# ギリシャにおける
# 数学と哲学の交流

早稲田大学理工学部　足立恒雄

本稿は、その後少し発展させて、The Dawn of Mathematical Philosophyという題名の論文となったものの最初の原稿である。後に検討を加えて修正していった箇所が、特に後半部分に多いが、最初はどういう形であったか、やっぱり残しておきたいと思い、そのまま手を加えずに載せていただくことにした。

数それ自体というようなものはないし、またありえない。実際には多くの数世界があるのである。それは多くの文化があるからに他ならない。それぞれの数概念はいずれも根底から独自のものであり、異なった世界感情の表出である。（シュペングラー『西洋の没落』）

序　B.ラッセルは「厳密な意味での数理哲学は決定的な科学的結果について述べるものではなく、むしろ今なお確実性を得ることができないで、われわれの知識の境界近くに横たわっている問題を取り扱うものである」（『数理哲学序説』）と数理哲学を位置付けた。

２０世紀の始め、集合論のパラドックスに端を発した論理主義、直観主義、形式主義の対立抗争は、現在の数学者は意識しない場合が多いけれども、現代数学の基礎付けに大きく貢献したのである。例えば、直観主義からの主張は「存在」という言葉の意味を考えさせる好機を与え、構

成的という用語が数学に登場するきっかけとなった。論理主義は論記号による命題や証明の記述、自然数の定義など数学の基礎の確立に貢献した。しかし述語論理の完全性と算術を含む体系の不完全性は数学が論理学の一部ではないことを示していると思える。また純粋の直観主義によっては数学が救われるとは思えない。現代の数学は基本的には形式主義を拠り所としていると思われるが、といって数学の基礎に何の問題もなくなったというわけではない。論理主義や直観主義の投げかけた問題点は休眠状態で、さらに次の時代の、違った意識から成り立つ形態の数学における課題として残されていくといえよう。われわれにはそれがどういう解決を見るか知り得ないばかりか、どういう課題が残されているのかすら、明確な形では察知することができないのである。というのは、いつもそうであるように、問題が分かるということは半ば解決したのも同然なのだから。さらには、次世代の与える解決がわれわれの問題意識にとって満足のいくものであろうのかどうか；所詮それは異文化における解決なのである。

数学は外見にはルーチン的な形式論理の世界であるが、現場では数学的アイデア、数学的直観が生命の世界である（その数学的アイデアとは何か定義せよと問われれば、「私に数学的アイデアが定義できないのは猫がネズミを定義できないのと同じで、しかしわれわれはどちらも対象が自分に引き起こす徴候によってそれを認識するのである」。プラトンは数学者ではなく、アリストテレスも数学者ではない。ユークリッドは哲学者ではなく、アルキメデスも哲学者ではない。数学と哲学はギリシャの昔においても歴然と別の学問であったのである）。

数学者は数学的アイデアには興味はあるが、数理哲学的な問題には関心もなければ、論じる能力も持たない。「1に1が加わって2になったのは、加えられた方の1か、それとも加わった方の1か」などというような問題には関心もなければ、口をはさむ能力もないのである。すなわち、数学の基礎付けという作業は通常の数学的能力の持ち主には扱いきれないのであって、必然的に数理哲学者（数学の真偽性などに関心をもつ哲学者、および哲学的傾向を有する数学者）の独擅場ということになる。そして、各時代の要求と意識に合わせた程度の、あるいは傾向の、厳密化と基礎付けができた段階で再び数学は数理哲学と縁を切って、数学自体が独自の展開を続けるのである。このようなことが数学とは何か、そしてその真偽性などが問題になった各時代に繰り返されたのであるが、その中でも数理哲学が特に大きな成果を挙げた時代としてギリシャ時代と20世紀の前半を挙げることができよう。

いみじくもラッセルは「ユークリッドの公理や公準を求めた初期のギリシャの幾何学者は数理哲学の研究に従事していたということができる」（上掲書）と述べているが、正確に言えば、幾何学者だけの手によって数の定義や公理・公準が与えられたわけはないのである。

本稿ではギリシャにおいて純理としての数学がいかにして成立し得たのかを古代ギリシャの社会的背景、民族的習慣、ギリシャ哲学などギリシャ固有の思想の流れの中で捉えて解明してみよ

うと試みる。数学といえども文明の一部であるからには、時代精神と無縁ではありえない。だから、数学をギリシャ文化全体の中におくことによって、ある程度は隠れた部分も見えてくるはずだ、というのがこの試みの根拠である。

## §1　ギリシャ数学の特徴付け

### ギリシャ数学の純粋主義

ギリシャ数学、特にユークリッド『原論』の特徴として次の三つを挙げることができる。

1　抽象主義

2　原理主義（アルケーイズム）

3　演繹主義

抽象主義は、感覚的存在の個数や図形を扱うのではなく、数学的対象、つまり、数や幾何学的図形そのものの存在を独立させ、それを数学の研究対象とするという思想である。

原理主義は、冒頭に定義・公理を置き、理論体系の基礎に据えるという思想である。

演繹主義は、直観的あるいは経験的な証明を意識的に排除して、三段論法や背理法などのいわゆる演繹的論証法を用いて、一歩一歩単純な命題から複雑な命題へと定理の個数を増やしていくという方法の厳守である。

現代数学を他の自然科学から区別するのは、やはりこの三原理であろうから、このことは現代数学とギリシャ数学の、少なくとも形式上の親近性を示しているのである。

こういう三原理に基づく数学の形態をここでは純理としての数学、あるいは数学における純粋主義と呼ぶことにする。

ユークリッドの『原論』は純理としての数学の典型的例なのだが、こうした数学がどうして成立し得たのか現在でも謎に包まれている。というのは、『原論』以前の数学書がほとんど残されていないので、その成立過程が推測による以外知ることができないからである。

そもそも、純粋主義は何もギリシャ数学だけを特徴付けるものではなく、実はギリシャの学問の一つの特徴でもある。例えば、プラトンは、天文学が農耕や航海に役立つという言明に対して、「なんだか大衆に気兼ねして、役にも立たない学問を押しつけようとしていると思われはしないかと、びくびくしているように見えるではないか。しかしほんとうに重大なのはこうした学問の中で各人の魂のある（真理を見る機能を備えた）器官が浄められ、再び火をともされるというこ

とだ」と一蹴する。ギリシャ数学の精神は「何かの役に立つ」という思想とちょうど対極にあるということを覚えておかねばならない。

簡単に言えば、抽象的な言語に基づく思考というものがなければ、数学的対象を独立させて考えるなどということはありえないわけだから、数学における抽象主義は抽象的言語とそれを用いた抽象的思考の成立と深く関連しているはずである。また、原理主義というのはギリシャ特有のアルケー（始原、第一原理）という思想の中で考えるのが妥当であろう。つまり、アルケーという思想は今の宇宙論のようなもので、万有の始原を論ずるものだが、数学にもアルケーを考えたのが定義・公理・公準である。『原論』はギリシャ語では「ストイケイア」つまり、「元素」であるということがアルケーと数学における原理主義との関連を自ずから物語っている。

最後に、証明というものが持つ「人を説得するための技術」という性格を考えれば、演繹主義をギリシャ時代において隆盛を極めたという、弁論術、対話術、詭弁術という流れの中で捉えるのが自然というものであろう。以上が「文化史の中に数学を据える」という意味である。

さて個々の考察にはいる前に、上述の三原理についてもう少し説明を加えておこう。

古代オリエントの数学においては数学を純理としてみる数学があったとは思えないから、ギリシャ数学が古代世界においてどんなに特異な位置を占めているか明らかであろう。ギリシャ以外の文明では１の定義や「点」の定義から数学書が始まったりはしないのである。

例えば、古代中国の数学書『九章算術』には平方根の計算が説明されているが、開き切れない場合については、次々と開平の計算を続けて行けばいくらでも数値が正確となり、余りはいうに足りなくなると述べられているだけである。

インドにおいても平方根の記号は扱われたが、これを小数で表すと無限に続くことになるのかどうかの考察はされなかったようである。

ギリシャ以外の古代文明ではまったく証明がなかったかというと、それも証拠はないわけで、演繹的ではないにしても、直観に訴えるような形の証明は有り得たと考えられる。例えば、有名な直角三角形に関するピュタゴラスの定理について言えば、それが余りに見事な定理であったからか、高度な定理であったからか、例外的とは言え、東洋の文献にも証明とみてよい説明図が残されている。

なお、証明をどんどん元に遡っていくと、これ以上は簡単な命題には還元できないということが認識されて、公理という概念にたどりつくのだから、原理主義と演繹主義は同じ思想ではないかと思われるかもしれない。しかし、さらによく考えてみるとそうではない。

ニュートンは若い頃余りに自明なことが書かれているので『原論』を読むのをやめてしまったという話を聞いたことがあるが、実際、数学をいつでも点の定義や自然数の定義から始める必要などほとんどないのである。現代の数学書でもそうなのだから、『原論』のような体裁は古代文

明においては極めて特異なものであった。それに、『原論』を見てみると、あらゆることが第一原理から証明されているかというと、そういう訳でもなく、単にスタイルにすぎず、証明に第一原理が原理が有効に使われているとは言えない。であるから、第一原理を置くというのは演繹的証明を与えるというのとは別の動機が働いたと考えられるのである。そういうわけで、一、二、三が深く関連しあっているのは当然としても、一つずつがギリシャ数学の特徴として個別に取り上げるのは意味がある。

直観的証明と演繹的証明の例

演繹的でない証明と演繹的な証明という概念の区別を、ここで例示しておこう。

図１をじっと見ていると、AB=AC=aであるような直角二等辺三角形ABCにおいて

$$a^2+a^2=b^2$$

であることが頭に浮かんでくる。

ここにb=BCである。つまりピュタゴラスの定理の特別な場合が「直観的」に、「当然のこと」として了解されるのである。

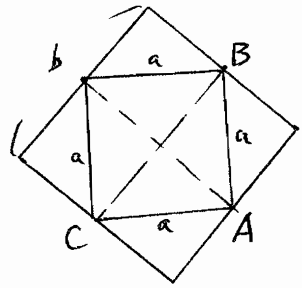


図１

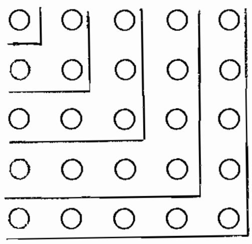

図２

また図２をじっと見ていると、

$1+3=2^2$,　　$1+3+5=3^2$

従って一般に

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

であることが、まったく「自明なこと」として、われわれの理性に訴えかけられてくる。

こういう型の証明が、直観的な証明の代表である。

ついでにいえば、図２のカギ型がグノーモン（曲尺）に似ているので、これを「グノーモンの定理」と呼ぶことにしよう。

一方、$\sqrt{2}$が有理数でないことのよく知られた証明が演繹的な証明の代表である。

仮に $\sqrt{2}$が有理数であると仮定してみよう。すると自然数m、nを用いて、$\sqrt{2}=m/n$ と表すことができる。ここでm、nは互いに素である、つまり共通因数は１だけであるとしてよい。これから、m=2nである。

両辺を平方して$m^2=2n^2$を得る。従って、$m^2$は偶数である。これはm自身が偶数であることを意味している。なぜなら、奇数の平方はまた奇数だからである。そこでm=2kと置くことがで

きる。これを先の式に代入して、$(2k)^2=2n^2$ を得る。両辺を２で割って、$n^2=2k^2$ となる。さきほどの議論と同じようにして、これからｎが偶数であることが分かる。

以上によってｍもｎも偶数であることが証明されたが、これはこれらが互いに素という仮定に反する。つまり　が有理数であるという仮定は間違っていたのである。故に、$\sqrt{2}$は有理数ではないことが証明された。

これは正に数学の証明の一典型である。つまり一分の隙もなく、理性をしてその正しさを認めるよう「強制」するけれども、なぜ正しいのか直観的には分からない。

## §２　ギリシャにおける純粋主義成立の一般的素地

### 弁論と競技

ギリシャにおいて純理としての数学がギリシャで誕生した理由を私は「弁論」と「競技」が占めていた重要さとの関連で考えてみたい。

第１回のオリンピア競技会（アゴーン・オリュンピアス）は紀元前776年に始まった。オリンピア競技会の開催中は全ギリシャで戦争も中止され、優勝者には大きな栄誉が与えられたという。競技科目には必ずしも戦闘技術に関係のない競争も含まれていた。こういう競技大会というのは古代世界では異色の存在ではないかと思うのだが、ギリシャ人がスポーツばかりではなく、あらゆる分野においてたいへん競技好きであったというのは、われわれの考察との関係で大いに注目に値するであろう。

競技を表すギリシャ語はアゴーンであるが、これはポリス生活の中心アゴラと同じ語源を持つ言葉である。この二つの単語の意味を比べてみよう：

アゴーン(agon)＝（アゴラのような）広場、競技（場）、集会、競技会、
　　討論、（集会における）弁論、訴訟、努力

アゴラ　(agora)＝（市民あるいは軍団の）集会、（いわゆる）アゴラ、
　　公開演説、商品、商い

古代ギリシャではアゴラが多岐の目的で使われたことがこれらの言葉の多義性から窺われる。今日の駅前広場のような感じもあるが、さらに裁判や競技会、演説会のようなものも行われた。その裁判が公開的であることや、弁論会が一種の競技のように行われたというのはギリシャ人のみに見られる特徴であろう。

アゴラにおける裁判の最も古い記録はホメロスの『イリアス』に見られる。

「双方は仲裁者の裁定による決着を望み、民衆はそれぞれの側に味方し、二派に分かれて声援を送り、触れ役たちが出て制止にかかる。長老達は輪形に設けられた神聖な場で、磨かれた石に座り、声高い触れ役から笏杖を受け取っては手に持つ。笏杖を手にして次々に立ち上がっては、代わる代わる己の裁定を述べる。場の中央には黄金２タラントンが置いてあり、これは最も公正な裁定を下した者に与えられる」（『イリアス』第１８巻）

古代ギリシャでなぜあらゆる政治的決定に庶民が参加するようになったのかは分からないが、とにかく王の持つ権限はかなり古い時代から相対的に弱かった。代わりに民会の力が強く民衆は民会を通じて政治に口を出すことができた。

上の場面で傑作なのは最も公正な裁定を下した者に黄金が与えられるという条だが、「最も公正な裁定である」ということは誰が決めるのだろうか。それは聴衆の拍手の多寡によって決めるのであるに間違いない。それは後に、プラトンが「劇場政治（テアトロクラチア）」（デーモクラチア、アリストクラチアから思いついた言葉）と呼んだように、一切のことが聴衆の拍手喝采によって決定される時代が到来することによっても分かることである。

さらに注目したいのは、あたかも競技の優勝者に賞金が与えられるように、喝采を博した弁者に金が与えられるという風習である。ここには、何でも競技にしてしまうギリシャ人の特性がはっきりと記されている。今では決して見られないような変わった競技の例としては、親しい人の死を悼んで行われる葬送競技会、追悼演説競技会などがある。こうした風習が論理学や数学の発達に関係のある弁論大会、対話競技（エリスティケー）へと発展していくのである。

この「弁舌によって勝利を得るという手段があるのだ」ということを知ったギリシャ人は「以後最大の努力を傾け」、「慣れているためにたいへん聞きたがり屋になっていた民衆を相手にし」、「もっともらしいと人に思わせることだけを目的とした」（ブルクハルト『文化史』第８章）精緻極まりない雄弁術が組織的に開拓されていったのである。

こういう公の場で、しかも競技的に議論する風習が一般論を盛んにし、「抽象的言語」を育む土壌となったのはいうまでもない。抽象的言語は必然的に詭弁を伴う。正しい論理と詭弁は双子の兄弟である。

ブルクハルトが「人の心をつかむためには、どんな手段を使っても恬として恥じるところがなかった」とまで評したギリシャ人が詭弁を好んだのは当然であろう。詭弁を職業として売る人たちすら横行したギリシャにおいては、どれが詭弁で、どれが正しい論証なのかの検討がかなり早くから行われたであろう。これが論理学の発祥であり、アリストテレスの大研究へと結実するのである。

マスコミのなかった当時においては、アルケーの思想も自然哲学者たちによって聴衆を前にし

て朗読する形で発表されたものであろう。そしてブルクハルトも一言ではあるが指摘しているように、彼らの間では競技的な感覚で諸説が競い合われたものと思われる。

古代中国でも諸子百家の時代にはいろんな説がそれこそ百花繚乱し、恵施の詭弁なども残されてはいる。しかし、ギリシャとの違いでいえば、民衆を聴衆とする弁論競技、あるいは法廷、あるいは民会というような組織が存在しなかった。おもに君候を相手に説くことを目的とした政治論が多かったのである。

ギリシャでは後に政治的出世のためには弁論の方が氏素性よりも重要視されるほどになったから、あらゆる人々が弁論術を必要としたのである。そこが中国とは違う第一点である。

さらに、古代中国と古代ギリシャの違う重要な点は、数学の地位である。数学はギリシャでは単なる技術ではなかった。むしろ、プラトンによれば、数学は最も重要な学問であった。論理学は論証的な数学をよき実験材料、モデルとして発展するものだから、数学が発達するということは論理学が発達するということと密接な関係にあるのである。

論理学では一般的思考法則が対象となる。数学においては直観が重要な働きを果たすのだが、直観はその性質上一般的な形に形式化され得ない。形式化されたなら、もう直観ではないのである。論理学が発達し、論理的正しさというものが厳密に形式化されるに従って、帰納的、つまり経験的証明は証明とみなされなくなり、しまいにはグノーモーンの定理の証明のような明らかに正しいと思われる証明すら、形式的な一般法則として表せないという理由で、数学から駆逐されるに至ったのである。

ギリシャ的な論理学や数学の論証性を説明するいろいろの説があるが、私はその極端な厳密愛好癖の背後に何でも茶々を入れて野次る「耳の肥えた」聴衆の声を感じるのである。

さて、その数学における論証というものはどのようにして登場したのであろうか。

## §３　演繹主義の由来

### 否定演算の登場

エレアのゼノン（紀元前５世紀前半）はパルメニデスの弟子で、現在ではゼノンの逆理という史上初にして最大のカフカ的世界を現出させた人として名が知られている。

ゼノンの逆理は「アキレスと亀」や「飛ぶ矢は飛べない」などいずれも結論が常識はずれなた

めに詭弁と思われるのに、容易に反駁することができないものばかりである。例えば、飛んでいる矢はその一瞬一瞬には止まっているはずで、その間に飛ぶ距離は０で、０は幾つ足しても０のはずだから、ある時間内にしても矢は飛べない、という主張と解釈できる。別の言い方をすれば、線分は点の集まりと考えれば矛盾するし、時間は瞬間の集まりとすると矛盾を生ずるというふうに言っていることになる。

ゼノンの逆理をどう解決するかについてはここでは触れない。われわれには、これらの逆理は「運動」と「多」の存在を否定するのを目的としているということだけが必要である。

ゼノンはパルメニデスが唱えた「不生不滅、不変不動、均質、球体の唯一なる実在」という説が、現実の感覚世界とは相入れないために受け入れられないのを見て、師に対する「愛の証」として、このような逆理を述べた著作を著し、師の説を擁護したのだという（『パルメニデス』）。

もしも存在するものが「多」なら、それは有限確定の数でなければならない。しかし、それらの間にもものが存在するはずである。なぜなら、間にものがないのなら、それらは同じもののはずだから。ということは、「多」は確定ではないことになる。

これはゼノンの唱えたパラドックスの一つである。

パルメニデスは万物は一つである、不動である、等と唱えたのだが、ゼノンは「一つではない」あるいは「不動ではない」と仮定して、矛盾を導き、従って結局は「一つである」、あるいは「不動である」ことを「背後から」（つまり間接的に）証明したのである。残念ながらゼノンの著作は残されていないので、プラトンやアリストテレスの著作を通して間接的にしか内容を知ることができないのであるが、今は細部の言い回しを問題にするのではないから、別段困ることはない。

2が無理数であることの証明には間接証明法、いわゆる背理法が用いられている。つまり、Ａであることを証明するのに、「非Ａではない」こと（Ａの否定命題が成り立たないこと）を証明するのである。無理数の存在はピュタゴラス派のヒッパソスによって紀元前五世紀の半ば頃発見されたとされているが、その論法の始まりはゼノンのパラドックスであったというのがサボーの説である。

数学の間接証明法がゼノンの論法の影響によって生まれたのではなく、ゼノンの論法が数学に影響されたのではないかと考える人もいるが、私はサボーの方が正しいと思う。なぜなら、ゼノンの論法は論法として未だ完成していないように思えるからである。

非Ａを仮定して矛盾が導かれることを論証したとしていながら、「したがってＡである」という結論が抜けているところが「論法の形式」として完成していない。その結果、ゼノンの逆理という名称でいくつかの論旨が残されてはいるが、だから「パルメニデスの説が正しいのだ」という主張としては伝わらなかったのであろう。

ソクラテスはパルメニデスに向かって「おおパルメニデスよ、ゼノンはこの書物でもって、あなたと一心同体であることの実をあげようと願っているのですね。・・・なぜなら、かれの書いたことはある意味で、あなたのと同じだからです。ただその言い方を替えて、何か違ったことを言っているかのように、私たちをだます試みをしているのです。というのは、あなたは御作の詩のなかで、万有が一つであることを主張され、・・・これに対してゼノンは、あらためてそれが多ではないことを主張しているわけ・・・です。つまり一方は一つであることを主張し、他方はそれを多ではないと主張し、お二人のそれぞれが、ほとんど同じことを言っていながら、何も同じことは言わなかったように思われる、そういう言い方をしているということを、つまりあなた方によって言われたことは、われわれ外部の者の頭越しに言われたのだという観があるのです」と述べている。

この引用によって、ゼノンの著作には「故に、万有は一である」という主張が最初からなかったことが分かるのである。これを私はいまだ論証の形式が整っていなかった証拠と見たい。

仮に数学的な背理法が手本としてあるなら、「非Ａである」でもって論述が終わるというのはおかしなことである。「従って、Ａである」という結語が、どういう形にせよ、形式として付くのでなくてはならない。

先にも書いたが、数学においてはルーチン的な表現が重視され、その一つ一つが「論法」という名前で呼ばれる。三段論法、対角線論法、数学的帰納法などがその例である。数学と言うのは、外見的には、能のような形式美の世界である（数学者のいちばん大事にするのはアイデアであるが、今は外からみた表現形式を問題にしているのである）。そういう目でみれば、数学から借りてきたものなら、もう少し形式が整っているだろうと考えられるのである。

このようにして間接証明はゼノンによって創始され、数学者がそれを利用することによって背理法の形式を完成したと考えるのが自然であることになるのである。そして、この証明法が導入されてからは、数学者達は大いに活用し、それまでは直観的な証明法に頼っていたり、証明できずにいた数々の命題が証明されていったものと思われる。

間接的証明法はこのようにして登場したのだが、論理という意味で特に重要なのは「否定」という（論理）演算をここに伴なっているということである。イオニアの自然学者たちの残された断片からは形式的な否定命題を扱ったものは見られない。

最も早い否定演算を伴う恒真命題はパルメニデスの詩に「存在するか、存在しないかである」という排中律の形で残されている。抽象的な思考の特徴として、否定命題が形式化されるのだから、これによっても、エレア派が抽象的思考の元祖であるという説は首肯できるのである。

例えば、「ＡならばＢ」という主張から、当然のこととして「ＢでないならばＡでない」という主張が追随するのだろうか。また、「ＡでないならばＢではない」は正しくないのか、「Ｂな

らばＡである」は正しくないのか。こういう問題は人類の元来持っている言語能力を越えた思考領域に属する事柄であった。それが証拠にわれわれはいまでもこの手の問題に関して間違いを犯しがちであり、よく考えてみなければ返事ができないのである。

そういうわけで数学者達は間接証明を取り入れる段階でその正しさを確信するのにしばらくを要したものと思われる。パルメニデス以後直観がいかにわれわれの感覚を裏切りがちなものかが認識され、われわれの思考過程の健全性の検証が哲学の重要な問題となり始めたのと軌を一にする動きである。

この意味は決して小さなものではない。というのは、この証明法の登場以後、数学の証明の中から直観的な証明が次第に、そして最後には完全に、数学の中から追放されるに至るからである。つまり、間接証明法の普及と直観的証明法の形式上の追放は時期を同じくしているのである。その理由は、間接証明法の正しさが吟味される過程で、証明とはなにか、証明の正しさとはどういうことかが議論され、結果として演繹的証明法の体系が完成した。ここには「感覚的な事実の軽視」というギリシャ固有の風潮が色濃く反映している。このようにしてグノーモーンの定理の証明のような直観に訴えるものや、ましてや経験に訴えるものは認められなくなっていったのである。

場合分けによる証明

ゼノンにより背理法がプリミティヴな形で使われて以来、人類は新しい論法を手にした。次にわれわれが文献の上で確認できるのはゴルギアス（紀元前５世紀）の弁論中に現れるもっとずっと形式的に整った形である。

ゴルギアスは「万物の尺度は人間である」と主張する当時の有名な弁論家で、何にでも即座に答えられるということを売りものにした人である。ということは、どんな命題でも論証してみせようということであろう。

実際、ゴルギアスは彼の弁論の実演の一例として『ヘレネ論』を残している。ヘレネはパリスに誘惑されてトロイアに行き、戦争の因を作った不貞の女として古来評判が悪かったのだが、彼女には決して責任はないのだということを論証してみせようというのである。

まず、ヘレネの行動は

1　運命・神などの決定による

2　暴力による拉致

3　言葉による説得の結果

4　愛欲の奴隷になった

のいずれかでなければならないとゴルギアスは分析する。詳細はここでは必要ではないから省く

が、要旨を紹介すると、神の意志を人間が拒むなどということはできないのだからヘレネに責任はない。暴力的に拉致されたのなら、彼女はむしろ同情の対象である。言葉による説得としても言葉は神のような働きをするものであるから、これも結局は暴力と同じ強制である。最後に、愛欲の結果であるとするなら、愛も神のごとき力をもっているものであるから、これに捕らわれたのは不幸としか言いようがない。以上、いずれの場合も、ヘレネに責任はないのであるから、ヘレネを非難するのは当たらない、というのである。

ここでは議論の当否はもちろん問題外である。われわれが注目するのは「場合分け」という手法が初めてここに登場していることである。そして同時に、否定演算を伴ったエレア論法がここに形式化されて使われていることである。ゴルギアスの論法には、表面には出ていないが、すべての場合を尽くすという考えが読み取れ、排中律が意識されていることを注意しておきたい。

場合分けというのは数学においては基本的な手法であるが、ゴルギアス以前に場合分けが登場していたという証拠は私には見つからなかったので、ゴルギアスの活躍した時代に数学でも場合分けが形式化されて使われるようになったといってよいと思う。同時に背理法も数学において形式化された形で頻繁に使われていたと考えてよいのも当然である。このことは　の通約不能性が紀元前五世紀の中ごろに証明されたと考えられているのとちょうど平仄が合っている。

ソクラテスが愛用した問答法と数学における証明との類似を指摘しておこう。精神的にいえば、演説は一方的に人の胸に訴えかけていくものであるが、問答法は対話によるから、相手が認めなければ、先に進めない。Ａであるか、非Ａであるかの、どちらかを相手に選ばせ（ここに排中律ないしは場合分けが使われる）、Ａであっても、非ＡであってもいずれにしてもＢであることが論証できれば、常にＢであることが言えたことになる。この対話法の形式は正に証明の形式である。「問答法は人の思考を一つの必然性に従わせようとする」（田中美知太郎『ソフィスト』）というのは、数学における演繹的証明の由緒をも物語っているよい説明である。アリストテレスが「弁論家に論理的証明を要求するがごときは、数学者に説得の技術を用いるのを許すのと同様道理に合わない」（『ニコマコス倫理学』Ｉ－２）と言っているのは、弁論術がそのままでは論証術にはなり得ないことを指摘しているもので、ディアレクティケーの方がより論証術に近いということの証拠である。さらにアリストテレスの三段論法（シュルロギスティケー）も本来二人の人間の間において行われる対話的思惟の方法であることが文献学者によって指摘されているという（下村寅太郎『数学の形而上学的系譜』による）。

## §4　原理主義の由来

### ギリシャの宇宙論

宇宙論は現代科学の花形の一つであるが、ギリシャの昔においても万有の構成原理に関する考察はたいへん盛んであった。哲学は、この変幻極まりない現実世界の底には、何らかの永遠不変な統一体、あるいは統一形式が存在するはずであるという期待の元に、自然哲学という形で始まったのである。

最初に登場したのはギリシャ本土の東、小アジアのイオニア地方に生まれたタレス、アナクシマンドロス、アナクシメネス等のイオニア学派である。

タレスは水を、アナクシマンドロスは「無限定（アペイロン）（なるもの）」を、そしてアナクシメネスは熱・冷・寒・湿をアルケー（第一原因、始原）あるいはストイケイア（元素）と考えた。
こうした原理を探求する説は神話から神性を取り去り、物語性を除去したものとされるが、神話とは違って、当然のことながら徐々にある程度の論理性、あるいは論理性のようなものが要求されるようになっていく。すなわち宇宙の始まりや大きさなどが議論の対象となって、無限、永遠、存在、時間といった特有の用語が登場し、抽象的な論理、ないしは疑似的論理によって説が展開されるようになる。

例えばアナクシマンドロスの説に注目してみよう。彼はいろんな元素のどれか一つではなく、それらを越えたあるものを存在の原質として取りだし、それをアペイロンと呼んだのである。要するに混沌とした区別のつかないものから分離して次々対立的な性質を持ったものが生じ、しまいに動物が進化してきたという、一種の観念的進化論である。

アナクシマンドロスの宇宙論は神話から神と性の用語を取り去ると得られる程度のものであると言われてはいるが、アリストテレスによって「無限定なものにはそれの始まりはあらず、かえってこのもの自らが他のものどもの始まり（アルケー）であり、これがすべてを包括し、すべてを操縦すると思われたのである。・・・そしてこの無限定なるものこそ神的なものである。というのは・・・それが不死・不壊であると思われたからである。・・・けだし、すべてのものは、それ自らが始まりであるか、あるいは始まりから生じたものであるが、無限なものには始まりはないからである。というのは、もしあるとすれば無限定なものに限りがあるというようなことになるからである。」（アリストテレス『自然学』Ⅲ－４）と要約されている。アリストテレスはかなり後代の人であるので、要領よくアナクシマンドロスの説を要約しているから、もとの表現がこのような整然とした抽象的なものであったとは思えないが、ついにはこのような論理性を得る原型を内蔵していたのである。

数学にとって大事なのはやや遅れてイタリア南部で活躍したピュタゴラスの方である。ピュタゴラスは、プラトンを始めとするギリシャ哲学および数学に与えた影響の割には、その人物も業績もほとんど知られていない。というのもピュタゴラスは当時の文明の中心地であったオリエント帰りの宗教家で、教団で唱えられた説がかれ自身のものなのかオリエントから持ち帰っただけのものか分からない上、教団内で発見されたり、唱えられたりしたあらゆることが教祖ピュタゴラスに帰されていたし、その上教団の教義は秘密にされていたからである。例えば、直角三角形に関する有名なピュタゴラスの定理も、ピュタゴラスが発見したのか、その証明を発見したのか、あるいは弟子達の業績なのか、はっきりしないまま二千五百年が過ぎたのである（今日では、定理が発見されたのはピュタゴラスより少なくとも千年以上前のことであることが分かっている）。

ピュタゴラスの唱えた宗教上の説は「霊魂の不滅・転生」ということに集約されるらしい。オルフェウス教との関連が容易に想像されるにしても、そのどちらもひょっとすると元はインドの輪廻説に起源を持つ可能性もある。いずれにしても、本当のところは極めようがない。しかし、こういうことは数学にはほとんど関係がないから、すっとばしてしまうことにしよう。

数学に関係があるのは、というよりは数学にとって致命的に重要なのはピュタゴラスが「万物は数である」という説を唱えたことである。これと輪廻説との関連は、余りよく分からないから、これも無視しよう。

ピュタゴラスが数をアルケーに選んだのは、和音の音程が１、２、３、４の比によって与えられることを発見したのがきっかけであるとされている。彼は音という漠然としたものに数比という「限定」を加えることによって、調和が生まれることを知ったのである。そして、この考察はピュタゴラスをしてイオニア学派のような素材（質料）に根源を求めるのではなく、エイドス（形相）に求めるという一大転換を選ばせた。形相とは構造とか、形式というような意味である。質料にではなく、その内在的秩序に目を向けたというのは、その後のギリシャ哲学の展開を考えるとき、極めて大きな転換点であったといえよう。

もっともピュタゴラスが「万物は数である」と言うとき、われわれが想像するような宇宙の数理的原理を意味していたとは言えない。初期のピュタゴラス派はイオニア派に対抗するような形のアルケーを考えていたのだろうから、むしろ物質的な構成要素として数が取り上げられたのである。例えばディオゲネス・ラエルティオス『哲学者列伝』には、ピュタゴラス派の信条として、数から感覚的存在、そして、それ自身生命を持った球状の世界が作られる原理が、何やら意味不明ながらも、次のように記述されている：「すべてのもののアルケーはモナド（１、単位）である。モナドから生じた境界の定まらないデュアド（２なるもの）が物質として原因であるモナドに作用する。モナドと境界の定まらないデュアドから数が生じる。数から点が、点から線が、これから平面図形が、平面から空間図形が、これから感覚的な物体が生じるが、感覚的物体のスト

イケイアは火、水、土、空気の四つである。これらのストイケイアは互いに入れ替わり合う。そしてこれらから知性を持ち球状の生命体であるコスモス（宇宙）が生じる。コスモスはその中心として地球を持ち、これはやはり球状で、表面は（生物によって）生息されている」。

当時抽象的な言葉が具体的な言葉を用いて形成されていく過渡的時期であったので、数えられる対象と数とが（例えば一個なるものと１とが）必ずしも区別されていなかった。従って、アリストテレスが「数では重さや運動が説明できない」と批判したとしても、抽象的言語の成立した世界に住む人間が名称と対象そのものとの区別がつかない世界の人間の説を自分達の言葉で批評していることになり、余り意味がないのである。簡単に言えば、ピュタゴラスは何を批判されているのか理解できなかったかもしれない。なお、第５節で述べるが、プラトンはイデア的な数と感覚的なものそのものが表す数との区別をしているのは、古い数に対する感覚を残しているとも見ることができる。

アリストテレスはピュタゴラス派が数をアルケーに選んだのは「原理が感覚的存在ではない」という理由で「他の自然学者たちよりもはるかに異国的である」（『形而上学』Ｉ－８）としている。「異国的」というのが文字どおり、オリエント起源であるという意味なのか、「風変わり」とも訳せる言葉なので、単に変わった説であるという意味なのか、それはなんとも言えないが、とにかく、初期ピュタゴラス派の意図とは無関係に、後代のギリシャ人から見れば、形相を根源的要素に選んだことに特異性があることはこれではっきりする。

アリストテレスはピュタゴラス派を数学者集団として扱っているが、ピュタゴラス派は教団としてその後も方々で隆盛と衰退を繰り返すわけだから、教団の宗教部門と数学部門とはかなり早くから分離し始めていたものと想像される。

ピュタゴラス派によると、数には奇数３、５、７、・・・と偶数２、４、６、・・・があり、男は奇数、女は偶数であるとされた。１は偶数でも、奇数でもあって、すべての数の源泉とみなされたという。５は最初の奇数３と偶数２の和ということで結婚の象徴だという。あるいは６が２と３を「掛け合わせた」数ということで結婚を表すともいう。７は女神アテナを表す数であった。なぜなら、神聖なる数10(=1+2+3+4;テトラクチュス）以下で掛け合わせて７になる数はなく、７と掛け合わせて得られる数もない。従って、７は両性の結婚で生まれたのでもなく、また子供も持たないから、アテナであるというのである。また１、２、３、５、７という合成されない数の個数と４、６、８、９、１０という合成数との個数が等しい。・・・の理由で１０は神聖な数とされ、完全数と呼ばれた。

偶数・奇数の議論は彼らの教義の中でもとりわけ重要な意味を持っていたらしく、有限と無限、静と動、明と暗、善と悪など、あらゆる対立概念が偶数と奇数によって説明された。

奇数＝限定（ペラス）、秩序、善、明、一、男、・・・

偶数＝無限定（アペイロン）、混沌、悪、暗、多、女、・・・

偶数と奇数の混ぜ具合によってあらゆるものの性質が決まるということなのであろう、あるいはもっと原始的に、奇数と偶数という二種類の（性質のような物質のような）元素があり、あらゆるものがこの混ぜ具合によって「生じる」というのかも知れない。しかし、プラトン以降の人間にとっては、ピュタゴラスは存在の内在的な数理性に目を向けた最初の人間ということになるのである。

ついでながら、コスモスという言葉は秩序と調和と美が合わさったギリシャ独特の概念を表すという。宇宙はギリシャ人にとっては有限、つまり限定されており、秩序だった世界を意味した。こういう宇宙観を生み出したのはピュタゴラス派であろう。実際、コスモスをこの世界を表す言葉としたのはピュタゴラス派に帰される。アナクシマンドロスはアペイロンに神性を与えたと思われるが、ピュタゴラスによってペラスこそが神性を与えられたのであり、これがアリストテレスによってギリシャ人の宇宙観として決定付けられるのである。

さて、数学の立場から言えば、当時他にもいろんな説を立てる人がいた中で、ピュタゴラスの先見性は数という単純にして明快、しかも誰にでも把握のしやすい、ある意味では具体的なものを中心に据えたことにある。空想的に物質を根源の要素にしたのとは違って、その単純性、抽象性、独立性という数学の持つ本性のために研究が進み易いのである。ちょっとした計算で実験ができ、推測の正しさを確かめられるのと、単に頭の中の思いつきで、検証のしようもないのとでは進歩の度合いがまったく違う。

たとえば６は自分自身より小さい約数の和を作ると1+2+3=6となる。こういう性質を持つ数を『原論』では完全数と呼んでいる（なお、３も始めと中と終わりを備えた最小数ということで完全数と呼ばれた例がある）。そうすると、他にも完全数はないだろうかというように考えるのは当然で、例えば24や496 は簡単に見つけられる完全数である。そうすると完全数は無数にあるだろうかとか、奇数の完全数はあるのだろうかとか、次々問題が涌いてくるのである。

ピュタゴラス派が初期には単なる新興宗教の教団であったが、教義の中心に数が据えられていたために、年を経るにしたがって、抽象的思考を愛好する風潮と相まって、秘儀を重視する宗教的な母体から抽象的な学問研究の部門が独立して発達を遂げていったとしても、歴史上の種々の宗教の成長過程から見て、ごく普通の現象であろう。

ピュタゴラス派の偶数・奇数の理論は、整数論のことをプラトンがいつでも偶数・奇数論と呼んでいるのを見ても分かるように、その宗教性を抜きにして、純理としての数学の理論として他の学派に受け入れられた。その証拠に、数論を題材とするユークリッド『原論』の第７巻の一部は『原論』の中で最古に形成された小理論体系とされ、ピュタゴラス学派の業績に帰されているのである。

偶数・奇数論の頂点を成すものが　2の無理数性（ギリシャ数学の用語で言えば、正方形の辺と斜辺の通約不能性）の証明である。確かにその証明には偶数と偶数の積が偶数になることや奇数と奇数の積は奇数になることなど、偶数・奇数の理論が本質的に使われている。しかし、さきに述べたような通約不能性の証明とピュタゴラス派の偶数奇数論とではかなりレベルが違うので、通約不能性の完全な証明はかなり後に（例えばプラトンの時代に）完全なものにされたと考えられる。

『原論』における原理

ここまでで万物の根源を探る強い願望が数学においても作用し、数学の原理を探求する契機となったことを説明した。

次にユークリッドの『原論』において原理主義がどういう形で表現されているかを実際にみてみることにしよう。

ユークリッドの『原論』は原語では「ストイケイア」という。英訳では「エレメンツ」、すなわち「元素」というような意味である。そうするとユークリッドの『原論』はいかにもギリシャ数学の集大成にふさわしい名前を与えられていることが分かるであろう。すべての数学的命題はいくつかの始原的命題に分解でき、それらから証明を与えられるのだという主張を表しているからである。

さて、『原論』において定義・公準・公理の区分がどういう原理に基づいているか知るために、特にアリストテレスの『分析論後書』第１０章を取り上げてみよう。そこでは科学がどういう原理に基づいていなければならないかが詳細に論じられているからである。この章を読めば、『原論』の原理も一目瞭然であると思われるが少々長いので、引用は一部にしておく。

（Ⅰ）それぞれの類における原理とは、それのあることが証明され得ないもののことをいう。従ってそれが何を標示しているかという点については、第一のもの（原理）であっても、第一のものから派生するものであっても、いずれもひとはこれを認めるのであるがそれがあるという点については、原理についてはこれを認め、他のものについてはこれを証明しなければならない。例えば1が何を標示しているかや、直や三角形が何を標示しているかについてはいずれも認めるのであるが、１や大きさがあるということについてはひとはこれを容認し、その他のものがあるということについてはこれを証明しなければならない。

（Ⅱ）すべての論証科学は三つの原理を持つ⑴科学が研究する主題の類であり、それのあることを科学が仮定するもの⑵いわゆる共有の公理で、証明の基礎的前提となるものである⑶属性で、それらのそれぞれが何を表しているかを科学は容認する。

（Ⅱ）の(1)は『原論』における「公準（要請）」（アイテーマタ）である。（Ⅰ）を参照にすれば１や数などもその存在はその存在を認める異になるのだから公準に入れなくてはならないが、「それがあることが明白なものについては、類の存在を基礎に仮定しておかなくてもよい」という文章があるので、数の存在は明らかであるとみなされていることになる。

(2)は『原論』における「共通概念」（コイナイ・エンノイアイ）である。「等しいものから等しいものを取り去れば、残りは等しい」という例が同所に挙げられているから、間違いはない。本来、同一律、排中律、矛盾律、対偶法、三段論法などの論証の原理も公理としてここに含めなければならないはずである。ユークリッドは『原論』は数学の本であるので、これらについてはわざわざ表記するのをやめたのであろう。このことはこれらの論法が（数学的帰納法や対角論法、選択公理などと違って）必ずしも数学に起源を持つものではないことを暗示していると思われる。

(3)は（Ⅰ）を参考にすれば、『原論』の「定義」（ホロイ）であることが分かる。

定義とは何か

ユークリッドの『原論』において各巻の冒頭にはたいてい定義群置かれているが、『原論』でいう定義は現代数学でいう定義とは異質なものである。現代数学でいう定義とは、単に「命題を単語によって置き換えること」、簡単に言えば「覚えのための記号」にすぎない。何のためにそんな単なる置き換えにすぎないことをするのかと言えば、一つには自分が展開している議論の中でも中心となる概念を目印をつけて重要性を強調するためであり、また言葉の反復によって議論が煩雑になるのを防ぎ、表現を簡潔にするためである。『原論』の定義の中にもそういう定義は存在する。例えば、第１巻の定義　（平行線の定義）「平行線とは、同一の平面上にあって、両方向に限りなく延長しても、いずれの方向においても互いに交わらない直線である」は今でも定義として通用する。

元々「定義」（ホロス）という言葉は「限界」、「境界」という意味を持つのだそうで、「語義の囲い込み」というのが原義である。つまり、何かを上手に、曖昧さなく（数学用語で言えば、必要十分に）説明するのが、定義というものである。その「何か」が既に知られている存在である場合もあれば、これからわれわれの言葉でいう「定義」である場合もある（その辺の区別が未だ明瞭でないように見受けられる）。

プラトンは「人間とは二本足の、羽のない動物である」という定義を与えたという。するとキュニコス学派のディオゲネスが鶏の羽をむしって「これがプラトンのいう人間だ」と言った。そこでさらに「平たい爪を持つ」という説明が加えられたということである。

こういう話を見ても、そしてプラトンの『定義集』の「定義」＝「種差と類からなる説明」と

を見ても分かるとおり、類や種による一種の生物学的分類が定義の原義である。だからその定義が指すものが対象そのもの以外にはありえないときに定義は完全であるとされるだから、定義からその定義された対象の持つ属性が演繹できるということは要求されていないのである。例えば、プラトンの人間の定義を用いて人間の持っているあらゆる属性がそこから説明できるというものではない。

なお「普遍的な定義」という概念を哲学の世界に持ち込んだのは、アリストテレスによれば、ソクラテスであるという。しかもソクラテスが定義を求めたのは「推論することを求めていたからであり、そしてその推論の出発点は正にこの何であるか（すなわち定義）にあるからである」（『形而上学』第１３巻第４章）。ソクラテスは群がる徳の中から、徳の定義を選び出し、必然性を持って倫理を論じようとしたのであり、それがプラトンに受け継がれたのである。アリストテレスはピュタゴラスなどもわずかながら正義や結婚などの定義を数と結び付けることによって説明方式を求めたが、「推論の元となる定義」という意味ではソクラテスに始まることを明記している。

このように、倫理や哲学の問題から定義が始まったのだが、ある程度の成功を納めたのは数学においてだけであることは明らかで、プラトンもその意図はとにかく推論の元になる定義には到達できなかった。そして結局はアリストテレスの「事柄の本性が許す範囲において、それぞれの類に応じた正確さを追究すればよい」という現実主義に到達するのである。

よく知られているように、それ以上は簡単な言葉で定義しようのない始原的概念を無定義用語として捉えようという思想はパスカルに始まる。彼はそのような言葉の例として時間、存在する、人間などの例を挙げ、「時間という表現に出会うとすべての人は同じ対象に思いを向けるのである。それだけで、この用語は定義する必要がない。しかし、後で、時間とは何かということを吟味する段になると、一旦そこに思いを向けた人が異なる意見を持つようになるのである。なぜなら、定義が作られるのは、命名される事柄を指示するためであって、その本性を示すためではないからである」と実に明瞭に述べている。ついでに言うなら「プラトンは、人間は羽のない二本足の動物であると言ったことによって、どれだけの利益をわれわれにもたらしたつもりであろうか」とも述べているが、プラトンは人間の本性をこれによって分かるようにしようとしたのではなく、ソクラテスの定義という精神の起こりはともかくとして、言葉の意味を一義的にする意図しかなかったというのが私のここでいわんとしたところである。アリストテレスも、人間という言葉は一つことを意味するがけではなくて多くのことを意味するにしても、そのうちの一つには「二本足の動物」という説明方式があり、その他にはその他のがと多数の説明方式が考えられる、と述べている（『形而上学』Ⅳ－４）。

以上のことを頭にいれて、『原論』の定義群を見直してみると、無意識にかもしれないが、ギ

リシャの数理哲学者たちはパスカルのいう無定義用語という概念を考えているのと結果としては同じことになっているということである。点、直線、単位、数の定義は既に直観的には理解されている、誰にでも何のことか分かる存在を何とか言葉で「囲い込もう」としているのだということが分かるであろう。同時に、これでもって確実に「囲い込めた」とユークリッドが考えていたとは思えないということも推測されるであろう。単に、何を指示しているかが分かれば良いのである。

プラトン以降のギリシャの哲学者の間では、点、直線、数といったものが感覚を越えた観念的な存在として認められていたと思われる。ユークリッドの場合もそれらは当然存在するものとみなしたので、これらは公準の中でわざわざそのそんざいをほしょうすることはしていないのである。

以上によって、次のことが示されたものと思う。

1　定義は誰もが直観的にはよく知っている対象をできるだけ該当するものがそれ自身だけになるように簡潔に描写する一つの形式である。

2　定義は現在の証明が完全に記号化して記述できる数学から想像されるような、論証の一部として使われる命題では必ずしもない。だから数学のアルケーから論理的にすべての命題が証明できるという構造には原理的になり得ない。

実際、点や直線の定義、数の定義などは証明の中では使われていない、あるいは使いようがないのはこういう訳なのである。そういう訳で、『原論』も、最初の数ページをのぞけば、オイラーやコーシーが書いた数学の教科書と同じく、ある一定の段階から数学が展開されている普通の数学の本にならざるを得ないのである。

公準について

「公準」の原語はアイテーマタ（アイテーマの複数形）である。これは本来「要請」と訳される言葉であるとされている。実際、古川晴風『ギリシャ語辞典』を引いてみると、要求、願い、（論理学で）前提と出ている。

アリストテレスは『分析論後書』Ｉ－１０で、「学ぶものの内にはいかなる考えもないか、もしくは、相反する考えがあるにも関わらず、教えるものがこれを論証の前提として容認するのであれば、それは要請である」と述べている。以前には長い伝統のために公準は自明な命題であるとみなされてきた、そのためにアリストテレスの「要請」とユークリッドの「要請」では使用法が異なるとされてきたように思われる。しかし、ギリシャの数学が中世、近代の数学とは大いに性格を異にしているという事実を弁えるなら、ユークリッドの要請もアリストテレスの要請も同じであるとしてなんら差し支えはない。すなわち、公準は決して自明な命題というわけではなか

ったのである。

先に定義のところで引用した『分析論後書』Ｉ－１０には「熱や冷の存在は数の存在よりも自明である」とされているのは驚くに値する。その流れで言えば『原論』では数や点、直線も存在を要請しなければならなかったはずであるが、数学者の立場からすれば、そこまでは必要がないと考えられたのであろう。

なお、アリストテレスには「仮設」あるいは「基礎定立」と訳される「ヒュポセシス」という言葉があって、「矛盾対立する二つの陳述の内のどちらか一方を取り、容認するものがヒュポセシスである」（『分析論後書』Ｉ－２）としているが、われわれの感覚ではこれが「要請」とどう違うのか分からない。結局、ほとんど同義であると考えられる。するとプラトンの『定義集』でみれば分かるようにこれは「証明できない原理」ということになるが、やっぱり「明らかである」という意味は必ずしも含んでいないことになる。

ギリシャ哲学ではエレア派以来安易な直観や常識が当てにならないものであるということが共通認識になっていた。言葉の二義性を使っての詭弁が流行し、弁論術、対話術が国民の大きな関心の的であり、出世のための手段になっていたことを考えると、幾何学の基礎を自明な真理であるとすることは公衆の意地悪な論駁に耐えるようなものではありえなかったのである。

あるいは少し言い方を変えれば、物質と精神の乖離が始まったギリシャにおいてはそれが極端にして強烈な形で進行した。プラトンのイデア説をもその流れの中で捉えることができる。つまり物質に対する反動的な反応が直観に対する嫌悪とも言うべき形で数学にも現れたというふうに考えることもできよう。

アリストテレスが『形而上学』第４巻でも述べているように、基礎定立の命題が自明に真なる命題ではないという認識は、ギリシャ時代には、少なくともゼノンショック以降の時代には、常識であったのである。

それがユークリッド以降中世に至ったときは、ギリシャ的な数理哲学の関与する余地がなくなって、幾何学の公準は自明の真理を表していると考えられるようになっていったのであろう。

しかし、ギリシャにおいてもこれらの公準を否定して、別の公準を採用するほどに、つまり、ということは、非ユークリッド幾何学を考えるほどに積極的な考察がされていたとするなら、それもうがち過ぎというものであろう。そうした証拠は何も残されていないのである。

そうは言いながらも次のように考える程度のことは許されるのではないだろうか。すなわち、ギリシャ時代にも既に数学者達は原理の体系は真偽を問う対象ではなく、従って数学は自然の諸相を表現するという意味での絶対的真理でもない、一つの独立した論理的体系なのだと考えていたのであると。

そのように空想する根拠は積極的なものではなく、単に消極的なものではあるが次のようなも

のである。

アリストテレスは先の引用に「存在を存在として研究し、またこの存在としての存在の諸属性を研究するのは一つの学（哲学）のすることである」と続けている。他の箇所でも、諸原理の真なるか偽なるか、存在するか否か、そしてその存在の本質を数学者達は語ろうとはしないし、論じないし、また語る資格もないと繰り返し述べている。もちろん「存在を存在とする」という意味は数学的な意味での存在ではないことはアリストテレスも断っているが、それにしても関連はあるであろう。

またプラトンも（算術などの）学術にとってはさまざまな仮設（ヒュポセシス）がそのままに始原に他ならないのであって、考察に携わる人々は始原にまでさかのぼって考究するのではなく、仮設から出発して考察するがゆえに、対象について本当の知をもつに至らないのであると述べて、もはや仮設ではないものにまで至り、万有の始原に到達するのは問答法の力によるとしている（『国家』Ⅵ－21）。

こういう言葉は哲学者の側からみた見解なのであって、これを数学者の側からみたならばどういうことになろうか。残念ながらいつの時代にも数学者というのは定理の証明にばかり夢中で何かについての見解を表明するということが少ないのも理由の一つであろうか、何も文献が残されていないのである。しかしながら、自らの学問の基礎は絶対的な真ではないと言われて「ヘイヘイそうです。その通りです」とただ聞いているものだろうか。何かの反応、反論はあったはずなのであるが、数学者は哲学者ほどには当時の社会において重要でなかったり、声が小さかったりで、現在まで残されていないだけに違いない。

とすれば、どういう形で主張されたかは文献が残されていないのだからはっきりとは分からないにしても、「これらの仮設をさらに遡ることは不可能なのである、あるいは無駄なのである」という主張が「積極的に」唱えられたと考えるのが妥当ではなかろうか。

このようにしてギリシャの数学者達は原理はまったく仮定であり、これらは自由に設定できるものだというほど積極的現代的な公理主義ではかったにしても、何かそれに近い自らの抽象性と独立性に対する自負があったという見解にたどりつくのである。

このように考えるとき、「幾何学の正しい原理に反する原理から出発する推論は（無知に応ずる推論であるが）なお幾何学に即した推論であるものであろうか」、「平行線は交わると思いこんでいることは、ある意味では幾何学的であるが、他の意味では非幾何学的なのであろうか」（『分析論後書』）というような記述は、当時の数学と哲学の分化状態を考えるとき、私には意味深長に思えるのである。つまり、あらゆる学問が理解できた最後の人はデモクリトスであったとされていることを考えれば、アリストテレスには何か理解できないような議論が専門の数学者間にあって、その噂だけが聞こえていたというのも可能性がなくはないと思う。

「幾何学者にとっても幾何学の諸原理を否認する人々に対しては何の議論もしようがない」（『自然学』Ｉ－３）という記述は感覚に背くようなことでも平気で否定を試みるギリシャ時代特有の隠れた声とともに、それを意識してある程度考慮せざるを得ない数学者集団の研究を感じとることができる。

ギリシャ時代初期には数論は定義と（推論のための）公理さえあれば成立する純粋な学問であり、幾何学はこれに比べて経験学的な要素が強い学問で、従って確かめることのできない仮定も要請されねばならないと考えられた。すなわち、公準は要請の度合いの高い幾何学的な（今日の言葉で言う、自明な命題という意味での）公理であった。これがプラトンをして幾何学を数学に劣る学問とされた理由である。

しかし、ギリシャ時代の懐疑主義的傾向が浸透するにつれ、アリストテレスの時代には公準が論証のための基礎的な仮定であることは十分に認識されてきて、経験的な学問であるとはみなされなくなって行った。そして、本来は数や直線などの基本的対象もその存在を要請しなければならないのだが、それはユークリッドの時代には数学的には掲げる必要のないものとみなされたのであろう。そしてユークリッドの時代には体系の豊かさから見ても、厳密性からみても数論を越えた学問として扱われるようになったのである。同時にその基礎的仮定が成り立たないとどうなるかというような議論もあった可能性はあるが、十分な成長を遂げるまでには至らなかった。

公理の意味

「公理」の原語は「アキシオーマ」（複数形はアキシオーマタ）であるが、ユークリッドの『原論』では「コイナイ・エンノイアイ」と呼ばれている。コイナイ・エンノイアイというのは「共通概念」と訳されるべき言葉であり、これはアリストテレスによれば人間精神に取って共通の原理である、つまり人間であるなら誰もが認めざるを得ない原初的命題であるという意味で、数学に限らずすべての思考の元を成す原理であるとされた命題のことである。アリストテレスはこういう公理についてその真偽を研究するのは、個別の科学に携わる人たちの仕事ではなく、知恵の愛求者（つまり哲学者）の仕事であるということを力説している。

同じものに等しいものはまた互いに等しい、とか全体は部分より大きいというのは確かに人間精神の共通認識であろうが、アリストテレスは公理の中でも第一の原理は矛盾律、すなわちあるものがまた同時にあるものでないということはできないという命題であると述べている。しかし、これは『原論』には書かれていない。一般に『原論』ではこうした論証法の原理についてはいっさい取り上げていないが、これは数学者の仕事ではなく、アリストテレスのいうように、哲学者の仕事であるとされていたのかもしれない。とすれば、種々の論証の原理を考えついたのは数学者ではないという傍証になるだろう。

アリストテレスはこのように矛盾律や排中律を公理としているが、これすら疑問を投ずる人たちがいたらしく、アリストテレスはこういう人に対して単に無知だからそう思うのだと切って捨てている。しかし、そういう主張をする派の人たちの議論が残されていないだけのことで、それほど無知であったのかどうかは知りようがない。ただ、少なくとも排中律のような原理すら、皆が当然とみなすような時代ではなかったということが（アリストテレスの罵倒のおかげで）分かるのである。

ということは、共通の原理である公理すら、必ずしも絶対的な真であるとみなされていた訳ではないのだから、数学者達もそのことは十分承知していたはずだということである。ついでに言うなら、公理の原語「アキシオーマ」は元々「要請」という意味を持っている言葉である。

しかし、そういう原理に対する問題を論じ始めたなら数学にならなかったであろう（実際、アリストテレスは各科学はそのような問題まで論じる必要はないと述べている）から、アキシオーマタとして冒頭に掲げて、「数学ではこれを人間精神共通の原理」とすると宣言されているのである。だから、といってはなんだが、前にも述べたように、その形式はかなりずさんなのであろうか。なぜなら、たとえば２倍することだけを取り上げてみたりするのは余りに半端であるからである。

## §５　抽象主義の由来

アリストテレスが驚くことから哲学が始まると言ったというのは有名な話だが、正確には「けだし、驚異することによって人間は、・・・、知恵を愛求し哲学し始めたのである。・・・例えば、正方形の対角線が辺では測り得ないことについて・・・何故にそうあるかに驚異の念を抱くのである」（『形而上学』Ⅰ－２）とあるので、2が有理数でないことが、驚異の一例として挙げられているのが知られる。

これはとても不思議なことである。というのは、東洋の古代の数学者たちに　2は自然数の比で表せないと告げてみたなら、彼らはどのように「驚異する」だろうか。私は案外「そんなことどうでも良いではないか」と軽く一蹴されてしまうのではないかと思うからである。

ギリシャで、正方形の対角線と辺との通約不能性が驚異と見られた背景には「一なるもの」に関する考察の歴史がある。それは言い替えれば、抽象主義、すなわち数学的対象の独立がいかにして模索されて行ったかという歴史でもある。

イオニア学派の自然哲学においては彼らの学説が未だ神話の臭いを残し、質料と属性が未分化であるとするなら、数学だけが純理で、数学的対象を独立させて扱っていたと考えるのは無理がある。従って数学における抽象主義の由来を考えるときはピュタゴラスから始めるのが適切であろう。

初期のピュタゴラス派は、アリストテレスの説くところによれば、「単位からなる数ではなく、かえって彼ら（ピュタゴラス派の人たち）は単位そのものをある大きさのあるものと解している」（『形而上学』ＸⅢ－６）といい、「この数学的の数から感覚的な諸実体が合成されると言っている」（同）という。また、「数が実在であり、数の実体が他にあるのではなくて、正に数そのものが実体である」（同)と考えているともいう。

これによって、ピュタゴラス派の少なくとも初期には数学的対象は質料と独立した存在とは考えられていなかったことが分かる。しかしながら、経験的感覚的なものを対象として、つまり感覚的存在に個数などの単位をつけて数学が研究されていたかと言えば、そうではないように思われる。抽象的に数１、２、・・・が考えられているが、これがものそのものの本質を成しているとされていたのではなかろうか。これはオリエントの数学とはだいぶん様相が違っていると思われる。

プラトンの『パイドン』では、ソクラテスが「１に１を加えたとき、２となったのは、加えられたほうの１なのか、それとも加わったほうの１なのか。・・・、１を分断したとすると、今度はその分断ということが、２が生じた原因となったとは、私は納得できないのだ。なぜなら、そ

れでは二が生ずることの原因が、前とは反対になるからである」などと話すことになっている。もしも本当にソクラテスがこのようなことを語ったのかどうかは分からないが、大体このころにこのようなことが議論され始めたということであろう。

抽象的な「一」について考察をした哲学者で一番古い人は誰かというあたりを考えてみるとエレア派のパルメニデスにいきつく。パルメニデスはギリシャ哲学史上最初に抽象的な思想を表明した人として近年大いに注目されている。残されている著作は断片的な哲学詩しかないので、後はプラトンの『パルメニデス』と、それにアリストテレスによる言及から推測するしかその哲学を知る方法はない。しかし、プラトンもアリストテレスもパルメニデスに対しては好意的であるので、特にプラトンの著作中ではソクラテスは何度もパルメニデスを敬慕と畏敬の念をもって追憶しているくらいだから、故意に基づく歪曲はないものとして良かろう。

ここで断片の有名な一節を引用してみよう。

そもそもどうして有るもの（存在）が将来いつか滅びゆくことがあり得ようか。またどうして生じきたるといったことがありえようか。

なぜなら、もし生じたのであるなら、それは（それ以前には）有らぬし、またいつか有ろうというのなら、（現には）有らぬゆえ。

かくて生成は消し去られ、消滅は探し得ぬものになった。

こういう思索によって、パルメニデスは唯一の実在は不生不滅であり、不変不動であり、均質であり、連続的にして球状であることを説くのである。

パルメニデスの特徴は物質的存在ではなく、抽象的な存在を思考の対象にしているところにある。もっともパルメニデスに物質とその属性との違いに関する認識があったかどうかは疑問で、彼に「その唯一無二の球形の実在」とは感覚的存在なのか、観念的存在なのかを尋ねてみてもはっきりしないであろうと思われる。彼らは「冷たいものが熱くなった」という叙述と「冷が熱になった」という叙述を区別できなかったとされているからである（ガスリー）。

要するにパルメニデスあたりから、ようやっと抽象的な言葉というものが誕生し始めたのである。パルメニデスは「唯一なる実在」という哲学によって、抽象的思考を深めた。自然哲学者の物質の構成要素という思想から一歩踏み出して、ギリシャ哲学のメインテーマ「一者」がここに明確な形で登場したのである。

パルメニデスの実在の唯一性という思想、これは「一なるもの」だけが真実の存在であるという説とも解釈できると思うが、そうだとするとパルメニデスは一をめぐる考察の始祖であるということになる。唯一実在の「一なるもの」と数の１とはわれわれにとってはまったく別物のよう

に思えるが、数に関する初期の時代には渾然として一体のものだったのであろう。

しかし、パルメニデスは数そのものを考察の対象にしているのではないから、パルメニデス以降の抽象的哲学的思索がピュタゴラス派の数学に影響を与えて、次第に抽象的な数の概念が構成されて行ったのであろう。以後ギリシャ時代を通じて、抽象的な言葉による、独特の疑似的論理性を持った考察の隆盛を見る。

ピュタゴラス派は数を教義の中心に据えた宗教団体であったのだが、当時の抽象的思考を愛好する傾向を受け入れて、抽象的な数学を研究する部門を持つようになり、知性を代表する派となっていった。ソフィストの方は伝統的な神の思想を乱すとして保守派から嫌悪され、若者をたぶらかす者として弾圧されたけれども、ピュタゴラス学派の方は宗教的な教団としての問題の方は別として、数学者の集団としては尊敬され、プラトンにも影響を与え、その哲学の形成に役割を果たしたとされる。

数や点などの数学の基礎概念は抽象的な不可分者、始原、一者、無限の議論と絡んで諸学派の哲学者たちの課題として議論が重ねられていた。これが現在数理哲学として知られる学問の初期の姿である。当時の喜劇作家に「一でさえ一ではないだから、ましてや二が一であるはずはないさ、プラトンのいうように」とからかわれているというから（ディオゲネス・ラエルティオス『ギリシャ哲学者列伝』）、プラトンを数理哲学者の一人に数えてもいいであろう。

プラトンにおいては数学的対象は完全に独立的存在と考えられていることを見ておこう。

彼ら（数学者たち）は目に見える形象を補助的に使用して、それらの形象についていろいろと論じる。ただしその場合、彼らが思考しているのはそれらの形象についてではなく、それを画像とする原物についてなのであり、彼らの論証は四角形そのもの、対角線そのもののためなされるのであって、図形に描かれた対角線ためではない。・・・。これらの画像を用いて、思考によってしか見ることのできないようなかのものを、それ自体として見ようと求めているのだ。（『国家』、第６巻）

また、数についても「彼らの語っている数とは、ただ思惟によって考えられることができるだけで、ほかのどのような仕方によっても取り扱うことのできないような数なのだ」（同書、第７巻）とされている。従って、現実の一つのものは分割できるけれども、観念的な一は「分割できない」という定義によって「不分割である」。

プラトンはパルメニデス＝ゼノンの１と多に関するアポリアを「一（のイデア）を分有することによって一つであり、また同じそれらのものが多の（イデア）分有によって多である」のであって、決して「多＝１」なのではないとして解決した。つまりものは見ようによっては一つにみることができ、別の見方をすれば二つにもなるというのである。

プラトンはイデア的な数の存在と感覚的な数の存在を区別して認めた。そしてイデア的な数をこそ観想の対象とすべきであると主張している（「この学問はつよく魂を上方へ導く力を持ち、純粋の数そのものについて問答するように強制するのであって、目に見えたり手で触れたりできる物体の形を取る数を魂に差し出して問答しようとしても、決してそれを受け付けない」『国家』第７巻）。

アリストテレスによれば「プラトンは感覚的事物とエイドスとの他に、この中間に、数学の対象たる事物が存在すると主張し、そしてこの数学的諸対象をばそれらが永遠であり不変不動である点では感覚的事物と異なり、エイドスとは数学的諸対象には多くの同類のものがあるのにエイドスはいずれもそれぞれ自らは唯一単独であるという点で異なるとしている」（『形而上学』Ⅰ－６）。そして数学的対象がものの実体であるとした点ではピュタゴラス派と同じであると断じた。つまり直線といってもたくさんの直線があるように、１についても具体的にはたくさんの１なる事物があるとプラトンが考えているのだとすれば、確かにプラトンはピュタゴラス的残滓を引きずっていることになる。

感覚的な数とか数学的な数とかいうものがいったい何を表すのか現代のわれわれにとっては分かりにくいところである。しかし、プラトンが抽象的言語が作られる途上の時代の人、あるいは抽象的言語を作り上げた当の人であるという状況を考えるなら、数に対して古い時代の感覚が一部残されていたと見ることもできよう。つまり「現実の（具体的な）数１は分割できる」というのは「一つのものそのものは分割できる」という意味であることになる。「現実の数」というのがアリストテレスの言う「数学的な数」と同じであるとすると、ピュタゴラス時代の数というものも同時にどういうものであるかが分かってくることになる。

アリストテレスの伝えるところでは（プラトンの）アカデメイアでは、イデア的な数を認めない人たちもいたらしい（スペウシッポスはその代表である）。

イデアという概念は真・善・美という倫理的な問題から生じた。従ってプラトンにとっては見ようによっては真であったり、真でなかったりというような『両論』的、ソフィスト的見地は許しがたいものであったに違いない。

『両論』のようにすべての判断は相対的なものであるから、あらゆるものは善でもあり悪でもあり、大でもあり、小でもあるという「評価の相対性」的見方と本質的に違った意味で、数には他の抽象的概念とは違ったある種の相対性を持っていることがフレーゲによって指摘されている。例えば、トランプのカードの一山を指して「数を数えよ」と言えば、それは総枚数とも取れるし、何組のカードかという問いとも取れるし、なにかあるゲームの点数のことかもしれない。一方、緑色という概念は光の波長で決めることができる。石を与えて「重さを計れ」といえば、その意味は歴然としている。

あるものの集合を与えれば、それを類別する方法はたくさんある。特に集合が無限集合であれば類別の方法も無限にある。それらの一つ一つに数を与えることができるのである。だから「数を数えよ」という表現には常にもう一つ補助的な説明が必要になる。

これがイデアという考え方をしたときに数を不変不動のイデアとみなすには何かそぐわない感じをアカデメイアの学者達に与えた理由なのではなかったかと思うのである。ともあれ、数という概念を抽象的に考えるには倫理的な概念を抽象化するよりも困難な意味があったことがプラトンの学派の動向によって知ることができよう。

アリストテレスはあらゆる感覚的実在から数を始めとする哲学的対象を知的操作によって単独に切り離して、それについて思考することはできるという意味で存在するが、それは感覚世界から離れて存在するのではないと考えた（内在的形相の概念）。

アリストテレス以前には「・・・がある」というのと「・・・である」というのが一緒くたにされて考えられていた。そこでアリストテレスは「可能態（デュナミス、potential）」と「現実態（エネルゲイア、actual）」の区別を立てて、「生じたのならそれ以前にはなかったことになる」といったパルメニデス的アポリアに決着をつけた。「冷たいものが熱くなった」という叙述を「冷が熱になった」と取って、矛盾であるとした議論に一応けりを付けたのである。そういう立場から彼は「（数は）可能態において存在するだけで、現実態において存在しているのではないのである」と述べて、数は存在するのかどうかという新しい見解を立てたのである。

もう一度プラトンとの違いを明確にすれば、プラトンは数は感覚的事物から独立して観念的に実在するものであると考えるが、イデアとしての数の他に、数学的対象としての数なる概念も合わせ考えた。アリストテレスは数は可能態として内在し、「数自体はいかなる事物の実体でもない」と考えた。

アリストテレスの数もある意味では「存在」であると解釈されることが多いが、しかしながら、アリストテレスは「一はある多さを測る尺度（単位）を意味し、数はこの尺度で測られた多さを意味する」（『形而上学』XⅣ－１）、あるいはまた、「数は、どのような数であろうと、常にあるなにものかの数である。・・・従って、数は事物の能動的原因ではなく、その質料でもなく、説明方式でもなく、形相でもない。いわんや目的としての原因でもない（『形而上学』XⅣ－５）とも述べている。

これは、数はどういう意味においても存在ではないと言おうとしているようにも聞こえる。つまり、われわれは普通には（小学校教育の結果か）数は事物の個数の抽象化であると考え、数に関する法則は個数計算の規則を抽象的に記述したものであると捉える傾向を持つ。従って数はどういう意味でも実在ではない。アリストテレスの言葉にはやや これに近い見解をも示しているようにも取れるところがある。

現代数学では０は空集合φ、１は空集合を要素とする集合｛φ｝というように定義する。つまり、数は数学的世界（集合の世界）に実在するものである。そして、これらの自然数の集合と対応付けることによって、「数える」という操作の意味が確定する。しかし高校で習う程度の数学までの水準でいえば、数が存在するかどうかということは問題ではなく、一個、二個と数えるという操作を抽象化・記号化したものとして説明される。

いずれにしても、個数という意味での数は対象に内在するとも考えないし、離れて存在するとも考えない。われわれは対象の成す集合を（たとえ直感的であろうとも）目的に応じて類別し、対象に対して「個数」を付与するのである。

こういう考え方のどこがアリストテレス的であり、どこがプラトン的であるかは、ここでは考察しないことにしよう。

アリストテレスの数学観

最後に、数学と自然学との関係についてアリストテレスがどう考えていたかを簡単に調べてみよう。

アリストテレスは数学と自然学を峻別した。二、三関連する言葉を拾ってみよう。

「どうして線が実体でありえようか。なぜなら、線は形相またはある種の形式としての実体でもないし、また質料としての実体でもないから。というのは現に明らかに諸々の線または面または点から形成されうるようなものは何も認められないからである」（『形而上学』ⅩⅢ－２）。「感覚的な線は幾何学者の定義するとおりの線ではない、というのはいずれの感覚的な直線も定義通りに直ではなく、また円もその通りではなく、例えば丸い輪と物差しとは決して幾何学で言われるとおりに一点において接するわけではなくて、むしろプロタゴラスが常に幾何学者を駁して言っていたように線に沿ってであるから」（同、Ⅲ－２）。「数学者もまた点や線や面や形などの研究をその仕事とはするが、これらの各々を自然的な物体のある限界として研究しはせず、それらをとくにこうした物体に付帯する属性としてのかぎりにおいて研究しもしない。だからまた数学者はそれらをその付帯するところの物体から切り離しているのである。というのは、それらは思惟の上では運動から切り離されうるものであり、また切り離されてもその推理に何の間違いも起こらず、結論に何の虚偽も生じないからである」（『自然学』Ⅱ－２）。

中世以降近代に至るまで西洋においても数学が自然をそのままに対象としているのではないことが理解できない学者が多かった状況を考えると、アリストテレス、あるいは当時のギリシャの哲学者の見解は驚異的であるといわざるを得ない。合わせて、「数学上の諸公理が感覚的事物の場合に妥当しない」（『形而上学』ⅩⅣ－３）という言葉もあるから、本稿で述べたように、ギリシャ時代には幾何学の原理が自明な命題と考えられていたのではないことが分かると同時に、

エレア派の追究に対抗するために、『原論』の原理が設定されているというのが「言い過ぎ」であることがはっきりするであろう。何もエレア派だけではなく、アリストテレスの時代にはそのような見解は常識だったのである。

「存在について、それが一つであり不動なものであるかどうかを詮索するのは自然学者のすることではない。けだし、あたかも幾何学者にとっても、幾何学の諸原理を否認する人々に対しては何の議論のしようもないように」（『自然学』Ｉ－２）という言葉はエレア派の影響は既に終わっており、数学者が公理などの原理の問題に神経を使う必要のない時代になっていることを示している。つまり、数学における始原的原理が程度の差こそあれ、要請であって、決して自明な命題を表しているのではないことはアリストテレスの時代のギリシャ世界においては常識なのであった。