書く．このとき，第2節で見たように，z の多項式 P，Q によって $P^2 - Q^2 R = a$，a は定数，となる．ところが $R(0) = 0$ であるから，$P(0) = b$ と置くと，$P^2 - Q^2 R = a = b^2$，すなわち

$$Q^2 R = P^2 - b^2 = (P - b)(P + b)$$

である．ここで（1）P の次数が奇数の場合と（2）偶数の場合にわける．

まず（2）を考える．最後の2項 $P - b$ と $P + b$ は互いに素であるから Q は $Q = Q_1 \cdot Q_2$ と分解されて ${Q_1}^2$ が $P - b$ の，${Q_2}^2$ が $P + b$ の因子となる；R と $P - b$ は共に $z = 0$ で値が0になるから，結局

$$P - b = \pm {Q_1}^2 \cdot R, \qquad P + b = \pm {Q_2}^2$$

であるか，R が有理整数上で分解されて

$$R = (z^2 + pz) \cdot (z^2 + rz + s),$$

$$P - b = \pm {Q_1}^2 \cdot (z^2 + pz), \qquad P + b = \pm {Q_2}^2 \cdot (z^2 + rz + s)$$

となる；しかも

$$s(p^2 - pr + s) = \text{平方数，かつ，} 4s - r^2 > 0 \text{ または } pr - 2s > 0 \qquad (**)$$

が成り立つことになる．

始めの場合は2式の差をとって，次数の低い式 ${Q_2}^2 - {Q_1}^2 R = \pm 2b$ が得られるから，結局は後の場合にたどり着く．次の（2－1）は明らか：

（2－1）$p = r$ のとき：$B = \frac{1}{2} p$ に対して積分は対数関数で与えられる．

（2－2）$p \neq r$ のとき：変換 $z_1 = \dfrac{(p-r)^2 (z^2 + pz)}{(r-p)\, z + s}$ によって

$$R_1 = (z_1{}^2 + p_1 z_1)\cdot(z_1{}^2 + r_1 z_1 + s_1),$$
$$p_1 = p(p-r) + 2s + 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\ ,$$
$$s_1 = (p-r)^2\cdot[p(p-r) + 2s - 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\ ],$$
$$r_1 = (p-r)^2 + p(p-r) + 2s - 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$$

の場合に移る；ここでは（＊＊）の第二の不等式の条件は自動的に満たされ，従って第一の条件

$$s_1\,(p_1{}^2 - p_1 r_1 + s_1) = \text{平方数} \qquad (＊＊＊)$$

のみが意味を持つ．

さて（２）の場合の結論は次のようになる：

問題の積分が対数関数で表わされるならば，（＊＊）を満たす分解が存在し，さらに高々（$rp - 2s + 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$ の素因数分解に現われる素数の指数）以下の回数だけ（２－２）の変換を繰り返せば（２－１）の場合に帰着される．従って（＊＊）を満たす分解が存在する場合に，問題の積分が対数関数で表わされるかどうかのイフェクティヴな判定法が与えられた．

（１）の場合は（２）の場合ほど端的なアルゴリズムではなく，本節始めに触れた Jacobi 変換に頼ることになる．変換

$$z_1 = \frac{z^2 + \dfrac{l}{2}z - \dfrac{l^2 - 4m}{8} + \sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}{2z + \dfrac{(l^2 - 4m)^2}{4\,(l^3 - 4lm + 8n)}}$$

によって積分は次のようになる：

$$\int \frac{z + B}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{z_1 + B'}{\sqrt{z_1{}^4 + l_1 z_1{}^3 + m_1 z_1{}^2 + n_1 z_1}}\,dz_1 + \frac{1}{2}\log z_1\ ;$$

ただし

$$l_1 = -l - \frac{(l^2-4m)^2}{2(l^3-4lm+8n)}, \quad m_1 = -2m + \frac{3l^2}{4}, \quad n_1 = -n + \frac{lm}{2} - \frac{l^3}{8}.$$

もしこの変換が巡回的，すなわち，z から始めて $z_1, z_2, \dots, z_\nu$, と続けて $z_{\nu+1} = z$ と元にもどるならば，積分の公式の右辺の積分に $\frac{1}{2}$ が掛かっていることから，左辺の積分が対数関数で表わされることになる．ところが有理整数 l, m, n から出発してこの変換を繰り返すとき，各段階の $X = l_i, Y = m_i, Z = n_i$ はすべて，方程式

$$Y^2 - 3XZ = m^2 - 3ln,$$

$$Z^2(4X^3Z - X^2Y^2 - 18XYZ + 4Y^3 + 27Z^2)$$
$$= n^2(4l^3n - l^2m^2 - 18lmn + 4m^3 + 27n^2)$$

を満たす．しかもこの変換が巡回的であれば各段階の l_i, m_i, n_i がすべて整数となる．逆にこれらの連立方程式の整数解は，まず第２式から右辺の整数の約数として Z は有限個であり，しかも各 Z について X，Y は明らかに有限個である（Y は高々６個で X は Y，Z に対して第１式から確定する）．よってこの変換が巡回的であるための必要十分条件は各段階の l_i, m_i, n_i がすべて整数となることであり，これは与えられた有理整数 l, m, n に対してイフェクティヴに判定される．

以上によって，有理数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対する積分 $\int \frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}dx$ が適当な定数 A を取ったときに対数関数で表わされるかどうか，を判定し，さらにその表示を具体的に求めるためのアルゴリズムが得られた．

またこの方法で，例えばアーベルが示唆した例

$$\int \frac{\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{14}\right)dx}{\sqrt{\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+(\sqrt{5}-1)^2x}}$$

を扱うための理論的背景に代数的整数の環 $\mathbb{Z}[\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$ における「因子論」が必要

なことも了解されよう.

5. 代数的数論が，特に高木- Artin の類体論によって，数学の重大な分野として確立される歴史的な過程を見るとき（[M1] 参照），実に奇異に思える二つの事件がある. ヨーロッパ（ないし，代数的数論確立の表舞台のドイツ）から見て異境の地の2人の異境の人が，相次いで，しかも唐突に，それに決定的な影響をもたらした；その一つは高木貞治 [T1] による類体論とそれによる「Kronecker の青春の夢」の解決であり，他は N. Tschebotareff [Ts] による「Frobenius の予想」（[Fr]）の解決である；これらが Artin [Ar] の「一般相互法則」に決定的な影響を与えたことは良く知られている（[M 3, 4] 参照）. 例えば Hilbert は彼の有名な問題 [H] のなかで「相対アーベル拡大の構成問題」として「Kronecker の青春の夢」を挙げているが，類体についても「Frobenius の予想」についても全く触れていない.

高木の「回顧と展望」（[T2]，附録1）によると，彼は先生の藤沢利喜太郎の影響で代数学を学ぶ.（藤沢はベルリンで Kronecker の講義を聴いたという.）例えば Serret の「高等代数」（[Se]）， Weber の「代数学」（[W]）の第一巻，第二巻などを読む. そして留学し，ベルリンを経て 1900 年に Hilbert にゲッティンゲンで会ったときに，高木は自分から「Kronecker の青春の夢」の Gauss 体の場合をやりたいといっている. 彼は，Hilbert に「『お前は代数体の整数論をやるというが，本当にやる積もりか？』とえらく懐疑の眼を以って見られた。何分あの頃，代数的整数論などというものは，世界中でゲッティンゲン以外で殆ど遣って居なかったのであるから，東洋人などが，それを遣ろうなどとは，期待されなかったのに不思議はないのである」と書き，さらに 1920 年のストラスブルグでの「万国数学会議」で彼が自分の「類体論」を報告したときには，ほんの数人しか理解を持た

なかったとしている.

他方 N. Tschebotareff と上記の彼の仕事の歴史的な背景については，今筆者の十分に知るところではない. 金光 [K] により「ペテルブルク派の代数的数論研究の嚆矢」を放ったとされる M. G. Zolotareff を今回筆者が取り上げたのは，このような問題意識に根ざしていたのであった.

文 献

[A1] N. H. Abel. Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, R et ρ étant des fonctions entières, Jour. reine angew. Math. Bd.1 (1826), 185-221 = Œuvres complètes I, 104-144.

[A2] _____. Recherches sur les fonctions elliptiques, Jour. reine angew. Math. Bd.2 (1827), 101-181, Bd.3 (1828), 160-190 = Œuvres complètes I, 263-388.

[Ar] E. Artin. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1927), 353-363 = Collected Papers, 131-141.

[De1] R. Dedekind. Supplement X. Über die Komposition der binären quadatischen Formen, von Vorlesunge über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet (2. Auflage), 423-462, (1871) = Werke III, 223-261.

[De2] _____. Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques, Paris, Gauthier-Villars, 1877, 1-121, Bulletin des Sci. math. astron., 1er série, t. XI, 2^{e} série, t. I, 1876, 1877 (= Werke III, 262-296).

[De3] _____. Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen, Abh. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Bd.23 (1878), 1-23 = Werke I, 202-230.

[De4] _____. Supplement XI. Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet (3. Auflage), 515-530, (1879) = Werke III, 297-313.

[De5] _____. Supplement XI. Ueber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet (4. Auflage), 434-657, (1893). Reprint from Chelsea, New York, 1968.

[De6] _____. Zur Theorie der Ideal, Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1894, 272- 277 = Werke II, 43-48.

[De7] _____. Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern, Jour. reine angew. Math. Bd.121 (1900), 40-123 = Werke II, 148-233.

[Di1] P.G. Lejeune Dirichlet. Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.18 (1838), 259-274 = Werke I, 357- 374.

[Di2] _____. Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale á la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.19 (1839), 324-369, Bd.21 (1840), 1-12 und 134-155 = Werke I, 411-196.

[Di3] _____. Recherches sur les formes quadratiques á coefficients et indetérminées complexes, Jour. reine angew. Math. Bd. 24 (1842), 291-371 = Werke I, 533-618.

[Fr] G. Frobenius. Über Beziehungen zwischen Primzahlen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Sitzungsb. kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin (1896), 689- 703 = Ges. Abh. II, 719-733.

[H] D. Hilbert. Mathematische Problem. Vortrag auf dem internationalen Mathematiker Kongresse in Paris 1900, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 7 (1900), 253-297 = Ges. Abh. III, 290-329.

[K] 金光　滋. ロシアの数論の歴史, 現代数学史研究会編 現代数学のあゆみ 3, 日本評論社, 1990, pp.112-127.

[Kr1] L. Kronecker. Über die elliptische Functionen, für welche complex Multiplication stattfindet, Monatsb. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1857), 455-460 = Werke IV, 177 -183.

[Kr2] _____. Über die complex Multiplication der elliptischen Functionen, Monatsb. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1862), 363-372 = Werke IV, 207-217.

[Kr3] _____. Grundzüge einer arithmetschen Theorie der algebraischen Grössen, Jour. reine angew. Math. 92 (1882), 1-122 = Werke II, 237-388.

[Ku1] E. Kummer. Über die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen, Jour. reine angew. Math. Bd. 30 (1846), 107-116 = Collected Papers I, 193-202.

[Ku2] _____. Zur Theorie der complexen Zahlen, Monatber. kgl. preuss. Wiss. Berlin (1845), 87-96 = Jour. reine angew. Math. Bd.35 (1847), 319-326 = Collected Papers I, 203 -210.

[Ku3] _____. Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complex Zahlen in ihre Primfactoren, Jour. reine angew. Math. Bd.35 (1847), 327-367 = Collected Papers I, 211-251.

[Ku4] _____. Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist, Math. Abh. der König. Akad. Wiss. Berlin (18 59), 19-159 = Collected Papers I, 699-839.

[KY] A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich (Edit.). Mathematics of the 19th Century, Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory, Birkhäuser, Basel·Boston·Berlin, 1992.

[M1] K. Miyake. The Establishment of the Takagi-Artin Class Field Theory, Preprint series 1990, No.12, Coll. Gen. Educ., Nagoya Univ. Submitted to Proceedings of The Tokyo History of Mathematics Symposium 1990.

[M2] _____. デデキントの数論について，津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 1 (1991), 22-31.

[M3] _____. アルティンの相互法則について，津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 4 (1992), 44-53.

[M4] _____. フロベニウス自己同型写像について，津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 6 (1993), 31-43.

[S] E. Selling. Über die idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln einer beliebigen irreductibeln Gleichung rational gebildet sind, Schlömilch's Zeitschr. für Math. u. Phys. 10 (1865), 17-47.

[Se] J. A. Serret. Coure d'algègre supérieure, troisième édition, Gauthier-Villar, Paris, 1866.

[T1] T. Takagi. Ueber eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Toky 41 (1920), 1-133 = Collected Papers, 73-167.

[T2] 高木貞治. 近世数学史談，第2版，共立出版，1942.

[Tc] M. Tchebichef. Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$, Bull. l'Acad. Impér. sci. St.-Pétersbourg, T. III (1861), 1-12 = Œuvres I, 517-530.

[Ts] N. Tschebotareff. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann. 95 (1926), 191-228.

[W] H. Weber. Lehrbuch der Algebra, Vol. I - III, Braunschweig, 1894, 1896, 1908.

[Z1] M. G. Zolotareff. Sur la Méthode d'intégration de M. Tchebichef, Journ. de Math. pures appl. 2e série, 16 (1874), 161-188.

[Z2] _____. Sur la théorie des nombres complexes, Journ. de Math. pures appl. 3e série, 6 (1880), 51-84, 129-166.