アーベルと特異モジュラー方程式

笠原　乾吉（津田塾大学）

0．　虚数乗法を持つ楕円関数の母数を特異母数といい、それが満たす方程式を特異モジュラー方程式という。それに関する1857年のKroneckerの発見については、前回に高瀬正仁氏が詳しく論じられ([6])、Kroneckerに続くHermite(1859年)、Smith(1865年)、Dedekind(1877年)などの研究について前回までに触れた([3],[4])。

Kronecker(やHermite)は結果を述べただけで証明を発表していないのに、予想とは言わないで、当時の人が定理のごとくに信じているように見えるのは、不思議である。彼等の言明が、楕円関数がエスエヌからペーへ、母数がkからjへと変遷しながらどう確かめられていったか、その歴史はまだ部分的にしか私は調べていない。今回は、1857年頃の状況において、Kronecker達がどうやってこの結果にたどり着いたか、それを探りたい。しかし、Hermiteには1836年のSohnkeのモジュラー方程式の研究が影響を与えているが([4]、20頁参照)、Kroneckerは彼自身がいうように([6]、5頁、6頁参照)、先行者はAbel(1827～1828年)だけのように思える。それで、Abelの状況について少し振り返ってみたい。

1．　まず、簡単な年表をかいておく。

1827年3月　Abel「楕円関数研究　第1部」完成。

4月終わり～5月20日　Abelはベルリンを立ち、オスロに帰る。

9月　Jacobiの2つの手紙（楕円関数の変換の公式）が載った、「天文学報知 123号」発行。

9月20日　Crelle J. 第2巻第2分冊発行。上記のAbelの「第1部」が掲載。

12月12日　Crelle J. 第2巻第3分冊発行。「問題と定理」という欄に、Abel が提出したものあり。

12月　Jacobi の上記公式の証明が載った「天文学報知 127号」が発行。

1828年1月12日　Crelle J. 第2巻第4分冊発行。

2月12日　Abel「楕円関数研究第2部」完成（Crelle J. 第3巻第2分冊に掲載）。

3月29日　Abel「代数的に解きうる方程式の特別なクラスについて」完成（Crelle J. 第4巻　1829年に掲載）。

5月27日　Abel「楕円関数の変換に関する一般的問題の解決」完成（天文学報知 138号に掲載）。

9月25日　Abel「前論文への補足」完成（天文学報知 147号 1829年に掲載）。

1829年4月6日　Abel 死す。26才8ヶ月。

この表をみて、Crell J.（正式名称は Journal für die reine und angewandte Mathematik）にしても、天文学報知（Astronomische Nachrichten , herausgegeben von Schumacher）にしても、その発行回数の多さに驚く。また、27年12月号に載った上記の Jacobi の論文の投稿日は11月18日で、その早さにも驚く。

2．　Abel の「楕円関数研究第1部」には、まだ変換理論も虚数乗法も現れない。それが現れる第2部との間の、Crell J. 2巻3分冊の「問題と定理」という欄に、Abel は次の4問を出す。（面白いので楕円関数と関係のないものも書いておく。また、この「問題と定理」については後述。）

（49）定理．　$\forall x\ (0 < x < \alpha)$ に対し $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots = 0$

$$\Rightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_m = \cdots = 0$$ 。

（50）問題．　$\forall x \ (0 < x < \alpha)$　に対し　$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$

が収束していると仮定。

このとき、$x \to \alpha$ としたときの $f(x)$ の極限をみつけること。

（51）定理．　$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, a$ を実数とするとき、変数分離形の微分方程式

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4}}$$

が代数的に積分可能とすると、a は有理数でなければならない。

（52）問題．　次の変数分離形微分方程式の代数的な積分を求めよ。

$$\frac{\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{3 + 3x^2 + x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{3 - 3y^2 + y^4}}, \quad \frac{\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2 + y^4}}$$

Abel は「研究第２部」で、（51）を定理として証明なしで述べ、また微分方程式の形はこのままではないが、（52）にも解を与えている。

３．　Crelle J. は第２巻から「問題と定理」という欄を設けた。原名「Aufgaben und Lehrsätze , erster aufzuläsen , letztere zu beweisen.」で、日本語に訳した感じとはかなり異なる。また、アーベル全集[1]では「定理と問題」と変えている。Abel の伝記「C.A.Bjerknes , NILES-HENRIK ABEL」は、1884年に仏語版が出て、その日本語訳（[2]）が1991年に出た。1992年に JACQUES GABAY 版として出た Abel 全集（[1]）の第２巻の附録になっており、今は容易に仏語版を見ることができる。（前にあげた年表の大半は同書のお世話になった)。この本の § XII は、大半をこの Abel の「問題と定理」がいつ書かれたかの追及にあてられている（[2] 148頁～155頁、[1] 第２巻附録 155頁～162頁)。Bjerknes はその時期を決めることが歴史的に主要なこと (l'objet principal) であるという。その理由は、（51）、（52）が代数的に積分可能となってい

て、Jacobiなどが求めていた有理関数解をこえていることらしい。それが、Jacobiより先行していることを立証したいのだろう。しかし、(51)(52)の内容を「楕円関数の変換に関する極めて高度な問題」というだけで、説明をしないのだから、読者は理解困難と思われる。しかし、当時の交通手段や所要日数の説明があり、手紙を送る費用なども書いてあったりして、なかなか面白い。

4． Jacobiは Legendre 等の変換理論の系譜に入るが、Abelはどちらかというと等分理論の系譜に入り、そして変換理論も征服してしまったと思う。「研究第1部」の§Vで、等分方程式の代数的可能性を変換方程式(Weberの本のモジュラー方程式)の代数的可能性に還元した後で、「しかし、一般にはこの方程式は代数的に解けないと思う。しかし、いくつかの場合、例えば $e=c$，$e=c\sqrt{3}$，$e=c(2\pm\sqrt{3})$ 等々の時には完全に解くことができる。」と述べている。「研究第2部」は§VIIIから始まり、そこでは $e=c$ のとき、つまり乗法子 i の虚数乗法をもつときのn等分(但し、$n\equiv 1 \bmod 4$)を実行している。§IXで変換理論を展開し、§Xで有名な言明「虚数乗法子は虚2次無理数である。特異母数は代数方程式を満たすが、その方程式には代数的可解でないものが表われるだろう」と述べる。しかし、2月12日付の「研究第2部」ではそうだが、5月27日付の「・・・の一般的解答」になると、この特異モジュラー方程式の根はすべてベキ根で表わされると言明している。このあたりは高瀬[5]、Vladut[7]等に詳細に紹介されているので、ここでは省略する。

Kronecker, Hermiteの先行者はAbelだけといってよいと思う(わずかに、Sohnkeなどのモジュラー方程式研究があるが)。Abelは変換問題の一般的な解答を持っており、乗法子を虚数とし、新旧母数を同じとおけば、虚数乗法である。根の形状がどのようになっていれば代数的可解か、これはAbel方程式の発見であり、AbelやKroneckerは熟知している。だから、彼等には特異モジュラ

一方程式が代数的可解なことは、はっきりと目に見えたのであろう。そして、Abel にはそちらが出発点であったが、虚数乗法を持つ楕円関数に対しては、変換方程式、したがって等分方程式が代数的に可解なことが目に見えたのだろう。

後者について、最近次のことを知った（Vladut〔7〕P.55 ~ P.56）。楕円関数が虚数乗法を持つときは、任意の素数 n に対し周期 n 等分方程式は Abel 方程式で代数的可解である。虚数乗法を持たないときは、その楕円関数によって決まる素数の有限集合 S があり、S に属さない素数 n に対しては、周期 n 等分方程式は代数的に可解でない。例外集合 S をきめることはデリケートで、少しの場合しかわかっていない。

最後の所は Serre の1973年の結果だそうで、Abel から Serre までの間も、いつか調べてみたい。

文献

[1] Abel 全集、JACQUES GABAY 版、（1992）.

[2] C.A. ビエルクネス（辻 雄一 訳）、わが数学者アーベル ―その生涯と発見―、現代数学社、（1991）.

[3] 笠原 乾吉、モジュラー方程式について（続）、津田塾大学数学・計算機科学研究所報、4（1992）、26－31.

[4] 笠原 乾吉、エルミートのモジュラー方程式、津田塾大学数学・計算機科学研究所報、6（1993）、19－30.

[5] 高瀬 正仁、ガウスの遺産と継承者たち ―ドイツ数学史の構想、海鳴社（1990）.

[6] 高瀬 正仁、クロネッカーの数論の解明、津田塾大学数学・計算機科学研究所報、6（1993）、1－18.

[7] Vladut , Kronecker's Jugendtraum and Modular Functions , Gordon and Breach ,（1991）.