正規積の100年

黒川信重（東工大・理）

0 正規積とは

無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散する場合にも、その値をどうにかして知りたいという場面がよく起こる。正規積はそのための一つの方法である。これは $\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n\right)$ と考えれば総和法の一種でもある。

正規積 $\coprod_{n=1}^{\infty} a_n$ は

$$\coprod_{n=1}^{\infty} a_n = \exp\left(-\frac{d}{ds}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}\Big|_{s=0}\right)$$

と定義される。この中の $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}$ は、"ゼータ関数"（その範囲はいずれにせよ）と呼ばれるものであり、「ゼータ正規(化)積」とも呼ばれる。なお、この記号 $\coprod$ は通常の積 $\prod$ と区別するためにデニンガーによって1991年頃から用いられたものである。

正規積に関する最初の結果は100年前にレルヒ（Matyas Lerch：チェコの数学者，1860年2月20日－1922年8月3日）によって得られた。今回は主にレルヒの周辺をふりかえってみたい。

1 100年前のレルヒの結果

レルヒは1894年に発表したチェコ語の論文「マルムステーン級数のさらなる研究」[1]（投稿は1894年9月4日）において

$$\frac{d}{ds}\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}\Big|_{s=0} = \log\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$$

という式を証明した。$\Gamma(x)$ はガンマ関数である。

左辺はフルビッツ・ゼータ関数 $\zeta(s,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}$ の s に関する偏微分 $\zeta'(0,x)$ だから、正規積で書けば

$$\prod_{n=0}^{\infty}(n+x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}$$

となる。とくに $x=1$ とおけば

$$\prod_{n=1}^{\infty} n=\sqrt{2\pi} \quad \text{あるいは} \quad \infty!=\sqrt{2\pi}$$

という簡明な結果になる。この、特別な場合はリーマンゼータ関数についての式 $\zeta'(0)=-\log\sqrt{2\pi}$ の言いかえである。

レルヒの原証明法は以下のとおりである。[レルヒの文献[1]を提供していただいたチェコ学士院に感謝いたします。]

まず、$\zeta(s,x)$ が $s\in\mathbb{C}$ に解析接続できることは

$$\zeta(s,x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}t^{s-1}}{1-e^{t}}dt=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int\frac{e^{-xt}(-t)^{s-1}}{1-e^{-t}}dt$$

から通常のようにわかる。

とくに $s=1$ においては1位の極（留数1）であり

$$\zeta(s,x)=\frac{1}{s-1}+A_0(x)+A_1(x)(s-1)+\cdots$$

の形の展開をもつ。

いま

$$\zeta(s,x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\int_0^{\omega}\frac{e^{-xt}t^{s-1}}{1-e^{t}}dt+\int_{\omega}^{\infty}\frac{e^{-xt}t^{s-1}}{1-e^{t}}dt\right\}$$

と、$0<\omega<2\pi$ によって分解する。

ここで，

$$\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) t^n \quad (|t|<2\pi)$$

と展開すると（$a_n(x)$ は ベルヌイ多項式に実質的になる）

$\mathrm{Re}(s)>1$ において

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\omega} \frac{e^{-xt}t^{s-1}}{1-e^{-t}}dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\frac{\omega^{s-1}}{s-1} + \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\frac{\omega^{s+n}}{s+n}$$

$$= \left[(1-\Gamma'(1)(s-1)+\cdots)\frac{1+(s-1)\log\omega+\cdots}{s-1} \right]$$

$$+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\frac{\omega^{n+1}}{n+1} + O(s-1) \right]$$

$$= \frac{1}{s-1} + \left(\log\omega - \Gamma'(1) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\frac{\omega^{n+1}}{n+1} \right) + O(s-1)$$

となるから（$\Gamma'(1)=-\gamma$，$\gamma=0.577\cdots$ はオイラー定数）

$$A_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\frac{\omega^{n+1}}{n+1} + \left[\log\omega + \int_{\omega}^{\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt \right]$$

$$+ \int_{\omega}^{\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}dt + \gamma$$

となる。ここで

$$[\cdots] = \log\frac{\omega}{1-e^{-\omega}}$$

だから，$\omega\to 0$ とすることにより

$$A_0(x) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}dt + \gamma$$

$$\overset{*}{=} -\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x)$$

となる。

(☆の証明)

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\}$$

の対数微分をとると

$$-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x) = \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right).$$

一方

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$$

$$= \int_0^\infty (e^{-xt} - e^{-t})(1 + e^{-t} + e^{-2t} + \cdots) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{x} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{x} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right).$$

したがって

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{1-e^{-t}} dt + \gamma = -\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x).$$

このようにして，$s=1$ のまわりで展開すると

$$\zeta(s,x) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(x) + O(s-1)$$

の形になることがわかる。これを $s=0$ の近傍に関係式 $\boxed{\dfrac{\partial \zeta(s,x)}{\partial x} = -s\,\zeta(s+1,x)}$

を用いて変換する。

$$\zeta(s,x) = B_0(x) + B_1(x)s + B_2(x)s^2 + \cdots$$

とおくと，$B_0(x) = \zeta(0,x) = \frac{1}{2} - x$ は容易にわかり

$B_1(x) = \zeta'(0,x)$ が求めるものになる。

先の関係式を使うと

$$B_0'(x) + B_1'(x)s + \cdots = -1 + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(x)s + \cdots$$

となる。よって

$$B_1'(x) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(x)$$

がわかる。したがって

$$B_1(x) - B_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \log\Gamma(x) - \log\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

となる。ここで $\frac{1}{2}$ は他の数でもよいが，この場合には以下にみるように $\frac{1}{2}$ がとくに使いやすい。

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ より $B_1(\frac{1}{2}) = \zeta'(0, \frac{1}{2})$ を求めればよい。

$$\zeta\left(s,\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{-s} = 2^s(1-2^{-s})\zeta(s) = (2^s-1)\zeta(s)$$

だから

$$\zeta'\left(0,\tfrac{1}{2}\right) = (\log 2)\zeta(0) = -\frac{1}{2}\log 2$$

とわかる。［ここで $\zeta'(0)$ の項が消えてしまうことが重要。

$\frac{1}{2}$ の代りに 1 を取ると

$$\begin{aligned} B_1(x) - B_1(1) &= \log\Gamma(x) - \log\Gamma(1) \\ &= \log\Gamma(x) \end{aligned}$$

となり $B_1(1) = \zeta'(0,1) = \zeta'(0)$ が必要になってしまう。］

したがって $B_1(x) = \log\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$ となってレルヒの公式が証明された。同時に，この方法によると $x=1$ とおけば

$$\zeta'(0) = -\log\sqrt{2\pi}$$

が証明されたことになる。[この式自体は $\zeta(s)$ の関数等式を用いて直接示すこともできるが、レルヒの方法は示唆深い。]

2 マルムステンの結果

レルヒの論文(1894年)は「マルムステン級数のさらなる研究」と題されていたが、このマルムステンはスウェーデンのウプサラ[大学]の数学者であり、1849年にラテン語の論文[3]を発表していた(投稿は1846年5月1日)。

その内容は

$$L(s) = 1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - 7^{-s} + 9^{-s} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}$$

$$= L\left(s, \left(\frac{-1}{*}\right)\right)$$

(および別のL関数)について、関数等式

$$(1) \quad L(s) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^s}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)} L(1-s)$$

(ここでは、sは一応、実数と考えられている)

および特殊値

$$(2) \quad L'(1) = \pi \log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{\pi}{4}(\log\pi - \gamma)$$

を証明したものであった。関数等式の証明はリーマンより10年以上前であったことに注意すべきであろう。

レルヒは この(1)と(2)から

(3) $\zeta'(0,\frac{1}{4}) = \log\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\sqrt{2\pi}}$

が得られることを見て取ったに違いない。これがレルヒの公式の $x=\frac{1}{4}$ の場合である。

(1),(2) ⇨ (3) の導き方

(1)を微分したものに(2)を使って

$$L'(0) = -2\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \log\pi - \frac{1}{2}\log 2 \text{。}$$

ここに，ガンマ関数と正弦関数の関係

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

を用いて

$$L'(0) = 2\log\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}\log 2 - \log\pi \text{。}$$

さて，フルビッツ・ゼータ関数を用いると

$$\zeta\left(s,\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}(4^s-2^s)\zeta(s) + \frac{1}{2}4^s L(s)$$

$$\left[\,4^{-s}\zeta\left(s,\frac{1}{4}\right) = \sum_{n\equiv 1 \bmod 4} n^{-s} = \frac{(1-2^{-s})\zeta(s)+L(s)}{2}\,\right]$$

だから

$$\begin{aligned}\zeta'\left(0,\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{2}(\log 2)\zeta(0) + \frac{1}{2}(\log 4)L(0) + \frac{1}{2}L'(0)\\ &= \frac{1}{2}L'(0) + \frac{1}{4}\log 2 \quad \left[\zeta(0)=-\frac{1}{2},\ L(0)=\frac{1}{2}\right]\\ &= \log\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

となる。

北欧のマルムステンから東欧のレルヒへ，という「中央」を経由しない（ように見える）この動きは，数学は国の大きさ，ましてや経済力，機材とあまり関係ない（なかった）ということを，いまさらながら想い起こさせてくれる。

$\boxed{3}$ レルヒの結果の周辺

レルヒの結果に至った道には大きくわけて２本が見える。

① ゼータ関数の特殊値の流れ

マーダヴァ（1400年頃，インド） $L(1)=\frac{\pi}{4}$

［ヨーロッパでは1680年頃のライプニッツ］

オイラー（1734年頃） $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $L(3)=\frac{\pi^3}{32}$, …

オイラー（1750年頃） $\zeta(s)\leftrightarrow\zeta(1-s)$ の関数等式予想

$L(s)\leftrightarrow L(1-s)$ の関数等式予想

↓

マルムステン（1846年頃） $L(s)\leftrightarrow L(1-s)$ の関数等式証明

$$L'(1)=\pi\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{\pi}{4}(\log\pi-\gamma)$$

↓

レルヒ（1894年） $\zeta'(0,x)=\log\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$

ここで ➡ と書き入れてあるのは論文の中で

$\left[\begin{array}{c}\text{オイラー}\\ \hline \text{マルムステン}\\ \hline \text{レルヒ}\end{array}\right]$ が $\left[\begin{array}{c}\text{ライプニッツ}\\ \hline \text{オイラー}\\ \hline \text{マルムステン}\end{array}\right]$ の結果が動機

であったことを明言していることを示している。

［クロネッカーの極限公式（1889）も $\boxed{4}$ で述べるように影響を与えていたに違いない。］

② 総和法の流れ

ウォリスの公式（1655年） $\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\frac{8\cdot8}{7\cdot9}\cdot\frac{10\cdot10}{9\cdot11}\cdot etc=\frac{\pi}{2}$
（Wallis）

↓

スターリングの公式（1730年） $n!\sim\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\quad(n\to\infty)$

↓

オイラーによる言い換え（1769年：全集I-15, 124頁）

$$\log 2-\log 3+\log 4-\log 5+\log 6-\log 7+\log 8-\log 9+etc=\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}$$

リーマン（1859頃）

$$\sum_\rho\frac{1}{\rho}=-\frac{1}{2}\log(4\pi)+\frac{\gamma}{2}+1$$

↓

フォン・マンゴルト（1895年）

$$\zeta'(0)=-\log\sqrt{2\pi}$$

レルヒ（1894年）

$\infty!=\sqrt{2\pi}$,

"1·2·3·…"

$$\zeta'(0,x)=\log\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}},$$

$$x(x+1)\cdots(x+n-1)\sim\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}n^{n+x-\frac{1}{2}}e^{-n}$$
$(n\to\infty)$

（解説）オイラーは上記の式がウォリスの公式の言い換えであると述べている（同様にスターリングの公式の言い換えも言っている）。

これは，$\varphi(s)=1^{-s}-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s}$ とおくと

$\varphi'(s)=\log 2\cdot2^{-s}-\log 3\cdot3^{-s}+\log 4\cdot4^{-s}-\cdots$ だから

オイラーの式は

$$\varphi'(0)=\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}$$

を意味していると考えることができる。これが，$\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\log(2\pi)$ と同値であることは $\varphi(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)$ から導かれる。

たしかに，$\varphi'(0) = -\zeta'(0) - \log 2$ だから

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2} \iff \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$$

となる。したがって，ウォリスの公式はこの意味でスターリングの公式と「同値」になる。この2つの公式の関係については黒川[4](1972)を参照されたい。

なお，スターリングの公式と $\zeta'(0) = -\log\sqrt{2\pi}$ との同値性については Hardy の本 "Divergent Series" が詳しい。

リーマンの式は，リーマンゼータ関数の零点の計算（リーマン予想を最初の何個かの零点について確かめた）において用いられた遺稿に書かれている式であり，$0<\mathrm{Re}(\rho)<1$, $\zeta(\rho)=0$ となる ρ についての和である。この式と $\zeta'(0) = -\log\sqrt{2\pi}$ とが同値なことは $\zeta(s)$ の標準積（"Hadamardの積表示"）からわかる。フォン・マンゴルトは1895年（Crelle's Journal）にリーマンの素数定理を再構成する際に記している。（なお，Cahen は前年に同様の事をしているが $\zeta'(0)$ の計算を誤っていた。）

ちなみに，これらの総和法の関連では，後にラマヌジャンが再発見していることも注目される事であろう。

$\boxed{4}$ レルヒ(1894)以後

(1) レルヒ[2](1897)はレルヒの公式とクロネッカーの極限公式を組み合せることにより，後に「Chowla-Selbergの公式」と誤って呼ばれるようになってしまった次の公式を証明した。ガンマ関数と保型関数(楕円関数)の重要な関係式である。

レルヒの原文通りに書くと：

$$\boxed{\frac{\tau}{2}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right)=2\sum_{(a,b,c)}\log\left[\sqrt{\frac{2\Delta\pi}{c}}\,H(\omega_1)H(\omega_2)\right]}$$

$-\Delta$ は虚2次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta})$ の判別式

(a,b,c) は判別式 $-\Delta$ の2次形式の代表系を動く，

τ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta})$ における1のべき根の個数，

$$\omega_1=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c},\quad \omega_2=\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c},$$

$$H(\omega)=e^{\frac{\pi i\omega}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i n\omega}\right)=\eta(\omega)$$

$\left[\text{したがって}\quad H(\omega_1)H(\omega_2)=|H(\omega_1)|^2=|\eta(\omega_1)|^2\right]$。

証明には K のデデキントのゼータ関数

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}}N(\mathfrak{a})^{-s}=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

を2通りの方法で表示し

$$\zeta_K(s)=\zeta(s)L(s,\chi_K)=\zeta(s)\times(\text{フルビッツ・ゼータの和})$$

$$\| \ [\text{イデアル類ごとの和}]=[\text{エプシュタイン・ゼータの和}]$$

として，$\zeta'_K(0)$ を比較すればよい。（$s=1$ で調べても，もちろん，よい。）上側の微分では前のレルヒの公式を用いて，下側の微分ではクロネッカーの極限公式を用いればよい。

この結果を $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の場合に書くと

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})^4}{4\pi} = \prod_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'(m^2+n^2) = 4\pi^2\cdot\eta(\sqrt{-1})^4$$
$$= 4\pi^2 e^{-\frac{\pi}{3}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi n})^4$$

ということになる。レルヒ(1897)の得た，この結果はLandauが1902年にCrelle's Journal 125巻に発表された素イデアル定理に関する論文の中で証明まで詳しく紹介している。残念ながら，この結果はChowla-Selbergが1967年にCrelle's Journal 227巻にレルヒやランダウへの言及なしに記されたため，1970年代にはChowla-Selbergの公式と呼ばれることになってしまい，Deligne，Grossをはじめとする人々によりその一般化が議論されるようになった。数学史への関心の欠如がここには見られる。

(2) バーンズ(1904)はレルヒの公式 $\zeta'(0,x) = \log\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$ の多重版を考えた。$\omega_1,\cdots,\omega_r$ (>0) に対して

多重フルビッツ・ゼータ関数

$$\zeta_r(s,x;\omega_1,\cdots,\omega_r) = \sum_{n_1,\cdots,n_r=0}^{\infty}(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+x)^{-s}$$

を考え多重ガンマ関数を

$$\Gamma_r(x;\omega_1,\cdots,\omega_r) = \exp\left(\zeta_r'(0,x;\omega_1,\cdots,\omega_r)\right)$$
$$= \left[\prod_{n_1,\cdots,n_r=0}^{\infty}(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+x)\right]^{-1}$$

と定義する。さらに，ヘルダー，新谷，筆者によって

多重三角関数

$$S_r(x;\omega_1,\dots,\omega_r)=\Gamma_r(x;\omega_1,\dots,\omega_r)^{-1}\,\Gamma_r(\omega_1+\dots+\omega_r-x;\omega_1,\dots,\omega_r)^{(-1)^r}$$

が研究された。これは類体の構成（クロネッカーの青春の夢），$\zeta(3),\zeta(5),\zeta(7),\dots$ などゼータ関数の特殊値の表示，セルバーグ型ゼータ関数のガンマ因子の計算など数多くの応用をもつ。これについては，本研究集会の以前の報告を参照されたい。

(3) 一般化されたアイゼンシュタイン級数 $E(s,x)$ の"$s=0$"における微分からクロネッカーの極限公式の一般化が得られる。ここに現れる特殊関数は (2)のような類体の構成や岩沢理論（さらにはフェルマー予想）などへの応用をもっている，重要なものである。

(4) ラプラス作用素やディラック作用素の正規行列式が研究されて微分幾何的な応用（Ray-Singer 1974），物理への応用（Hawking,…），数論幾何への応用（Arakelov, Quillen, Faltings, …）とくに数論的リーマン・ロッホの公式への応用（Gillet-Soulé 1990, …），セルバーグ型ゼータ関数の正規行列式表示（Sarnak, Voros, Kurokawa, Koyama, …）や特殊値表示，など広範な領域に使われている。

(5) ゼータ関数の一般的な行列式表示 $[\zeta(s)=\det(D-s)$ など$]$ から「多重積」（黒川 1984）が研究され，1元体 $\mathbb{F}_1$ 上のテンソル積（絶対テンソル積）として Manin によって1991年に認識された。これが「絶対数学」のはじまりである。

5 正規積の意義と今後

主な点は以下の3つと思われる。

(1) ゼータ関数の $s=0$ における値の重要性を指摘

はじめ $s=1$ で考えられてきたディリクレの類数公式，クロネッカーの極限公式などが $s=0$ で考えると，より簡明になり，本質がよく見えるようになった。
これは，付随して現れる特殊関数（ガンマ関数，三角関数，それらの多重版，保型関数，楕円関数，アーベル関数，…）とその特殊値を捉えることを，はっきりさせた。未知の特殊関数に希望を与える。

(2) 変形族の研究

パラメーター λ 付の正規積 $\prod_n a_n(\lambda)$ は，そのゼータ関数 $\sum_n a_n(\lambda)^{-s}$ において λ についての変形を調べることによって深く研究することができる。
この方法によって (1) に現れる特殊関数の研究がなされている。今後もより重要になるであろう。

(3) 正規行列式の導入と進展

作用素（あるいは行列）A の正規行列式 $\det(A)$ は
ゼータ関数 $\mathrm{trace}(A^{-s})$ を用いて $\det(A)=\exp\left(-\frac{d}{ds}\mathrm{trace}(A^{-s})\Big|_{s=0}\right)$
と構成され，A の固有値の正規積と捉えられる。A が微分作用素（ラプラス作用素，ディラック作用素，…），積分作用素，擬微分作用素などの場合に (2) の変形族 $\det(A(\lambda))$ の形とともに研究されてきた。最近（1994年）Kontsevich-Vishik は乗法公式 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ の成立する条件を研究し成果を上げている。正規行列式は，今後とも，より広範に現れて来るであろう。

文献

[1] M. Lerch "Další studie v oboru Malmsténovských řad" Rozpravy České Akad. 3 (1894) no. 28, pp. 1–61.

[2] M. Lerch "Sur quelques formules relatives du nombre des classes" Bull. Sci. Math. 21 (1897) pp. 290 – 304.

[3] C. J. Malmstén "De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis" Crelle's Journal 38 (1849) pp. 1–39.

[4] 黒川信重「Stirlingの公式の初等的証明」『数学セミナー』1972年6月号.

[5] ―「無限階乗の100年」『数学セミナー』1994年11月号.

[6] ―「無限次行列式」『数理科学』1995年4月号.

[1994年10月 報告]