古代ギリシャにおける比と比例の定義

斎藤 憲（千葉大学文学部）

1 古代における比例の定義

1.1 『原論』における比例の定義

比例論はギリシャ数学の数および量の扱いで中心的な役割を演ずる理論である．しかしこの理論の根幹をなす，比および比例の定義をめぐる状況はかなり複雑である．エウクレイデス『原論』では比例について２つの定義が与えられる．第５巻の定義５と第７巻の定義 21 である[1]．

[1]『原論』における比および比例の定義は次のとおり（筆者による訳）

第５巻定義（抜粋）

3. 比とは同種の二つの量の大きさに関するある種の関係である．
4. 倍加されて互いに他方より大きくなりうる［二つの］量は互いに比をもつといわれる．

4'. 比例とは比の相似である．

5. 第１の量が第２の量に対し，第３の量が第４の量に対するのと同じ比にあるとは，第１の量と第３の量の任意の等倍と第２の量と第４の量の任意の等倍が，対応する順に取られたとき，［前者の］各々が［後者の］各々をともに超えるか，ともに等しいか，ともに不足するかするときである．

第７巻定義 21

第１の数が第２の数の，第３の数が第４の数の等倍であるか，同じ部分であるか，または同じ諸部分であるとき，それらの数は比例する．

第５巻定義５の意味するところは，次のように表現できよう．

４量を a, b, c, d とする．．$a : b = c : d$ となるのは，任意の自然数 m, n に対して $ma \gtreqless nb \iff mc \gtreqless nd$ が成立するときである．

第７巻定義 21 は同じく a, b, c, d に対して，次のいずれかが成立することを意味する．

$$(1) a = mb \wedge c = md,\ (2) a = \frac{1}{n}b \wedge c = \frac{1}{n}d,\ (3) a = \frac{m}{n}b \wedge c = \frac{m}{n}d.$$

なお，第５巻定義４と５の間の定義 4' は現代の校訂版からは削除されているが，多くの写本に見られるものであり，クラヴィウスのラテン語訳（1574）ではこの位置にこの形で定義５として収録されている．当然この後の定義の番号は１つずつずれて，現代の校訂版と異なっている．

前者は線分，面積，立体（さらには角，時間）などの主に幾何学量を対象とする．この定義は通約不能量にも適用可能である．後者が数論で利用される整数を対象とする定義である．

この定義の２重性，および前者の形式的な複雑さについては，一般に次のように説明されている．当初，通約不能量の存在が知られていなかった時期には，第７巻のタイプの定義が幾何学量にも適用されていた．その後通約不能量の発見の後に，これらの量をも対象としうる定義として第５巻の定義が確立された．

とりあえずこの説明を受け入れることにしよう．通約不能量の発見は紀元前５世紀後半，第５巻の定義はエウドクソスのもので，紀元前４世紀半ばとされる．仮にこれを認めると，通約不能量の発見とエウドクソスによる比例の定義の確立との間にはかなりの期間がある．この期間に，通約不能量に適用可能ではあるが，今日我々が『原論』第５巻に見る定義とは異なる定義が存在したと考える説が有力である．次にこれを見ていこう．

1.2 エウドクソス以前の比例の定義の復元の試み

今日，エウドクソス以前の比例の定義と言えば，[Becker 1933] において主張された「相互差引に基づく比例の定義」を指すといってよい．

これに関しては Becker が根拠としたアリストテレスの『トピカ』の解釈が全く間違っているという [Szabó 1964] のような反論もあるが，現在これに積極的に反対する意見は見られない．この定義は次のようなものである．

「相互差引」による比例の定義

> ２つの比はそれらの相互差引の除数全体が一致するとき，そのときに限り等しい [Becker 1933, 317].

相互差引とは通常「エウクレイデスの互除法」として知られる手続きである．Becker の定義は次のようなものである．同種の２量 $a, b(a > b)$ が与えられたとき，

$$a = q_1 b + r_1 (0 \leq r_1 < b)$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 (0 \leq r_2 < r_1)$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 (0 \leq r_3 < r_2)$$

$$r_2 = q_4 r_3 + r_4 (0 \leq r_4 < r_3)$$

のような手続き（q_iはすべて自然数）で商の列$q_1, q_2, q_3, \cdots$が得られる．これが別の同種の２量c, d（a, bと同種である必要はない）に対して得られる商の列と一致するならば$a : b = c : d$である，と定義する．

Beckerはこの定義に基づいても『原論』第５巻のほとんどの命題が証明されることを実際に示している．逆に，この定義によって一般的に証明できない主要な定理は，5-16（中項の交換），5-22（等間隔比の命題）の２つである．これらは，いずれも比の乗法（比を分数と同一視したときに，その分数の乗法にあたる操作）に関連し，相互差引の定義ではこの種の定理を扱うことは困難なのである．

さて，この定義が存在したことを直接示す証拠はBeckerのあげた『トピカ』の一節以外にはほとんどないのだが，この定義の存在はなぜか定説となっている．そしてこの定義に基づいてBeckerが証明できなかった『原論』5-16（中項の交換）を証明しようとする試み（[Larsen 1984],[Thorup 1992]）が行なわれている．

しかしこれらは一つ間違えれば全く無意味になりかねない試みである．現在『原論』第５巻に見い出される比例論に関する諸命題が，どの程度古い起源をもつのか，また，より古い時代にはどのような形で定式化されていたのか，我々は全く知らないからである．古い比例の定義のもとでの比例論の定理の証明の再構成を試みるのならば，そのような比例の定義が存在したとされる時代の比例論に，どのような定理が存在し，どのような定理は未だ存在しなかったのかを論じることも同時に進めなければならない．この点で，上述の再構成には不安が残る．

さらに，筆者のこれまでの研究では，たとえば２重比，３重比，合成比といった概念自体は『原論』に現われるが，これらの概念が定理の証明や問題の解法に利用されることは，『原論』でも，さらに『原論』以降の著作でも，意外に稀である．これらの概念を利用すればはるかに簡単に解決する問題で，大きな回り道をしてようやく結論に達するということも珍しくない．これらの事実はこれらの概念が比較的後になってギリシャ数学に取り入れられたことを示唆するものである．なお，これらの「後で取り入れられた」概念が命題5-22に依存することは興味深い．なぜならこれはBeckerによる比例の定義では直接証明できない定理だからである（詳細は[Saito 1986], [Saito 1993]）．

なお，エウドクソス以前の別の比例の定義として，通約不能量の比にいくらでも近い通約可能量の比がとれる，ということを手がかりとする別種の定義があったという意見が[Knorr 1978]に見られる．この定義と，

ガリレオ学派の比例論との類似は興味深い（後述）．

2　近世初期における比例の定義

2.1　中世の誤解とルネサンス

中世西欧において『原論』はアラビア語訳からさらにラテン語に重訳されることによって知られた．もっとも普及したカンパーヌス版の『原論』は，比例の定義についてまったく誤った注釈をしていることで知られている．これを最初に正したのはタルタリアによる『原論』のイタリア語訳 (1543) であった．なお，タルタリアは独自に翻訳を行なったのではない．カンパーヌス版の刊本 (1482) とザンベルティによるギリシャ語から直接のラテン語訳 (1505) の双方を利用し，両者の命題（特にカンパーヌス版には本来の『原論』に存在しないものも多いが，それらも含む），注釈をラテン語からイタリア語に訳し，さらに自身の注釈を付加したのである．この問題については [高橋 1987] を参照．

2.2　ガリレオ学派における比例論の改革

第５巻の比例の定義が正しく理解されたことは，しかしこの定義に当時の学者が満足したことを意味するわけではない．このようなきわめて操作的な定義を受け入れることは困難であった．定義とは，もっと簡潔で直観的にその意味するものが理解されるべきである，という考えが有力であった．

このような不満の代表的事例として，ガリレオとその弟子たちが，第5巻の比例の定義を批判し，それに代る定義を提唱し，それに基づいて比例論を再構成しようとしたことがあげられる．

従来，ガリレオが別の比例の定義を提唱した晩年の断片（『新科学論議』の「第５日」として構想され，トリチェッリに口述された．邦訳は [斎藤 1994].）は，ガリレオが単純な誤りを犯したものとして省みられることが少なかった（たとえば [高橋 1986]）．しかし，最近イタリアの数学者・数学史家の Enrico Giusti が，この著作の写本を再調査し，さらにガリレオ学派のトリチェッリ，ボレッリの同種の著作との比較を行ない，ガリレオの試みは，論理的厳密性の点から弱点はあるものの，十分評価に値すると主張した [Giusti 1993]．しかも興味深いことにガリレオ学派の比例の定義は [Knorr 1978] においてアルキメデスの著作から再構成さ

れたものにきわめて類似しているのである．ガリレオ学派もまた，Knorrが参照したのと同じアルキメデスの『平面の平衡について』に示唆をうけた可能性さえある．

我々にとってとりわけ興味深いのは，定義のみたすべき（暗黙の）要件について，ガリレオ学派と我々の間に大きな距離があることである．我々にとって第5巻定義5のような操作的な定義は珍しいものではない．そして『原論』の「比」の定義とされる定義3や，現代の定義4と5の間にクラヴィウス版で挿入された定義4'は単なるレトリックであって数学上の定義としては我々にとって全く無意味でしかない．

しかし，ガリレオ学派（彼らはクラヴィウス版を利用していた）にとっては定義3と4'（クラヴィウス版では定義5）が比と比例の完全な定義であり，定義5（同じく定義6）は余分でしかないのである．彼らにとってこれらの定義の価値は我々が考えるものと全く逆なのである．

トリチェッリ著作『比例について』は，ガリレオの「第5日」に論理的厳密性を与える試みであるが，ここでの彼の言葉から『原論』の比例の定義に対する彼の評価は明らかである．

> 「ほとんど全ての命題において真理がかくも明白に輝いているエウクレイデスにおいて，ひどく不明確で，これ以上に不確実（誤りと言わないまでも）なものがあるとは考えられないような箇所が見い出されるのは，小賢しい写字生どもの，どのような無思慮の結果なのだろうか？『原論』5巻で，こともあろうに定義そのものが，許し難いまでに損われ，汚されているように思われるのは，このような例であろう．」([Torricelli 1919, 1:301], [Giusti 1993, 66].)

> 「エウクレイデスにおいては，彼が「比例とは比の相似である」と言うときに比例の真の定義がなされている．そこで，比例についての他の定義を付け加えるなら，それがいかなるものであれ，既に導入された定義と明らかに同一でない限り，即座にそれを定理へ追いやり，明白な証明によって証明しなくてはならない．」([Torricelli 1919, 1:306], [Giusti 1993, 68].)

このように比例の定義は数学史上，古代から近世に至るまで数多くの興味深い問題を提供するテーマである．今回の報告ではそのごく一部を簡単に紹介した．

参考文献

Becker, O. 1933. Eudoxos-Studien I. Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid, *Quellen und Studien*, Abt. B, Band II, 311–333.

Giusti, E. 1993. *Euclides Reformatus: La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana.* Torino:Bollati Boringhieri.

Knorr, W. R. 1978, Archimedes and the Pre-Euclidean Proportion Theory. *Archives internationales d'histoire des sciences*, 28, 183–244.

Larsen, M. E. 1984. On the Possibility of a Pre-Euclidean Theory of Proportions. *Centaurus*, 27, 1–25.

Saito, K. 1986. Compounded Ratio in Euclid and Apollonius. *Historia Scientiarum*, 31, 25–59.

Saito, K. 1993. Duplicate Ratio in Book VI of Euclid's *Elements*. *Historia Scientiarum*, Ser. 2, Vol. 3, 115–135.

斎藤 憲. 1994. ガリレオ『新科学論議』断片「エウクレイデスの比の定義について」の翻訳と検討. 東京大学文学部イタリア文学研究室紀要（誌名未定）第 1 号.

Szabó, Á. 1964. Ein Beleg für die voreudoxische Proportionenlehre? Aristoteles: Topik Θ.3, p. 158b29–35. *Archiv für begriffsgeschichte*, 9, 151–171.

高橋 憲一. 1986. ガリレオの位置運動論形成課程の一断面. 『歴史学・地理学年報』10, 九州大学教養部, 79–97.

高橋 憲一. 1987. 中世西欧の比例論. 『数学の歴史』第 2 巻『中世の数学』第 1 章第 5 節. 東京:共立出版.

Thorup, A. 1992. A Pre-Euclidean Theory of Proportions. *Archive for History of Exact Sciences*, 45, 1–16.

Torricelli, E. 1919. *Opere di Evangelista Torricelli*. Faenza.