クロネッカーの数論の解明
II. アーベル方程式の構成問題への道

高瀬　正仁　（九州大学）

［目次］

［内容要約］

はじめに．　クロネッカーの数論における「基本五論文」が指摘され、本稿の基本方針が明示される。

1．ガウスの円周等分方程式論の中に萌している新しい代数方程式論の芽が指摘され、全体の土台をなす基礎的認識と、究明の指針となる二つの基本問題が提示される。

2．アーベルが遺したいくつかの断片を素材として、アーベルの理論の全容の再建が試みられる。

3．クロネッカーの代数方程式論の形成のプロセスが検証される。アーベル方程式の構成問題を中核とするクロネッカーの理論の中に、アーベルの理念が生き生きと息づいている様子を概観する。

4．アーベル方程式の構成問題をクロネッカーの数論的世界の中に適切に配置して、その意義を考察する。特に、この問題が虚数乗法論の契機として作用

することを指摘する。

はじめに

レオポルド・クロネッカーは１８２３年１２月７日にドイツのリーグニッツで生まれ、１８９１年１２月２９日、ベルリンにおいて満６８歳の誕生日の直後に生を終えた数学者である。数学者としてのキャリアの始まりは早く、すでに１８４５年には、一頁のノート（第一論文）

［K－１］　すべての素数 p に対して、方程式 $1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}=0$ は既約であることの証明　［クロネッカー全集 I, pp. 3－4, では二頁に渡っているが、初出はクレルレ誌 29, p. 280 で、ここでは一頁である。］

とともに、リーグニッツのギムナジウム以来の敬愛する先生であるエルンスト・エドヴァルト・クンマー（１８１０－１８９３）に捧げられた学位論文

［K－２］　複素単数について　［１８４５年9月１０日付。全１６章。１８８２年になって、クレルレ誌 93, pp. 1－52 に増補版（全２０章）が掲載された。クロネッカー全集 II, pp. 5－73.］

が書かれてベルリン大学に提出されている。この年、クロネッカーはわずかに２２歳である。研究活動の息の長さも尋常ではない。思索の実りの報告は毎年のように行なわれ、５０代に入り、６０代に至っても衰えを示す気配は見られなかった。実際、

１８８１年には長大な作品

[K－3]　代数的量のアリトメティカ的理論の概要　[１８８１年9月１０日付。クンマーの学位取得５０年を祝う記念論文として書かれた。「9月１０日」という日付は３６年前の学位論文の日付と同じだが、これは必ずしも偶然の出来事とは思われない。なぜなら、この論文の「まえがき」に明記されているように、この記念論文は学位論文の延長線上に位置するべきものと考えられているからである。初出はクレルレ誌 92，pp．1－122，１８８２年。発表年度が学位論文の増補版の発表と同年であることも、併せて想起しなければならない。同上，pp．239－388．]

が現われているし、１８８３年の春には、死の前年（１８９０年）まで書き継がれた晩年の連作

[K－4]　楕円関数の理論　[I － XIII．全集 IV，pp．347 － 495； XIV － XXII．全集 V，pp．3 － 132．論文 I － III は１８８３年 4 月１９日にプロイセン王立科学学士院（以下、「学士院」と略称する）で読み上げられた。論文 XXII の学士院朗読は１８９０年 7 月３１日。初出はすべて同学士院議事報告。]

の公表が開始されている。そうして生涯の最後の年（１８９１年）にもなお、不思議な輝きを内に秘めた作品

[K－5]　ルジャンドルの関係式　[学士院議事報告，１８９１年，pp．323 － 332，345 － 358，447 － 465，905 － 908．学士院朗読は１８９２年 4 月

２日。全集Ｖ，pp．135 － 184．]

の出現が認められるというふうである。だが、それだけにいっそう、１８４５年から１８５３年まで、８年にも及ぶ特異な空白期は、クロネッカーの人と数学に関心を寄せる我々の心に、不可解な奇異の念を呼び起こすのである。

１８４５年の一頁のノートと学位論文に次いで、１８５３年、クロネッカーは

[K－６]　代数的に解ける方程式について（第一論文）　[１８５３年6月２０日、学士院にて読み上げられ、同学士院月報 pp．365 － 374 に掲載された。朗読者はレジューヌ・ディリクレ（１８０５－１８５９）。後述するように、１８５６年に同じ表題をもつ続篇が書かれているので、両者をそれぞれ第一論文、第二論文と呼んで区別する。全集Ⅳ，pp．3 － 11．]

という表題の論文を公表した。この間、実に８年という歳月が経過して、クロネッカーは２９歳になっていた。ハインリッヒ・ウェーバー（１８４２－１９１３）は、「ドイツ数学者協会の最後の集まりの日からこのかた、我々の学問は取り返しのつかない損失を嘆き悲しまなければならない。レオポルド・クロネッカーはもう我々の間にはいない・・・」という美しい言葉に始まる追悼記

[W]　レオポルド・クロネッカー　[数学年報 43，pp．1 － 25．１８９３年．]

の中で、この間の事情に触れてこんなふうに語っている。

クロネッカーの人生の中で、その活動の大部分が家庭の事情に費やされてい

た一時期 ——— そのうえ、この時期には、彼は身体上の病苦に悩まされていた ——— をはっきりと示しているのは、公にされた論文の系列中に認められる断絶である。

１８４５年から１８５３年の間については、私の目にとまる記録するべき刊行物はひとつもない。」［［W］，p.５.］

家庭の事情や病苦による障害。しかしクロネッカーは数学者として無為の日々を送っていたのではない。ウェーバーはさらに言葉を重ねている。

この時期にも学問の面で怠惰であったわけではないし、ひょっとしたらまさにこの時期にこそ、学問上の進展と成熟の時を求めなければならないのかもしれない。たとえ我々は知らないにせよ、彼はこの時代を通じて学問に関する熱のこもった文通、わけても友人クンマーとの手紙のやりとりを続けていた[1]。その文通の成果が、上記の推定を立証するのである。［同上，p.５.］

１８５３年の論文［K－６］をめぐる小さな物語も書き留められている。

１８５３年５月、彼は、再び公の世界に現われた際に最初に携えていた研究成果を、パリへの旅の途次、ベルリンに滞在した折にディリクレの手にゆだねた。

[1] クンマー全集Ⅰには、３１通のクロネッカー宛書簡が収録されている（同上，pp.76－132）。第一書簡は簡単な伝言で、日付もないが、第二書簡以降は（１８４８年5月５日付の一通のみを除いて）すべての書簡が詳細な研究報告の体をなしている。第二書簡の日付は１８４２年1月１６日。第２４書簡には１８５３年4月２４日の日付が附されている。これらの２３通の書簡を通じて彷彿とするのは、「クンマーの数論」をクロネッカーに語り伝えようとするクンマーその人の姿である。

ディリクレはそれを同年７月２０日にベルリン学士院に提出した。この論文は同学士院紀要に発表された。

これは代数的に解ける方程式に関する名高い論文であり、その簡潔さと思索の豊かさにおいて、この論文に先立ってなされたであろう、大量の研究を前提として初めて成立する研究成果である。［同上，pp.５－６.］

私はウェーバーの言うところに全面的に賛同し、あの空白の８年間こそ、数学者クロネッカーが真に数学者として誕生するために必然的に要請された「成熟の時」であったと考えたいと思う。そうして私の見るところによれば、クロネッカーの２０代の思索の果実は論文［K－６］を始めとする四つの論文の中に盛られている。他の三論文は下記の通りである。

［K－７］　代数的に解ける方程式について（第二論文）　［１８５６年4月１４日、学士院朗読。朗読者はクンマー。学士院月報 pp.203 － 215．全集 IV，pp.27 － 37.］

［K－８］　虚数乗法が生起する楕円関数について　［１８５７年１０月２９日、学士院朗読。学士院月報 pp.455 － 460．全集 IV，pp.179 － 183.］

［K－９］　楕円関数の虚数乗法について　［１８６２年6月２６日、学士院朗読。学士院月報 pp.363 － 372．全集 IV，pp.209 － 217.］

これらの四論文はみな１０頁程度の短篇にすぎず、深い思索に裏打ちされた諸結果の言明や証明のスケッチは認められても、すみずみまで行き届いた完璧な叙述がなされているというわけではない。だが、これらはさながらクロネッカーの全数論的世界の設計図のようであり、ここに凝縮されている数学の萌芽を存分に展開していけば、やがておのずと世界の全容が開かれていくのである。そこで私は、これらの論文に学位

論文［K－2］を併せた五論文を、特に「基本五論文」[1]という名で呼びたいと思う。

クロネッカー全集に収録されている諸論文は、みな何らかの道筋をたどって、基本五論文のいずれかに結ばれていると私は思う。その様相の具体的解明は、私の「クロネッカーの数論の解明」の構想に不可欠の基礎作業であり、同時に究明の第一目標を与えている。本稿では考察の範囲をひとまず代数方程式論の領域に限定し、我々の第一目標に向けて可能な限り近接するべく試みたいと思う。その歩みの中から、我々は「クロネッカーの定理」や「クロネッカーの青春の夢」の意味、一般にアーベル方程式の構成問題というものの真意の解明の手掛かりを、おのずと手にすることができるであろう。

1．円周の等分に関するガウスの理論

ガウスの言葉（I）

代数方程式の一般理論に足場を定めて観察すれば即座に見て取れるように、カール・フリードリヒ・ガウス（１７７７－１８５５）の円周等分方程式論には、代数方程式論の根底をなすと目される一つの基礎的認識と二つの基本問題がくっきりと顕われている。大著『整数論』第七章「円の分割を定める方程式」から、真に注目に値する二つの言葉を取り出して耳を傾けよう。一つの言葉は次の通りである。

---

(1) 四論文［K－6］～［K－9］が一つのまとまりのある数学の種子を形作っているのに対して、学位論文［K－2］がクロネッカーの数論的世界の中で閉める位置は独自である。この論文については、「クロネッカーにおける代数的整数論の形成」という視点に立って、特別の考察を加える必要がある。本稿の続篇「クロネッカーの数論の解明 III．黎明期における代数的整数論の諸相」参照。

[ガウスの言葉（I）]

よく知られているように、四次を越える方程式の一般的解法、言い換えると、**混合方程式**[(1)] **の純粋方程式**[(2)] **への還元**を見いだそうとする卓越した幾何学者たちのあらゆる努力は、これまでのところつねに不首尾に終わっていた。そうしてこの問題は、今日の解析学の力を越えているというよりは、むしろある不可能な事柄を提示しているのである。これはほとんど疑いをさしはさむ余地のない事態である（「あらゆる一変数整有理的代数関数［多項式］は一次もしくは二次の実素因子に分解されるという定理の新しい証明」[(3)]，第9条においてこのテーマに関して註記された事柄を参照せよ）。それにもかかわらず、このような純粋方程式への還元を許容する、各次数の混合方程式が無限に多く存在するのも確かである。そこで我々は、もし我々の補助方程式[(4)]はつねにそのような方程式の仲間に数えるべきであることが示されたとするなら、それはさだめし幾何学者諸氏のお気に召すであろうことを希望したいと思う。［第359条より。ゴシック体の語句は原文では小さい大文字で記されている。すなわち、一段と高いレベルの強調がなされている。ガウス全集 I，p.449.］

まずガウスはこの言葉の前半において五次以上の代数方程式の代数的解法に言及し、一般的には不可能であろうとする推定を確信をもって語っている。この推定に明晰判明に表明されている事実認識こそ、ガウスに始まる新しい代数方程式論、すなわち、

(1) 一般的な形の代数方程式のこと。

(2) 二項方程式、すなわち $x^n = a$ （a は定量）という形の方程式のこと。

(3) ガウスの学位論文。ガウス全集 III，pp.1－31.

(4) ガウスは円周等分方程式の代数的解法を一系の補助方程式の解法に帰着させた。

ガウス以前の理論 ――― １６世紀イタリア代数学派[1]からヨセフ・ルイ・ラグランジュ（１７３６－１８１３）[2]へとつながっていく代数方程式論 ――― に比して真に新しい代数方程式論の基盤である。円周等分方程式の代数的可解性の確立（ガウス）、平方根のみを用いて解くことのできる円周等分方程式の決定（ガウス）[3]、アーベル方程式の概念の発見（アーベル）、楕円関数の周期等分方程式の代数的可解性の究明（アーベル、クロネッカー）、ヤコビの意味におけるモジュラー方程式は一般に代数的に可解ではないという予想の提示（アーベル）とその証明（ガロア）、素次数をもつ代数方程式の代数的可解条件の提示（ガロア）、等々、代数方程式の代数的解法にまつわる種々相は多様である。だが、このような究明の可能性がわれわれの眼前に理論的に開示されるためには、多彩な建築群を支えるに足る揺るぎない土台が前もって据えられていなければならないであろう。まさしくそれ故に、ニールス・ヘンリック・アーベル（１８０２－１８２９）もエヴァリスト・ガロア（１８１１－１８３２）も、ガウスの推定を確固とした数学的事実として確立することを、彼らのそれぞれの代数方程式論の第一目標に設定したのである。

さて、代数方程式の代数的解法はなるほど一般的には不可能であるとしても、代数的解法を許容する方程式が実際に存在することもまた確実である。ガウスの言葉の後半ではそのような言明が行なわれ、それに続いて、円周等分方程式

---

(1) ニコロ・タルタリア（１５００？－１５５７）やゲロラモ・カルダノ（１５０１－１５７６）やルドビコ・フェラリ（１５２２－１５６５），等々。中心テーマは三次・四次方程式の解法理論。

(2) 「方程式の代数的解法の省察」（１７７０，１７７１年。ラグランジュ全集 III，pp.205 421.）参照。

(3) ここに挙げた二つの事柄は、代数方程式論の視点から見たときの、ガウスの円周等分方程式論のテ－マである。

$$\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdot\cdot\cdot+1=0$$

の代数的可解性を確立しようとする見通しが表明されている。するとここには、たとえいかにもか細い示唆にすぎないとはいえ、代数方程式論の基本問題の一つが提示されていると考えられるのではあるまいか。すなわち、それは

[第一基本問題]　代数方程式の代数的可解性を支える最も基本的な契機を指摘せよ[(1)]。

という問題である。そうしてガウスはすでに、『整数論』第七章の全篇を通じて、この問題に対する回答の所在を具体的に示している。代数方程式が代数的に可解であったりなかったりする数学的現象の根底にあって、この現象の全体を根本的に制御しているもの。ガウスのメッセージの中にアーベルの慧眼が洞察したところによれば、それは「根の相互関係」である。ある代数方程式が提示されたとき、もしその諸根の間に、ある特定の相互関係の成立が認められるなら、そのとき、提示された方程式の代数的可解性が具現する。円周等分方程式の場合、ガウスはまず、円周等分方程式は巡

---

(1)　いわゆるガロア理論に即して考えるなら、この問題は、

代数方程式のガロア群はどのような状勢のもとで可解群になるだろうか。

というふうに設定することも論理的には可能である。ただし、方程式のガロア群が可解群であるかどうかを知ることと、可解群になるという現象を支える基本状勢を指摘することとを混同してはならない。後者のほうがより深い場所にある問題であり、それが第一基本問題の眼目である。

回方程式[1]であることを明示し（そのために、素数の原始根が用いられる）、続いて、その事実から取り出される一系の補助方程式の、二項方程式への還元を遂行した（この段階では、ラグランジュの分解式に相当するものが利用される）。円周等分方程式の代数的可解性はこれで確定するが、アーベルは論文

［A－1］　ある特殊な代数的可解方程式類に関する論文　［論文の末尾に１８２８年３月２９日という日付が附されている。初出はクレルレ誌 4，pp.131－156．アーベル全集 I，pp.478－507.］

において、このガウスの足取りの延長線上にアーベル方程式[2]の一般概念を発見し、

[1] 代数方程式 $f(x)=0$ が提示されたとして、その係数域 k を適当に設定しよう。今、$\varphi(x)$ は k 上の有理関数として、方程式 $f(x)=0$ の根は、ある一つの根 α を用いて、

$$\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \cdots$$

という形に表示されるとしよう。このとき、提示された方程式は k 上の巡回方程式と呼ばれる。

[2] アーベルは楕円関数の等分方程式の代数的可解条件の究明を通じて、アーベル方程式の一般概念に到達した。その際、アーベルにおける楕円関数の等分理論には、ガウスの示唆

> この理論［＝円周等分方程式論］の諸原理は円関数のみならず、そのほかの超越関数、たとえば積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ に依拠する超越関数　・・・　に対しても適用することができる　・・・　」　［「整数論」第七章より。ガウス全集 I，pp.412－413.］

が生きて働いていることも併せて銘記しなければならない。

ガウスの手法にならってその代数的可解性を明らかにしたのである[1]。

アーベルとともに、ガロアもまたガロアに固有の仕方で第一基本問題への寄与を行なった。実際、数学史上に名高いガロアの論文

［G］　方程式の巾根による可解条件に関する論文　［まえがきの末尾に１８３１年１月１６日という日付が附されている。１８９７年版ガロア全集，pp. 33 − 50.］

において、ガロアはガロア対応の原理を基軸とする今日のいわゆるガロア理論の応用として、素次数既約代数方程式の代数的可解条件を導いている。それは、

> 素次数既約方程式が巾根を用いて解けるためには、諸根のうちの任意の二つが判明したとき、他の根がそれらの二根から有理的に導出されることが必要かつ十分である。　［同上，p. 49.］

という定理である。ここに表明されている「すべての根が二根の有理関数として表示される」という形の「根の相互関係」は、それ自体としてはガロアによる発見という

---

[1] 代数方程式 $f(x)=0$ が提示されたとして、その係数域 k を適当に設定しよう。今、$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ は k 上の有理関数として、方程式 $f(x)=0$ の根は、ある一つの根 α を用いて、

$$\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \cdots$$

というふうに表示され、しかもそれらの間に

$$\varphi_i\varphi_j(\alpha)=\varphi_j\varphi_i(\alpha) \qquad (i \neq j)$$

という可換条件が成立するとしよう。このとき、提示された方程式は k 上のアーベル方程式と呼ばれる。

わけではない。なぜなら、ガロアに先立ってアーベルはすでに、論文

[A－2]　楕円関数論概説　[クレルレ誌 4 , pp . 236 － 277 ; 309 － 348. アーベル全集 I , pp . 518 617 .]

の中で、楕円関数の周期等分方程式の諸根の間にこのような様式の相互関係を観察しているからである。アーベルの言葉は、

> また、モジュラー方程式は、それらのうちの二根を用いて**有理的**に書き表される。　[ゴシック体の一語は原文では斜体文字で記されている。アーベル全集 I , p . 527 .　証明は同上 , pp . 599 － 600 .　ただし、ここで「モジュラー方程式」とあるのは「周期等分方程式」の誤記である。アーベル全集に附されているシローの註釈（同上, p . 318）参照。]

というふうである。周期等分方程式の次数は素数ではないが、アーベルが目にしたこのような根の相互関係は、そのまま素次数既約方程式の代数的可解条件を与えている。そのような洞察がガロアの発見の実質的内容を形成するのである [1]。

---

[1] ガロアはアーベルの指摘を知っていたと思われる。なぜなら、ガロアは決闘による死の前夜に書いた友人オーギュスト・シュヴァリエ宛書簡（１８３２年5月２９日付）の中で「アーベルの最後の論文」に言及している（１８９７年版ガロア全集 p . 31）が、それは文脈上、「楕円関数論概説」を指すと判断されるからである。他方、アーベルはすでにガロアの定理それ自身を独自に知っていたと考えられる。実際、１８２８年１０月１８日付のクレルレ宛書簡には「方程式に関する三つの定理」（A , B , C）が挙げられているが、定理 B と定理 C はそれぞれ、

> B．任意の素次数既約方程式について、もしその三つの根は、「それらの一つは他の二根によって有理的に書き表わされる」という仕方で相互にむすばれているとする

ガウスの言葉（II）

ここでガウスの言葉に立ち返り、そこから代数方程式論の第二の基本問題を取り出して提示したいと思う。本稿において我々が引用したいと思うガウスの二つの言葉のうち、第二の言葉は下記の通りである。

［ガウスの言葉（II）］

そうして我々は、これらの高次方程式はどのようにしても回避できないこと、また、より低次の方程式に帰着させるのも不可能であることを完全に厳密に証明することができる。この著作に課されている大きさの限界のために、ここではこの証明を報告するゆとりはない。だが、それにもかかわらず、我々の理論が示唆している［円の］分割以外になお別の分割、たとえば ７，１１，１３，１９，etc． 個の部分への分割を幾何学的構成に帰着させようという望みを抱いて、いたずらに時間を浪費したりする人のないようにするために、我々はこの事実を指摘して警告を発しなければならないと思ったのである。 ［『整数論』第七章，第 365 条より。ガウス全集Ｉ，p．462． ゴシック体の一文は、原文では小さな大文字で書かれている。］

この言葉の背景にあるのは、正多角形の作図問題、すなわち、平方根のみを用いて

なら、問題の方程式はつねに巾根を用いて解くことができる

Ｃ． 素次数既約方程式について、もしその二根は、「それらの二根の一方は他方の根によって有理的に書き表わされる」という相互関係をもつとするなら、この方程式はつねに巾根を用いて解くことができる。 ［アーベル全集 II，p．270．］

というものである。定理 B はガロアの定理そのものである。

ガロア理論は、提示された根の相互関係が代数的可解性を保証するか否かを知ろうとする場面では力を発揮するが、根の相互関係それ自体を見つけるには無力である。

解くことのできるすべての円周等分方程式を決定しようとする問題である。冒頭で語られている「高次方程式」とは、円周等分方程式の代数的解法の歩みの途次、必然的に導かれていく一系の補助方程式を指している。『整数論』第七章においてガウスが確立した事柄によれば、もし考察の対象として取り上げられている円周等分方程式の等分次数がフェルマ数、すなわち、 $2^{2^m}+1 \quad \left(m=0,1,2,\cdots\right)$ という形の素数に等しいなら、その円周等分方程式の解法は平方根のみを用いて遂行されることになる。そこで浮上するのは、その逆の状勢をも併せて確立することである。もしそのような試みに首尾よく成功したとするなら、そのとき、ユークリッド『原論』以後、2000 年の歴史をもつ正多角形の作図問題は最終的に解決され、平方根のみを用いて解ける方程式というものは、ガウスが発見したタイプの方程式によって全体として汲み尽くされてしまうという事実が確定するであろう。ガウスは上記の言葉の中で、この基本問題はすでに解決されたと明言したのである。真に味わいの深い言葉と言わなければならないが、同時に、ここには代数方程式論の第二の基本問題が顕われていると私は思う。それは、

［第二基本問題］　代数方程式の代数的可解性を否定する力のある理論装置を設定せよ。

という問題である。もし第一基本問題と併せてこの第二基本問題が何らかの仕方で解決されたとするなら、そのとき新しい代数方程式論は堅固な足場を得て、ひとまず骨組みが完成したと言えるのである。

ガウスの宣言は、ガウス自身、すでにこのような理論的枠組を手中にしていた様子をうかがわせるが、いわゆるガロア理論もまた第二基本問題の要請にみごとに応え、しかもその果実は豊穣である。ガロア自身の手で摘まれたものだけでも、

（1）　五次以上の代数方程式は一般に代数的に可解ではないという事実の確立［代数方程式論の土台をなすガウスの基礎的認識の確定］。

（2）　ヤコビのモジュラー方程式は一般に代数的に可解ではないというアーベルの予想の証明[1]。

という、二つのめざましい成果が認められ、６０頁ほどの小冊子にすぎないガロア全集（１８９７年版）を手にする我々の目に、今日なおあざやかに映じている。ガウスの第二の言葉の冒頭で言われている「不可能の証明」を与えるのも容易である。また、ガウス以前の代数方程式論において知られていた三次方程式と四次方程式に対するさまざまな根の公式の導出法について言えば、それらの理論的背景を明らかにする著しい効果もさることながら、巾根による解法は既知のもの以外には存在しえない旨を明言することが可能になる。ガロア理論は否定的言辞（「・・・は代数的に可解ではない」、「・・・はこれ以外には存在しない」、等々、というタイプの言明）を行なう

[1] 論文［G］におけるガロアの言葉。

> ［方程式論のさまざまな応用の］一部分は楕円関数論のモジュラー方程式に関連している。我々はモジュラー方程式を巾根を用いて解くのは不可能であることを証明するであろう。　［１８９７年版ガロア全集，p.34.］

参照。また、１８３２年5月２９日付のシュヴァリエ宛書簡中には、

> 方程式論の最後の応用は［楕円関数の］モジュラー方程式に関連している。　［同上，p.27.］

とあり、引き続きモジュラー方程式のガロア群がスケッチされている。

べき場面において、よくその真価を発揮するのである。

ガロア理論にガロアの理念が宿っているように、アーベルの代数方程式論にはアーベルの基本理念が生き生きと反映し、しかも二つの理念は根本的に異質である。アーベル自身はアーベルの代数方程式論を十分に展開するゆとりもないままに世を去ってしまったが、その片鱗は、我々の手元に遺されているわずかな手掛かりの中に明るくきらめいている。次章において、我々はいくつかの断片的な記述を素材としてアーベルの理論の全容を再現し、第二基本問題へと向かうアーベルの独自の究明を目の当たりにしたいと思う。

2．代数方程式論におけるアーベルの基本理念

「不可能の証明」

代数方程式論に寄せるアーベルの関心の芽生えは相当に早い時期に認められ、十代の終わりのころにはすでに、五次方程式の代数的解法の究明の試みがなされている。多少の曲折の末に、アーベルはいわゆる「不可能の証明」に成功し、１８２４年には論文

［A－３］　代数方程式に関する論文。ここでは五次の一般方程式の解法は不可能であることが証明される。　［アーベル全集 I, pp. 28 − 33.］

が完成した。アーベルはこの短篇を自費で出版し、ガウスのもとに送付して批評を求めた。しかし結果は思わしくなく、標題中の「解法」の一語に附すべき形容句「代数

的」を落としたために不興を買って黙殺されたという、有名なエピソードを残したのみであった。だが、ガウスの不当な評価は、「不可能の証明」の正当性を信じるアーベルの確信に動揺を与えたわけではない。実際、１８２５年の暮、パリ留学の途次、ベルリン滞在中に論文

［A－4］　四次を越える一般方程式の代数的解法は不可能であることの証明(1)

［同上，pp．66 － 87．］

が書かれている（今度は不可能なのは「代数的な」解法であることが標題中に明記されている）が、これは論文［A－3］を叙述の密度を高めて再現したものにほかならず、証明の構想や技巧という実質的な諸点において、二つの論文は寸分も違わないのである。「不可能の証明」は１８２４年の小さな論文［A－3］の出現とともに為し遂げられたと見るのが至当である。

(1) 論文［A－4］は翌１８２６年、アオグスト・レオポルト・クレルレ（１７８０－１８５６）によって創刊されたばかりの「純粋・応用数学雑誌」、いわゆるクレルレ誌の第一巻に掲載されたが、掲載に当たってクレルレの手でドイツ文への訳出が行なわれた（原論文はフランス語で書かれている）。ところがそのドイツ語訳の標題は

四次よりも高い次数をもつ代数方程式を一般的に解くのは不可能であることの証明

［クレルレ誌 1，pp．65 － 84．］

というものであり、原論文の標題と比べて、二つの形容句「代数的」と「一般的」の位置が入れ換わっている。すなわち、不可能なのは、論文［A－4］では「一般方程式の代数的解法」であるのに対し、ドイツ語訳では「代数方程式の一般的解法」になっているのである。もし論文［A－3］とガウスにまつわるエピソードが真実であるとするなら、クレルレ誌第一巻のアーベルの論文は、またしてもガウスの不興を買ったにちがいない。

論文［A－4］の編成は下記の通りである。

§I．　代数関数の一般形について

§II．ある与えられた方程式を満足する代数関数の諸性質

§III．いくつかの量の関数が、そこに包含されている諸量を相互に入れ換えるときに獲得しうる相異なる値の個数について

§IV．五次方程式の一般的解法は不可能であることの証明[1]

アーベルの表記法にならって、 $x', x'', x''' \cdot\cdot\cdot$ は有限個の任意の量を表わすものとし、 v はこれらの量の代数関数[2]としよう。まずアーベルは、 v が許容しうる最も一般的な形状の決定を試みて、

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} + \cdot\cdot\cdot + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

という表示[3]に到達した（§I）。次に、このような形の表示を梃子として、いわゆ

[1] §IV の標題は「五次の一般方程式の代数的解法は不可能であることの証明」、または「五次方程式の代数的解法は一般的な仕方では不可能であることの証明」などとするべきところであり、このままでは不適当である。前頁の註（1）参照。

[2] 提示された量に加減乗除の四則演算と、巾根を取る演算とを組み合わせて作用させることによって作られる量のこと。後に引用される文献では、アーベルは「代数的表示式」という言葉を用いている。

[3] ［附帯条件と補足事項］ v は次数 m，位数 μ とする。 n は素数。 $q_0, q_2, \cdot\cdot\cdot, q_{n-1}$ は次数 $m-1$，位数 μ の代数関数。 p は位数 $\mu-1$ の代数関数。また、 $p^{\frac{1}{n}}$ を $q_0, q_2, \cdot\cdot\cdot, q_{n-1}$ を用いて有理的に書き表わすことはできない。代数関数の「次数」は、代数関数の組み立てに当たって使用される巾根の総個数である。また、巾根を取る段階を新たに一つ踏むごとに、「位数」は一つずつ増加していく。

る「代数的解法の原則」を確立した（§II）。それは、

もしある方程式が代数的に解けるとするなら、その方程式にたいしてつねに、「それを組み立てるのに使用される代数関数はどれも、提示された方程式の根の有理関数として書き表わされる」という性質を備えている形状を与えることができる。　[同上，p. 75.]

というふうに表明される数学的事実である。§IIIでは置換に関するオギュスタン・ルイ・コーシー（１７８９－１８５７）の定理などを援用して、

いくつかの［有限個の］量［$x_1, x_2, \cdots, x_n$］の［有理］関数があるとし、その関数は［量　$x_1, x_2, \cdots, x_n$　に置換を施すとき］相異なる　m　個の値をもつとしよう。そのときつねに、［量　$x_1, x_2, \cdots, x_n$］の対称関数を係数とし、しかもここで言われている［相異なる　m　個の］値を根とするある　m　次方程式を見つけることができる。しかし　m　個の値のうちの一つもしくはいくつかを根とする、同じ形の低次方程式を見つけることはできない。　[同上，p. 84.]

という定理が得られる。そうして最後に、§IIと§III の成果の上に多少の考察を重ねて、「不可能の証明」が完成するのである。論文［A－３］の論証も全く同じ道筋をたどって進行する。

我々は今、このような証明の本質の所在を問いたいと思う。ガロア理論の立場から見れば、代数的解法の原則の確立という一事は体論を想起させ、コーシーの置換論が適用される場面には、ラグランジュに端を発し、パオロ・ルフィニ（１７６５－１８２２）、コーシーを経てガロアへとつらなる置換群論の系譜を思わせるものがあ

る。全体としてこの証明はあたかもガロア理論形成史のひとこまであるかのように我々の目に映るのである。だが、私はこのような見方を全面的にしりぞけて、新たにこんなふうに主張したいと思う。すなわち、**アーベルの代数方程式論の本質は置換群論とは根本的に無縁である。論文［A－4］に即して言えば、代数方程式論におけるアーベルの基本理念は、§IIや§III ではなくて、§I における代数関数の一般表示式の究明の中によく顕われている**、というふうに。アーベル全集の中には、私の主張を裏づけるに足る落ち穂のような記述が散見する。以下、しばらく、それらを一つひとつ丹念に拾っていきたいと思う。

四つの断片

断片（1）　［１８２６年3月１４日クレルレ宛書簡より］

もし有理数を係数とする五次方程式が代数的に解けるなら、その根に次のような形を与えることができる。

$$x = c + A\cdot a^{\frac{1}{5}}\cdot a_1^{\frac{2}{5}}\cdot a_2^{\frac{4}{5}}\cdot a_3^{\frac{3}{5}} + A_1\cdot a_1^{\frac{1}{5}}\cdot a_2^{\frac{2}{5}}\cdot a_3^{\frac{4}{5}}\cdot a^{\frac{3}{5}} + A_2\cdot a_2^{\frac{1}{5}}\cdot a_3^{\frac{2}{5}}\cdot a^{\frac{4}{5}}\cdot a_1^{\frac{3}{5}} + A_3\cdot a_3^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{2}{5}}\cdot a_1^{\frac{4}{5}}\cdot a_2^{\frac{3}{5}}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
a &= m + n\sqrt{1+e^2} + \sqrt{h\left(1+e^2+\sqrt{1+e^2}\right)}\\
a_1 &= m - n\sqrt{1+e^2} + \sqrt{h\left(1+e^2-\sqrt{1+e^2}\right)}\\
a_2 &= m + n\sqrt{1+e^2} - \sqrt{h\left(1+e^2+\sqrt{1+e^2}\right)}\\
a_3 &= m - n\sqrt{1+e^2} - \sqrt{h\left(1+e^2-\sqrt{1+e^2}\right)}
\end{aligned}$$

$$A = K + K'a + K''a_2 + K'''aa_2,\ A_1 = K + K'a_1 + K''a_3 + K'''a_1a_3,$$

$$A_2 = K + K' a_2 + K'' a + K''' a a_2,\ A_3 = K + K' a_3 + K'' a_1 + K''' a_1 a_3,$$

量 $c, h, e, m, n, K, K', K'', K'''$ は有理数である。

しかし、 a と b が任意の量である限り、方程式 $x^5 + ax + b = 0$ はこのようには解けない。私は７次、１１次、１３次、等々、の方程式に対しても同様の定理を発見した。 [アーベル全集 II, p. 266.]

断片（２） ［１８２６年１０月２４日付ベルント・ミカエル・ホルンボエ（１７９５－１８５０）宛書簡より］

ぼくは今、方程式の理論を研究している。ぼくの大好きなテーマだ。それで今、やっと、「代数的に解くことのできるすべての代数方程式の形状を決定せよ」という一般的な問題を解決する手段が見つかったところだ。ぼくは５次、６次、７次の方程式について、そのような形状を無数に見つけたが、それは今までだれも捜し当てたことのないものである。同時に、ぼくは初めの四つの次数の方程式の、最も直接的な解法を得た。しかもそれには、なぜこれらの方程式だけが可解で、なぜ他の方程式はそうではないのかという点についての明白な理由も伴っているのだ。五次方程式について、ぼくは、そのような方程式が代数的に可解であるときには、その根は、

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''}$$

という形をもたなければならないことを発見した。ここで、 R, R', R'', R''' はある四次方程式の四つの根であり、平方根のみを用いて書き表わされる。

[同上, p. 260.]

断片（3）　［１８２７年3月４日付ホルンボエ宛書簡より］

方程式の理論において、ぼくは次のような問題を解決した。「代数的に解ける、ある定まった次数の方程式をすべて見いだせ。」この問題の中には、他のすべての問題が包含されている。この問題の解決により、ぼくは非常に多くのすばらしい定理に到達した。　[同上，p.262.]

断片（4）　［１８２８年１１月２５日付アドリアン・マリ・ルジャンドル（１７５２－１８３３）宛書簡の末尾の言葉］

私は幸せにも、任意の提示された方程式が**巾根**を用いて解けるか否かの判定を可能にする、確実な法則を見つけました。私の理論から派生する命題として、四次を越える方程式を解くのは一般には**不可能**であることが示されます。

［同上，p.279.　ゴシック体の語句は原文ではイタリック体で記されている。］

断片（1）～（3）は、アーベルが考察の対象として設定している二つの問題を我々に教えている。一つは、

問題（A）　代数的に解ける方程式をすべて見つけること。［断片（2），（3）］

という問題であり、もう一つは、

問題（B）　代数的に解ける方程式の根の形状を明示する一般的な表示式を見つけること[1]。　［断片（1），（2）］

[1] 断片（1）で取り上げられている方程式には、特に「係数は有理数」という条件が課されている。クロネッカーはこの点に注目した。本稿、第３章参照。

という問題である。また断片（４）は、アーベルはアーベルなりの仕方で代数的可解性の判定基準を得たことを伝えている。この言葉を二問題（A），(B) に照らすとき、我々はアーベルの究明の背景に、何かしら大きな理論の広々とした拡がりを感知することができるのではあるまいか。アーベルの二つの遺稿はその全容の解明に当たって貴重な手掛かりをもたらしてくれるであろう。

二つの遺稿

アーベルは代数方程式論の領域において、遺稿

［A－５］　方程式の代数的解法について　［１８２８年後半と推定される。アーベル全集 II，pp. 217 － 243.］

と、［A－５］の緒言の欄外に書き込まれたノート

［A－６］　方程式の代数的解法の新しい理論　［同上，pp. 329 － 331.］

を書き残している。［A－６］は［A－５］の緒言の初めの部分の改訂稿である。我々は論文［A－５］に附されている長文の緒言とその改訂稿［A－６］のおかげで、代数方程式論におけるアーベルの基本理念の様相を概観することができるのである。論文［A－５］の本文はなお未完成で、スケッチの域を出ない箇所も多いが、全体として相当にまとまりのある叙述であり、アーベルの理論の全容はおおよそ描かれているように思われる。編成は下記の通りである。

§１．代数的表示式の一般的形状の決定

§２．ある与えられた代数的表示式が満足しうる最低次数の方程式の決定

§３．ある与えられた次数をもつ既約方程式を満足しうる代数的表示式の形状について

論文［A－５］の緒言はこんなふうに始まっている。

> 代数学の最も興味深い問題の一つは、方程式の代数的解法の問題である。そうして、卓越した地位にあるほとんどすべての幾何学者たちがこのテーマを論じてきた、という事実もまた認められるのである。四次方程式の根の一般的表示に到達するのには困難はなかった。そのような方程式を解くための首尾一貫した方法も見つかったし、しかもその方法は任意次数の方程式に対しても適用可能であるように思われた。しかしラグランジュや他の傑出した幾何学者たちのありとあらゆる努力にもかかわらず、［代数方程式の代数的解法の発見という］提示された目的に達することはできなかったのである。このような事態には、一般的な方程式の解法を代数的に遂行するのは不可能なのではないかと思わせるに足るものがあった。だが、それは決定不能な事柄である。なぜなら、その採用された方法により何らかの結論へと達しうるのは、方程式が可解である場合に限定されているからである。実際、はたして可能かどうかを知らないままに、永遠に探索を続けていけることになってしまうのである。それ故、このような仕方で確実に何らかの事物に到達しようとするには、他の道を歩まなければならない。この問題に対して、それを解くことがつねに可能であるような形を与えなければならないが、・・・・・　［同上，p．217．］

方程式の代数的解法の問題に対して、それを解くことがつねに可能であるような形を与えなければならない。アーベルはそう宣言したうえで、「方程式の代数的解法の

理論の全容を包摂する」（同上，p. 218）二問題、すなわち、

1．代数的に解ける任意次数の方程式をすべて見いだせ。

2．ある与えられた方程式が代数的に可解であるか否かを判定せよ。　[同上，p. 219.]

という問題を提示する。問題 1 はすでにアーベルの断片の中に現われていた問題（A）そのものにほかならないが、そのうえ二問題 1，2 は「結局のところ、同じもの」である。

> これらの二問題の考察こそ、この論文のねらいとするところである。そうしてたとえ完全な解決は与えないにしても、完全な解決へといたる手法を指し示したいと思う。これらの二問題は相互に密接に結ばれていることがわかるが、その結果、前者の問題の解決は必然的に後者の問題の解決を導かなければならない。結局のところ、これらの二問題は同じものなのである。研究の流れの中で、方程式に関する多くの一般的命題 ―――― 方程式の可解性や根の形状に関するもの ―――― に達するであろう。方程式の代数的解法について言うならば、方程式の理論というものはまさしくこれらの一般的性質から成り立っているのである。これらの一般的性質の一つは、たとえば、四次を越える一般方程式を代数的に解くのは不可能である、というものである。　[同上，p. 219.]

解決の指針はおのずと示される。

・・・　我々の問題を解決するための自然な歩みは、問題の言明に即しておのずとその姿を顕わしてくる。すなわち、提示された方程式において、未知数の代わりに最も一般的な代数的表示式を代入しなければならない。そうして次に、はたしてその方程式をそのようにして満足させることは可能なのかどうかという点を究明しなければならない。　[同上，p. 220.]

こうしてまず初めに解かなければならないのは、

代数的表示式というものの最も一般的な形状を見いだせ。　[同上，p. 220.]

という問題である。論文［A－4］の§1で取り上げられていたのはこの問題である。その場所で与えられている解答はもとより完全な一般性を獲得しているわけではないが、「不可能の証明」が可能になる程度には達している。続いて

ある代数関数が満足しうる方程式を、存在する限りすべて見いだせ。　[同上，p. 220.]

という問題が設定されるが、もしこの問題が首尾よく解決されたなら、そのとき我々は問題1（すなわち、問題（A））の解答を手中にしたことになる。するとその結果、問題2もまた自動的に解決される。なぜなら、すべての代数的可解方程式がすでにして手中にある以上、ある与えられた方程式が代数的に可解であるか否かを知るには、その方程式を代数的可解方程式のリストに照らして比較を行ないさえすればよいからである。問題2の解決としては、このように歩を進めるのが最も自然であり、少なくとも理論的にはこれで完璧である。

これに対して、たとえ何らかの代数的可解条件が得られて、首尾よく代数的可解性の判定が可能になったとしても、それだけではまだ問題 2 におけるアーベルの要請に完全に応えたと即断することはできない。たとえば、素次数既約方程式を対象とする場合、次章において目にするように、我々は「ガロアの定理」と「アーベル・クロネッカーの定理」という、二通りの代数的可解条件を知っている。ところがクロネッカーの指摘するところによれば、それらの二定理は「可解方程式の真の性質を明るみに出すというよりも、むしろ覆い隠す役割を果たすといってもよいようなもの」である。事の本質は問題 2 の解決それ自体にではなくて、解決の仕方の中に宿っている。上述のような自然な歩みが実際に歩まれたとき、そのとき初めて、我々は、二問題 1，2 は本質的に同じものであるというアーベルの言葉の意味を、正しく諒解することができるのである。

だが、この道筋を実際に歩むのは至難である。なぜなら、

> ・・・個々の特別の場合において、あの最も簡単な方程式を作るための一般的規則はたしかに設定されたとはいうものの、その規則に基づいてその方程式それ自身を手にするにはなお遠いからである。そうしてたとえ首尾よくその方程式を見つけることに成功したとしても、かくも複雑な諸係数が、提出された方程式の諸係数と実際に等しいかどうかを、いかにして判定せよというのであろうか。　[同上，p.221 − 222.]

という状勢が認められるからである。そうしてアーベルは、「他の道を通ることによって、提出された目的地に到達した」（同上，p.222）。すなわち、アーベルは視点を変換し、

> ある与えられた次数を有する方程式を満足しうる、最も一般的な代数的表示式

を見いだせ。　[同上，p. 222]

という問題を設定するのである。これが問題（B）である。

問題（B）に対する解答は、別段一通りに限られるというわけではない。考察の対象を素次数方程式にかぎっても、アーベル自身、論文［A－5］において都合三種類の「根の表示式」を報告している。まず、**第一表示式**は次のように表明される。

素次数 μ をもつ既約方程式が代数的に解けるとするなら、その諸根は下記のような形をもつ。

$$y = A + \sqrt[\mu]{R_1} + \sqrt[\mu]{R_2} + \cdots + \sqrt[\mu]{R_{\mu-1}}\,.$$

ここで A は有理量であり、$R_1, R_2, \cdots, R_{\mu-1}$ はある $\mu-1$ 次方程式の根である。［同上，p. 222.］

第二表示式は、アーベルの記号をそのまま用いると、

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + f_2 s \cdot s^{\frac{2}{\mu}} + f_3 s \cdot s^{\frac{3}{\mu}} + \cdots + f_{\mu-1} s \cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

というふうになる。ここで、z_1 は対象として取り上げられている既約な代数的可解方程式の根、μ はその方程式の次数、s は既知量を用いて組み立てられるある代数関数、p_0 は既知量の有理関数、最後に $f_2 s, \cdots, f_{\mu-1} s$ は s および既知量の有理関数を表わしている。

アーベルの究明はさらに進行する。上記の第二表示式において、量 s が満足す

る最低次数の代数方程式（その作り方は§2 で示されている）を　$P=0$　とすると、これは巡回方程式である。すなわち、この方程式の根　$s, s_1, s_2, \cdots, s_{\nu-1}$　（ν は方程式　$P=0$　の次数を表わす）は、

$$s, s_1=\theta s, s_2=\theta^2 s, s_3=\theta^3 s, \cdots, s_{\nu-1}=\theta^{\nu-1} s$$

（θs　は　s　と既知量との有理関数）

という形に表示されるのである。そのうえ、　s　の有理関数　$a, a_1, a_2, \cdots, a_{\nu-1}$ を適切に作ることにより、

$$\begin{aligned}
s^{\frac{1}{\mu}} &= A\cdot a^{\frac{1}{\mu}}\cdot a_1^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}}\cdot a_2^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}}\cdots a_{\nu-1}^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}},\\
s_1^{\frac{1}{\mu}} &= A_1\cdot a^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}}\cdot a_1^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}}\cdot a_2^{\frac{m^{3\alpha}}{\mu}}\cdots a_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
s_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}} &= A_{\nu-1}\cdot a^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}}\cdot a_1^{\frac{1}{\mu}}\cdot a_2^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}}\cdots a_{\nu-1}^{\frac{m^{(\nu-2)\alpha}}{\mu}}
\end{aligned}$$

（m　は素数　μ　の原始根）

となるようにすることができる。しかもこれらの　ν　個の関数 $a, a_1, a_2, \cdots, a_{\nu-1}$ はそれら自身、ある　ν　次既約巡回方程式の根である。そうして　z_1　は、

$$\begin{aligned}
z_1 = p_0 &+ s^{\frac{1}{\mu}} + s_1^{\frac{1}{\mu}} + s_2^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + s_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}}\\
&+ \varphi_1 s\cdot s^{\frac{m}{\mu}} + \varphi_1 s_1\cdot s_1^{\frac{m}{\mu}} + \varphi_1 s_2\cdot s_2^{\frac{m}{\mu}} + \cdots + \varphi_1 s_{\nu-1}\cdot s_{\nu-1}^{\frac{m}{\mu}}\\
&+ \varphi_2 s\cdot s^{\frac{m}{\mu}} + \varphi_2 s_1\cdot s_1^{\frac{m^2}{\mu}} + \varphi_2 s_2\cdot s_2^{\frac{m^2}{\mu}} + \cdots + \varphi_2 s_{\nu-1}\cdot s_{\nu-1}^{\frac{m^2}{\mu}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ \varphi_{\alpha-1} s\cdot s^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \varphi_{\alpha-1} s_1\cdot s_1^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \varphi_{\alpha-1} s_2\cdot s_2^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \cdots + \varphi_{\alpha-1} s_{\nu-1}\cdot s_{\nu-1}^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}}
\end{aligned}$$

（$\alpha=\dfrac{\mu-1}{\nu}$. $\varphi_1 s, \varphi_2 s, \cdots, \varphi_{\alpha-1} s$　は　s　と既知量の有理関数。）

というふうに書き表わされる（同上，p. 240）。これが**第三表示式**である。特に $\mu=5$ の場合、この第三表示式はアーベル方程式の断片（1）における根の表示式を与えている。

C. J. マルムステン[1]は論文

[M]　代数方程式の解法の研究　[クレルレ誌 34，pp. 46 － 74．1847年.]

において、未完の論文［A－5］を精密に補　し、最後に「定理Ｘ」として、

> μ は素数とするとき、もし $\mu>3$ なら、 μ 次の既約方程式は一般に代数的に可解ではない。（同上，p. 72.）

という定理を書き添えた。　目に値するのはその証明法である。すなわち、マルムステンは、 μ 次の一般既約方程式が代数的に可解であるという仮定のもとで、その方程式の根の第一表示式と第二表示式とを組み合わせることにより、たちどころに矛盾を導いたのである。こうして問題（B）の究明の中から、置換群論が立ち入るべき余地もないままに、「不可能の証明」が取り出された。アーベルの洞察の正しさを明示する、まことに画龍点睛のような出来事と言わなければならない。

アーベル方程式の構成問題への道

ガウスが開いた新しい代数方程式論の場において、アーベルは二つの基本問題のそ

[1] マルムステンとその論文［M］については、クロネッカーの論文［K－6］に教えられた。次章参照。

れぞれに対してみごとな解答を与えることに成功した。すなわち、第一基本問題の究明はアーベル方程式の一般概念の発見に結実し、第二基本問題への取り組みは、代数的可解方程式の根の一般的形状の決定という、広汎な理論への道を開いたのである。そうしてさらに、両者の関係をめぐって、アーベル全集，第二巻に附されているシローの記述は興味深い消息を伝えている。シローによれば、アーベル没後、アーベルの遺稿の所有者は、アーベルの先生でもあり友人でもあるホルンボエであった。ところが１８５０年に火事があり、多くの原稿が失われた。残されているのは全五巻(Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ）から成る草稿集と、若干の断片のみである。草稿集の第四巻Ｄは136頁から成り、フランス語で書かれ、１８２７年9月3日という日付が記されている。そうしてｐ. 66に認められる計算によれば、アーベルは「有理数を係数にもつ素次数アーベル方程式の根の形状」（アーベル全集 II，ｐ. 287）を決定しているということである。

二問題（A），(B）に加えて、今またアーベル方程式が取り上げられて、根の形状の決定が試みられている。しかも注目すべきことに、そのアーベル方程式には、断片（１）におけるのと同様に、有理係数をもつという限定条件が課されている。アーベル方程式の構成問題への道がいましも開かれようとする瞬間の、真に深い予感に満たされた状勢と言わなければならないであろう。クロネッカーの代数方程式論には、このアーベルの遺産が全面的に継承されているのである[1]。

---

[1] クロネッカーがアーベルの遺稿Ｄを知っていたと信じるに足る証拠はない。しかし遺稿Ｄは、アーベルの代数方程式論の中には、アーベル方程式の構成問題への志向性が内在していることをはっきりと示している。クロネッカーはそのような趨勢をアーベルから受け継いだ。そうしてたとえ遺稿Ｄは知らないにせよ、クロネッカーはクロネッカーなりの仕方でアーベル方程式の構成問題に到達したのである。

３．アーベル方程式の構成問題

二つの代数的可解条件

クロネッカーの代数方程式論は１８５３年の論文［K－６］とともに端緒が開かれていくが、この論文は同時に、クロネッカーの構想の全契機がそこに萌しているという点において特筆に値する。書き出しの数語からしてすでに異様な雰囲気が醸し出されている。

> 素次数［既約］方程式の可解性に関するこれまでの研究 ──── 特にアーベルとガロアの研究。それらはこの領域において引き続き行なわれたすべての研究の土台をなすものである ──── は本質的に、ある与えられた方程式が［代数的に］解けるか否かを判定しうる二通りの基準を明らかにした。 ［クロネッカー全集 IV , p . 3 .］

考察の対象として設定されているのは素次数をもつ代数方程式であり、ここには明記されてはいないが、つねに既約方程式が考えられている。そうしてクロネッカーによれば、そのような方程式の代数的可解性を判定するための二通りの基準が、アーベルとガロアの手によって「本質的に」明るみに出されたというのである。論文［K－６］の進行につれて判明するように、一つの判定基準は、本稿の第２章で言及がなされたガロアの定理にほかならない。しかし、もう一つの判定基準については、我々は何も知るところがない。クロネッカーはガロアのほかにアーベルの名も挙げているが、アーベルの代数方程式論にくまなく目を通しても、クロネッカーの言う判定基準はどこにも見あたらない。こうして我々は冒頭の一文を一読したその瞬間に、たちまちの

うちに大きな困惑のさなかに投げ出されてしまうのである。

だが仔細に見れば、クロネッカーは代数的可解性の判定基準が「本質的に」明らかにされたという見解を表明しているにすぎず、明確な形をもって提示されたと語っているわけではない。するとクロネッカーの言葉の正否は、（ガロアではなくて）アーベルの代数方程式論の中から何かしら新しい判定基準を取り出すのは可能か否かという、その一点にかかっていると言わなければならないであろう。論文［K－6］ははたしてそのように進展し、ほどなくして**アーベル・クロネッカーの定理**（これは私が仮に与えた名称である）とも呼ぶべきめざましい定理に到達する。それが、代数的可解性の第二の判定基準である。その様子を見よう。

クロネッカーはまず初めにアーベルの問題（B）の表現様式を精密化して、

> ある量 A, B, C etc. の**有理**関数を係数とする、ある与えられた次数を有する方程式を満足するような、これらの量の最も一般的な代数関数を見つけること。 ［同上，p.4.］

というふうに問題を設定する。アーベルの問題（B）に比して、今度は「求める方程式の係数の間の関係」（同上，p.4）が明確に表明されている。そのうえで、方程式の既約性に関して

> ここで、 A, B, C etc. の既約性を前提としたことに注意しなければならない。すなわちその方程式は、（A, B, C etc. に何らかの特別の値を代入するのではない限り）やはり A, B, C etc. の**有理**関数を係数とするいくつかの低次因子に分解されることはありえない。 ［同上，p.4.］

という注意事項が明記され、上記の問題の言い換えが行なわれる。

ある与えられた数 n に対して、次のような A, B, C etc. の最も一般的な代数関数を見つけること。すなわち、そこに包含されている巾根記号の変更を通じて生じるさまざまな表示式のうち、 n 個の表示式は、それらの対称関数がすべての量 A, B, C etc. の**有理**関数になるという性質をもっている。

［同上，p.5. 以上の三つの引用文で、「有理」の原語はイタリック体。］

続いてこの問題に対するアーベルの二つの解答が紹介される。

方程式の与えられた次数、あるいは、第二の言い回しに即するなら、値の個数が素数の場合に対して、アーベルは引用された論文の中で、この研究を本質的に非常に遠い地点まで押し進めて、求める代数関数がもたなければならない、次のような二通りの形状を報告した。

$$\text{(I)} \qquad p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + f_2(s) \cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \cdot \cdot \cdot + f_{\mu-1}(s) \cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

（全集，第二巻，p.204[1]）。ここで、 素数 μ は方程式の次数、 p_0 は A, B, C etc. の有理関数、 s は A, B, C etc. の代数関数、そうして $f_k(s)$ は s **および** A, B, C etc. の有理関数を表わすものとする。 ――――― 第二の形状はアーベル全集，第二巻， p.190[2] に見いだされる。それは、

[1] ここで言われている全集はホルンボエが編集した旧版である。新版の全集では、第二巻，p.237。

[2] 新全集，第二巻，p.222.

(II) $$p_0+R_1^{\frac{1}{\mu}}+R_2^{\frac{1}{\mu}}+\cdot\cdot\cdot+R_{\mu-1}^{\frac{1}{\mu}}$$

というものである。ここで、 p_0 は A, B, C etc. の有理関数であり、 $R_1, R_2, \cdots$ は、 A, B, C etc. の有理関数を係数とするある $\mu-1$ 次方程式の根を表わしている。　[同上, p.5. ゴシック体の語句の原語はイタリック体。]

(I) はアーベルの第二表示式であり、(II) は第一表示式である。これらの表示式について、クロネッカーは「私の見るところではなお二、三の補足が望まれるように思われる」(同上, p.5) と語っている。そのわけは、「これらの形状はなおあまりにも一般的すぎる。すなわち、それらは問題を**満足しない**ような代数関数をも包含している」(同上, p.5. ゴシック体の語句の原語はイタリック体) からである。このような認識のもとに、クロネッカーはさらに独自の歩みを運んでいく。

すでにアーベル自身が書き留めていたように、表示式 (II) における $\mu-1$ 個の量 $R_1, R_2, \cdots R_{\mu-1}$ は互いに独立ではなく、ある $\mu-1$ 次の代数方程式の根になっている。ところがクロネッカーはなお一歩を進めて、その方程式は「アーベル方程式」であるという、際立った事実を発見した。

そこで私はそれらの二通りの形状を詳細に調べ、まず初めに、形状 (II) に含まれている代数関数のうち、問題を満足するものは次の性質をもたなければならないことを発見した。すなわち、(アーベルが気づいたように) 量 $R_1, R_2, \cdots$ の対称関数ばかりではなく、――― それらをある一定の順序に並べるとき ――― それらの巡回関数もまた 、A, B, C etc. の有理関数でなければならないのである。すなわち、

量 $R_1, R_2, \cdots$ を根とする $\mu-1$ 次方程式はアーベル方程式である。 [同上，pp.5－6.]

ここで注意しなければならないのは、クロネッカーの言う「アーベル方程式」の意味するものは、実際には巡回方程式であるという事実である。

私はここで、「アーベル方程式」とはつねに、アーベルが全集，第一巻，論文 XI[1] で取り扱った特別のクラスの可解方程式のことと考えている。それは、（その方程式の係数は A, B, C etc. の有理関数とし、その根をある一定の順序に並べて $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とするとき）「根の巡回関数は A, B, C etc. の有理関数である」、あるいは「方程式 $x_2=\theta(x_1)$，$x_3=\theta(x_2), \cdots$，$x_n=\theta(x_{n-1})$，$x_1=\theta(x_n)$ が成立する。ここで、$\theta(x)$ は A, B, C etc. の有理関数を係数とする x の整有理関数を表わす」ということによって定義されるものである。 [同上，p.6.]

クロネッカーの究明は量 $R_1, R_2, \cdots R_{\mu-1}$ の形状のより精密な決定へと進み、その結果、素次数代数的可解方程式の根が所有するべき、過不足のない形状が獲得される。それは、「問題を満足させる表示式が**もたなければならない**形状であるばかりではなく、問題を満足させるような表示式**だけ**を包含する形状」である。

ところが、上記の公式（I）と（II）のさらに踏み込んだ研究により、形状（II）が問題を満足するものにする量 R の、次のようないっそう精密な決

(1) 「ある特殊な代数的可解方程式に関する論文」；アーベル全集 I, pp.478－507.

定が生じる。すなわち、

$$\text{(III)} \qquad R_\kappa = F(r_\kappa)^\mu \cdot r_\kappa^{\gamma_{-1}} \cdot r_{\kappa+1}^{\gamma_{-2}} \cdot r_{\kappa+2}^{\gamma_{-3}} \cdots r_{\kappa+\mu-2}$$

というふうでなければならない。ここで、 $r_\kappa, r_{\kappa+1}, \cdots$ はある $(\mu-1)$ 次アーベル方程式の $\mu-1$ 個の根である。すなわち、量 r （それらの配列は指数の順に行なう）の対称関数ならびに巡回関数は A, B, C etc. の有理関数である。さらに、 $F(r)$ は r と A, B, C etc. との有理関数を表わす。最後に、 g は μ の原始根として、 γ_m は法 μ に関する g^m の最小剰余を表わしている。このような R_κ の表示式を（II）に代入するときに得られる形状は、問題を満足させる表示式が**もたなければならない**形状であるばかりではなく、（これが主要な点なのだが）問題を満足させるような表示式**だけ**を包含する形状」でもある。すなわち、そのようにして生じる形状は、A, B, C etc. との有理関数を係数とするある μ 次方程式を、その根として恒等的に満足し、他の根は（II）における μ 次の巾根記号の変更を通じて得られる。詳しく言うと、 m 番目の根 z_m は次の方程式

$$\text{(IV)} \qquad z_m = p_0 + \omega^m \cdot R_1^{\frac{1}{\mu}} + \omega^{gm} \cdot R_2^{\frac{1}{\mu}} + \omega^{g^2 m} \cdot R_3^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + \omega^{g^{\mu-2} \cdot m} \cdot R_{\mu-1}^{\frac{1}{\mu}}$$

で定められる、というふうにして得られるのである。ここで、量 R は（III）の表示式のことと諒解しなければならず、 ω は 1 の虚の μ 乗根を表わすものとする。 ［同上，pp.6－7．ゴシック体の語句に対応する原語はイタリック体で書かれている。］

表示式（IV）を観察すると、そこからただちに、素次数既約可解方程式の構造を

教える一つの定理が取り出される。

これよりまず第一に明らかになるのは、諸量 z の対称関数が A, B, C etc. の有理関数であるのに対して、（指数の順に配列するとき）これらの量の巡回関数は A, B, C etc. **および** $r_1, r_2 \cdots$ の有理関数であるということである。ところが、これらの量 r はそれら自身、あるアーベル方程式の根である。従って $r_2, r_3 \cdots$ は r_1 と A, B, C etc. との有理関数である。それ故、上記の状勢ははまさしく、「素次数可解方程式はどれも、もしそれ自身があるアーベル方程式の根であるような量 r_1 を既知と仮定するならば、アーベル方程式である」ということ、言い換えると、「可解方程式の μ 個の根はつねに、

$$z_2 = f(z_1, r_1),\ z_3 = f(z_2, r_1),\ \cdots,\ z_1 = f(z_\mu, r_1)$$ [1]

というふうに相互に結ばれている。ここで、 $f(z, r_1)$ は z, r_1 と A, B, C etc. との有理関数を表わし、 r_1 は、 A, B, C etc. の有理関数を係数とするあるアーベル方程式の根である」ということを意味しているのである。

［同上，p.7.「および」の原語はイタリック体で記されて強調されている。］

---

[1] ここでの r_1 は式 (III) における r_1 とは異なっている。ここで言われているような r_1 は、式 (III) における r_1 と 1 の原始 μ 乗根とを適宜組み合わせて構成される。

これがアーベル・クロネッカーの定理である[1]。

細部の形状に多少の差異は認められるが、表示式（IV）はアーベルの第三表示式の類似物である。そうしてアーベルはその第三表示式をすでに手中にして、断片を書き留めているのであるから、詳細な説明は欠如しているとはいうものの、ここまでの究明についてはアーベル自身もおおよそ到達していたであろうと見るのが至当である。そこでクロネッカーは、素次数既約方程式の一つの代数的可解条件が、アーベルの研究によって「本質的に」明るみに出されたと語ったのである。正しく真相を見通した言葉と言わなければならない。

アーベル・クロネッカーの定理の表明に続き、クロネッカーは二つの代数的可解条件に触れて、

> 任意の可解方程式の根のこのような関係こそ、アーベルとガロアによって素次数可解方程式の根の特色として報告された性質、すなわち、「根は他の二根の有理関数でなければならない」という性質の真実の泉である。　[同上，p. 7.]

という、印象的な一文を書き記している。ここではガロアの定理が［アーベルとガロアによって報告された性質」として言及されているが、この定理はアーベル・クロネッカーの定理からたやすく派生する[2]のであるから、この言葉もまた正当である。アーベル・クロネッカーの定理は、素次数既約方程式の根の間に認められる、究極の相互関係を与えているのである。

---

(1) ガロア理論の立場から見れば、巡回方程式は可解方程式の簡単な一例にすぎない。他方、アーベルの理念を継承しようとする立場に立てば、アーベル・クロネッカーの定理は、代数方程式論全体の中で巡回方程式というものの占める特別の位置を我々に教えている。

(2) アーベルの問題（B）に立ち返ってここまでの道のりを想起すると、ガロア理論とは独立にガロアの定理が得られたことになる。

「アーベル方程式」の概念の変遷

アーベル方程式の構成問題へと歩を進める前に、ここでアーベル方程式という言葉の意味を吟味しておきたいと思う。上に見たように、クロネッカーは１８５３年の時点では、この言葉を巡回方程式を意味するものとして用いていた。他方、今日の習慣では、「アーベル方程式」という言葉が指し示しているものは「そのガロア群がアーベル群であるような方程式」にほかならないが、この意味におけるこの言葉の創案者はカミーユ・ジョルダン（１８３８－１９２２）である。ジョルダンは著作『置換および代数方程式概論』（１８７０年），§. 402 においてこう言っている。

> こうして我々は、その「ガロア」群が唯一の巡回置換の巾からつくられているような方程式へと導かれていく。クロネッカー氏はこのような方程式を**アーベル方程式**と呼ぶことを提案した。しかし私には、この名称はもっと一般的なクラスの方程式にまで拡げておくのが適切であるように思われる。それはやはりアーベルによって考察されたものであり、しかも同じ原理に基づいて取り扱われるのである。そこで我々は、その「ガロア」群が相互に交換可能な置換だけしか含まないような方程式をすべて、**アーベル方程式**と呼ぶことにしたいと思う。　[同書，p. 287. ゴシック体の語句に対応する原語はイタリック体。]

１８７７年、クロネッカーは論文

[K－10]　アーベル方程式について　　[１８７７年4月１６日に学士院で朗読された論文の抜粋。学士院月報 pp. 65 － 71.]

の中でジョルダンの提案の受け入れを表明した。

・・・　この方程式は、すでにジョルダン氏によって実行されているように、１８５３年の月報，p.368 における私の覚書[1] におけるものよりも広い意味において、「アーベル方程式」と呼ぶのが至当である。私の覚書に登場する方程式については、ここではそれを「**単純**アーベル方程式」と呼ぶことにしたいと思う。　［同上，p.66．ゴシック体の語句に対応する原語はイタリック体。］

ただし、この言葉の始めに言われている「この方程式」は、厳密に見ればジョルダンのアーベル方程式と同じものではない。クロネッカーの念頭にあるアーベル方程式はアーベルの論文［A－１］における「ある特殊な代数的可解方程式」そのものを指し示す概念であり、クロネッカー自身の言葉では、

第二に、$\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \cdots$，の有理関数を係数とする方程式 $F(x)=0$ がアーベル方程式であるというのは、そのすべての根 ξ が、それらの一つと量 $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \cdots$ との有理関数であり、しかもそれらの関数のうちのどの二つの $\theta_\alpha, \theta_\beta$ についても

$$\theta_\alpha \theta_\beta(\xi) = \theta_\beta \theta_\alpha(\xi)$$

という関係の成立が認められることをいう。　［同上，p.66.］

というふうに定義されることになる。既約方程式を対象とする場合には、ジョルダン

[1] 論文［K－６］．

とクロネッカーによる二種類のアーベル方程式の概念は一致するが、一般には前者は後者を包摂するのである。ともあれ１８５３年の論文［K－６］の時点に比して、アーベル方程式の概念の妥当域はこうして新たな拡がりを獲得した。すなわち、アーベルの言う「ある特殊な代数的可解方程式」はここに正しくアーベル方程式の名を与えられ、巡回方程式（クロネッカー以前にこのような用語が存在していたわけではないが）のほうは、アーベル方程式との関連において「単純アーベル方程式」と呼ばれることになったのである。

だが、用語法は数年の後にもう一度変遷する。１８８２年の論文

［K－11］　アーベル方程式の合成　　［１８８２年2月７日、学士院朗読。学士院議事報告，pp . 1059 － 1064 ; クロネッカー全集 IV , pp . 115 － 121 .］

の中で、クロネッカーは次のような注意事項を書き留めている。

> 私はすでに１８５３年の月報に発表された論文において「アーベル方程式」という名称を導入したが、これは１８７７年１２月の月報では「単純アーベル方程式」と呼ばれて、多重アーベル方程式とは区別されていた。しかし、すでにその場所で言及がなされたアーベル方程式の合成 (1) の場合について示されるように、特別の取り扱いが必要とされるのは**単純**アーベル方程式のみである。なぜなら、他のアーベル方程式は単純アーベル方程式に還元されるからである。それ故、私がこれまでのあらゆる論文においてそのようにしてきたように、**単純**アーベル方程式のことを端的に「アーベル方程式」と呼び、**多重**アーベル方

(1) クロネッカーは、ガウスによる二次形式の合成の概念（ガウス「整数論」第五章参照）を範例として、アーベル方程式の合成の概念を導入した。

程式については、「多重」という形容詞を付けてその特徴をはっきりと示すことにするのがよいのではないかと思われる。　　[同上, pp. 118 − 119. ゴシック体の語句に対応する原語はイタリック体。]

クロネッカーの苦心の用語法は息の長い思索に裏打ちされているものであり、強い説得力を備えていると私には思われるが、今日の数学にはひとつも生かされていない。しかし少なくともクロネッカーの数論の解明という立場に身を置こうとする場合には、「クロネッカーの定理」や「クロネッカーの青春の夢」の言明における「アーベル方程式」の一語の意味を正確に把握するうえで、アーベル方程式の概念の変遷過程の識別は依然として本質的に重要である。

アーベル方程式の構成問題

こうして素次数既約方程式を対象とする場合、アーベルの問題（B）は一つの完全な形での解決を見るに至り、その解決の仕方それ自体から、代数的可解性を判定するための二通りの基準が取り出された。それに伴ってガロアの定理の「真実の泉」もまた見いだされたが、このみごとな情景を眼前にしてなお、クロネッカーの状勢判断には非常にきびしいものがある。それというのも、クロネッカーの見るところによれば、「これらの判定基準は可解方程式**それ自体**の本性に関しては、実際にはごくわずかな光さえも与えなかった」（同上, p. 3. ゴシック体の語句に対応する原語はイタリック体）からである。クロネッカーはさらに言葉を重ねている。

実際のところ、（アーベルがクレルレ誌第四巻で取り扱ったもの[1]と、二項

[1] アーベルの論文［A−1］.

方程式に関するもの[(1)]とを除いて）与えられた可解条件を満たす方程式というものははたして存在するのかどうかということは、全く知ることができなかったのである。そのうえ、そのような方程式を**作る**こともほとんどできなかったし、他の数学上の研究を通じても、いかなる場所でもそのような方程式に導かれたことはなかった。これに加うるに、アーベルとガロアによって与えられた、上述の非常に一般的に知られている可解方程式の二つの性質は、特にそれらの二通りの判定基準のうちの一方について私が後ほど示すであろうように、偶然にも、可解方程式の真の性質を明るみに出すというよりも、むしろ覆い隠す役割を果たすといってもよいようなものであった。そうして可解方程式**それ自体**は、ある種の暗闇の中にとどまっていた。それは、整係数五次方程式の根に関する、ほとんど注意を払われることがなかったように思われる非常に特殊なアーベルの覚書[(2)]により、ごくわずかな部分が明らかにされたにすぎない。

［同上，p.3．ゴシック体の語句の原語はイタリック体で記されている。］

アーベルとガロアによる二通りの判定基準は、可解方程式の真の性質を明るみに出すというよりも、むしろ覆い隠す働きを示すというべきものであり、可解方程式それ自体は依然として暗闇に閉ざされている。クロネッカーはそのように語っている。どの部分を見てもただならぬ気配が感知され、まことに神秘の言葉と言わなければならない。だが、クロネッカーの数論の解明という立場を固守しようとする以上、我々はここに言われている「可解方程式それ自体の本性」という一語の指し示すところのものを、どこまでも尋ねていかなければならないであろう。幸いにもクロネッカー自身が解答の指針を与えている。

---

(1) 円周等分方程式が念頭に置かれていると考えられる。

(2) 本稿第２章，断片（１）．

そうして可解方程式それ自体は、「すべての可解方程式を見つけること」という問題の解決を通じてのみ、完全に解明することができる。というのは、そのとき、無限に多くの新しい可解方程式が手に入るばかりでなく、存在する可能性のあるあらゆる可解方程式がいわば**眼前に**得られることになる。そうして具体的に書き表わされた根の形状のおかげで、可解方程式のすべての性質を発見して提示することができるようになるからである。　［同上，pp.３－４．ゴシック体の語句の原語はイタリック体で記されている。］

すなわち、「可解方程式それ自体」の解明とは、アーベルの問題（A）の解決の謂にほかならない。問題（A）こそは、ガウスによる二つの基本問題の、さらにその奥底に横たわる問題である。**全代数方程式論の根底にあって、しかもこの理論の諸相を根本的に統べているある原理的なもの。クロネッカーの目はそのようなものの存在を問題（A）の解決の中に見たのである。**

問題（A）の解決への道はアーベル・クロネッカーの定理の中にすでに端緒が開かれている。なぜならこの定理により、問題（A）、すなわち「すべての可解方程式を見つけること」という問題は、「**すべてのアーベル方程式**（実際には巡回方程式）**を見つけること」**という問題に帰着されるからである。こうしてここにおのずと**アーベル方程式の構成問題**が措定され、ここを起点として、真にクロネッカーに固有の歩みが踏み出されていくのである。

アーベル方程式の構成問題の具体的な様相は、係数域の設定の仕方に応じてさまざまに分岐する。係数域を有理数域に限定するとき、１８５３年の論文［K－６］の時点では、

どのようなアーベル方程式の根も、１の巾根の有理関数として表示される。

［同上，p. 10.］

という形の命題が提示され、整係数アーベル方程式というものは本質的に円周等分方程式にほかならないと主張されている。前節（「アーベル方程式」の概念の変遷）で見たように、ここで言われている「アーベル方程式」は巡回方程式を意味している。１８７７年（２４年後！）の論文［K－10］に移ると、同じ命題が

整係数を有するアーベル方程式の根はすべて、１の巾根の有理関数である。また、１の巾根の有理関数はすべて、整係数アーベル方程式の根である。

［同上，p. 69.］

というふうに再提示されているが、今度は「アーベル方程式」という言葉には一般的な意味が附されている。これが「クロネッカーの定理」である。

同じ論文［K－６］には、

$a+b\sqrt{-1}$ という形の複素整数のみを含む係数をもつアーベル方程式の根と、レムニスケートの等分の際に現われる方程式の根との間にも、類似の関係が存在する。 ［同上，p. 11.］

という、「クロネッカーの青春の夢」の一区域をなす主張も現われている。ここでは係数域はガウス整数域である。また、「アーベル方程式」はもとより巡回方程式を指している。この主張に続いて「上記の結果をさらに、定まった代数的無理数を含む係数をもつすべてのアーベル方程式に一般化することができる」（同上，p. 11）という言葉も見られるが、論文［K－10］に至ると、一般に虚二次数域を係数域とする場合への言及が行なわれる。すなわち、虚数乗法をもつ楕円関数をテーマとする

１８５７年の論文［K－８］を継承して、**虚二次数域上の（一般的な意味での）アーベル方程式は、特異モジュラー方程式と、特異モジュールをもつ楕円関数の等分方程式で汲み尽くされる**、という主張がなされた（同上，p.70）[1]のである。この主張は１８８０年3月１５日付のユリウス・ヴィルヘルム・リヒャルト・デデキント（１８３１－１９１６）宛書簡（クロネッカー全集 V，pp.455 － 457）の中でも、「有理数の平方根を伴うアーベル方程式は**特異モジュールをもつ楕円関数の**変換方程式で汲み尽くされる」（同上，p.455）という形で繰り返されている。これが**「クロネッカーの最愛の青春の夢」**である。純粋に代数方程式論の立場に立つ限り、アーベル・クロネッカーの定理から認識されうるのは、巡回方程式の働きの重要性のみであり、一般のアーベル方程式というものに注目するべき特別の理由は見あたらない。ところが１８５７年の論文［K－８］の段階ですでに、特異モジュラー方程式や、特異モジュールをもつ楕円関数の等分方程式の諸性質はすでにクロネッカーの手中にあり、それらは一般的なアーベル方程式であって、単なる巡回方程式の圏内にはおさまらないことがわかっている。そのような状勢に自然に対応して、「青春の夢」における「アーベル方程式」もまた一般的な意味合いを獲得した。すなわち、「青春の夢」の表明という出来事が生起する背景には、単なる代数方程式論を越えた世界 ———— クロネッカーの数論的世界 ———— が拡がっていると考えられるのである。

---

[1] クロネッカーの言葉は次の通り。

「私はすでに１８５７年の月報、p.455 以下において、楕円関数の特異モジュール、もしくは、特異モジュールをもち、しかもその変数は周期に対して有理比を有するという性質をもつ楕円関数それ自身を根とする方程式の性質を説明した。上に詳述した事柄によれば、これらの方程式を手短にアーベル方程式 ———— その係数は整数の平方根以外にはいかなる非有理量も含まない ———— と呼んでさしつかえない。そうしてそのような方程式の全体は、楕円関数の理論に由来する方程式で汲み尽くされると予想しなければならない。」

晩年の諸論文

５０代も後半に入ったころ、クロネッカーはアーベル方程式の構成問題の解決への志向を示す諸論文を、矢つぎばやに公表していった。既述のように、１８７７年の論文［K－10］ではアーベル方程式という言葉の適用範囲が拡大され、その結果、「クロネッカーの定理」と「青春の夢」の姿形が最終的に確定した。１８８１年の長篇［K－３］を概観すると、独自の代数的整数論を建設することにより、「クロネッカーの定理」や「青春の夢」の広汎な基盤を定めようとしている様子がありありと感知される。１８８２年の論文［K－11］を見れば、アーベル方程式の合成の概念を土台に据えることにより、三次方程式と四次方程式を対象とする場合において、クロネッカーの定理の内容が具体的に書き表わされている。下記の三論文

［K－12］　方程式の既約性について　［１８８０年２月２日、学士院朗読。学士院月報, pp. 155 － 162．クロネッカー全集 II, pp. 85 － 93.］

［K－13］　ある種の複素数の巾剰余について　［１８８０年４月２２日、学士院朗読。学士院 月報, pp. 404 － 407．　同上, pp. 97 － 101.］

［K－14］　域 $(\sqrt{-31})$ の三次アーベル方程式　［１８８２年１２月２１日、学士院朗読。　学士院月報, pp. 1151 － 1154．　クロネッカー全集 IV, pp. 125 － 129.］

からは、虚二次数域 $(\sqrt{-31})$ を手掛かりとして「青春の夢」に接近しようとする試みが読み取れる。そうして最晩年の連作［K－４］は、「青春の夢」の解決をめざして書き継がれた、未完成の大交響曲である。「青春の夢」はクロネッカーの心の中で生涯に渡って育まれ、尽きない泉となって、クロネッカーの数論的世界を広々と紡ぎ出したのである。

4．クロネッカーの数論における代数方程式論の位置

今日の代数方程式論の歴史叙述は一般にガロア理論形成史とほぼ同等であり、ガウスやアーベルの諸理論はこの理論へと至る道程の途上に、さながら一里塚のような位置を与えられるのが普通である。数学という学問を純粋に論理的な視点から観照する立場に立つならば、すなわち、数学史を完成された諸理論の形成過程と見る立場に立つならば、ラグランジュからガロアへと至る代数方程式論の流れは、ガロア理論への道そのものであるかのように我々の目に映じることであろう。もとよりそれはそれで別段まちがっているわけではない。しかしそれとは別に、**論理的な視点から本質的な視点へと移行して、数学の形成を基本動機の芽生えと成長の歴史と見る見方もまた可能である。**代数方程式論の場合、我々はこの理論の契機をガウスの円周等分方程式論の中に見いだして、その展開史を叙述した。ガウス、アーベル、ガロア、クロネッカーという、わずかに四人の数学者しか登場しない小さな物語[(1)]だが、それはガロア理論形成史とは全く異なるもう一つの歴史である（「形成史」というよりも「生成史」と呼ぶのがふさわしい）。ガウスやアーベルがガロア理論形成史のひとこまとして語られたのとは裏腹に、今度はガロア理論はガウスの基本動機の展開過程の中に自然に位置づけられていく。私の見るところでは、ガロア理論というものの真実の価値は、そのようにして初めて明らかにされていくのである[(2)]。

ガロアの定理の表現様式や、モジュラー方程式への応用の中に見て取れるように、ガロアに対するアーベルの影響は非常に濃厚である。だが、ガロア理論は理論それ自

[(1)] クロネッカー以降、継承者はひとりも現われなかった。そのために、ここで言われている小さな物語は、数学史の中で、いわば「閉ざされた世界」を形作っている。

[(2)] これに対して、ガロア理論形成史の立場に立つと、ガロア理論それ自体の意味や意義を問う視点は定まらない。

体としてはガウスの世界に直接つながっている。他方、クロネッカーに及ぼされたアーベルの影響は決定的であり、アーベルなくしてクロネッカーはありえなかったであろう。クロネッカーの代数方程式論は、アーベルの基本理念のクロネッカーへの継承という、真に創造的な場の上に生い立っていく。私はこの歴史的な場面の成立の時期を１８４５年から１８５３年にかけてのあの空白の８年間に想定し、その確認を本稿の具体的目標として設定した。そうしてこの目標を耐えず念頭に浮かべつつ、手元に遺されているわずかな資料を駆使して実証に努めたのである。

最後に、クロネッカーの数論的世界全体の中で、代数方程式論が占めるべき位置を問う問いが残されている。この問いに答えることこそ、われわれの本質的目標であり、本稿の真実の主題である。クロネッカーの世界は

代数方程式論
代数的整数論
楕円関数論

という三つの理論を主柱として構成されているが、どの理論においてもかけがえのない先行者に恵まれている。代数方程式論におけるアーベルについては既述の通りである。代数的整数論には、土台となるクンマーの理論に加えて、ディリクレの影響もまた色濃く認められる。そうして楕円関数論の領域では、カール・ギュスタフ・ヤコブ・ヤコビ（１８０４－１８５１）の手で整備された理論的枠組みの中で、アーベルが提起した諸問題が究明されている。前稿「クロネッカーの数論の解明 I．解明の基本構想」で見たように、これらの三本の柱は一つに融け合って、非常に一般的な意味合いにおける虚数乗法論を志向しているように私には感じられる。その強靭な志向性の根底にあって、世界生成の基本契機として働いているある理念的なもの。それは「クロネッカーの定理」や「青春の夢」の特異な表現様式の中に、明確な形をもって

顕われている。「クロネッカーの定理」や「青春の夢」は、ガウスに始まる新しい代数方程式論の流れの到達点であると同時に、一般虚数乗法論の出発点である。クロネッカーの手にアーベルの基本理念が手渡されたとき、それはそれ自体が新たな一個の基本動機へと転化して、クロネッカーの数論的世界の生成点を形成した。それが、クロネッカーの数論において代数方程式論が果たしている最も本質的な役割である。家庭の事情と病苦による障害に悩まされたあの空白の８年間は、大きな数学的創造に不可避的に伴う、明るい輝きに包まれた揺籃時代だったのである。

［平成６年（１９９４年）３月９日］