ハミルトンとヤコビの研究における変分法と
1階偏微分方程式
(変分法におけるハミルトン・ヤコビ理論の形成過程)

中根美知代

1. はじめに

今日の変分法で，ハミルトン・ヤコビの理論は，一つの重要な分野を形成している．一口にハミルトン・ヤコビの理論[1]といっても，正準座標系の導入，ヒルベルトの不変積分，場の理論といったように多彩な内容を包括しているが，この報告では，この理論の出発点となった，いわゆる「ハミルトン・ヤコビの方法」，すなわち，ある変分問題を解くことを1階偏微分方程式を解くことに帰着する手続きを問題にする．

いま，y を x の関数，F は $x, y, \dot{y}$ について2回連続微分可能とする．積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \dot{y})dx, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

を極値とするような $y = y(x)$ を求めることは，方程式，

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad (*)$$

を解くことに帰着されることはよく知られている．1変数の場合にオイラーがこの結果を指摘し，ラグランジュが

$$F = F(x, y_1 \ldots, y_n, \dot{y}_1 \ldots, \dot{y}_n)$$

$$\left(y_i \text{ は } x \text{ の関数，} \dot{y}_i = \frac{dy_i}{dx} \right)$$

の場合に拡張した（この場合，方程式(*)に相当するものは連立方程式となる）ことから，方程式(*)はオイラー・ラグランジュの方程式と呼ばれている．

これに対しハミルトン・ヤコビの方法は，

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = p,$$

---

[1] たとえば，クーラン・ヒルベルト，斉藤利弥・麻嶋格次郎訳『数理物理学の方法３』，1989年，東京図書．

$$H(x,y,p) = p\dot{y} - F(x,y,\dot{y})$$

なる変換を行ない，1階偏微分方程式

$$\frac{\partial J}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial J}{\partial x}\right) = 0$$

を解き，Jを計算したうえで，$y = y(x)$ を求めるという方法である．

教科書にこのように書いてあるから，私たちは指示された通りにやってみるわけだが，なぜこのような手法をとらねばないのかはだれしも気になるところであろう．

ハミルトン・ヤコビの方法と名づけられているのだから，これが，ウイリアム・ローワン・ハミルトン（1805-1865）とカール・グスタフ・ヤコブ・ヤコビ（1804-1851）に発していることは確かであろう．ふたりとも有名な数学者であり，彼らの仕事に関する数学史的な研究は，一通りなされている．ところが，ハミルトン・ヤコビの方法がどのように導かれたかについては，ほとんど調べられていないのが現状である．

先行研究についてもう少し詳しく述べておこう．変分法の歴史において，ハミルトン・ヤコビ理論はどのように扱われているだろうか．

ハミルトンは，1820 年代後半から 35 年頃にかけておこなった光学・力学研究のなかでしばしば変分法を使ったにもかかわらず，彼が変分学上どのような寄与をなしたかについては，ほとんど論じられていない．これに対してヤコビの変分学史上の業績については，トドハンター[2]，ゴールドシュタイン[3]，フレイザー[4]らが検討してきた．彼らの話題の中心は，ヤコビの 1837 年論文“変分と1階偏微分方程式の理論”[5]の前半部分である．ヤコビはそこで，第2変分を導入することにより，最大・最小の問題を扱っている．ラグランジュやルジャンドルによって導入された第2変分の理論は，最大・最小の問題と結びついており，ヤコビを経て，ヘッセ，クレブッシュ，ワイエルシュトラスらに受け継がれていく．その流れのなかでヤコビがなにを成したかは変分学史上の重要なテーマであることは容易に理解できる．したがって多くの数学史家の関心はこちらに集中してしまい，第1変分を問題にするハミルトン・ヤコビの方法については，あまり関心がもたれず，わずかに2つの事実…ヤコビが 1837 年論文の後半部分でハミルトン・ヤコビの方法について言及していること，この結果はクレブッシュにより拡張されたこと…が指摘されているだけであった．そこで，今回は，これまで見逃されてきたハミルトン・ヤコビの理論の原型が形成されるにあたって，ハミルトンとヤコビが実際何を成したかについて検討していきたい．

ハミルトンの力学の論文を読んだヤコビが，変分法でのハミルトン・ヤコビの方法のアイデアを得たことは 1837 年論文のなかで彼自身が記している．1834 年と 35 年に発表された力学の論文は，ハミルトンがそれ以前におこなった光学の研究と深く結びついて

[2] I. Todhunter, *A History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century*,(1861)

[3] H. H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, (1980) Springer-Verlag.

[4] C.Fraser, "Jacobi's Theorem (1837) in the Calculus of Variations and its Formulation by Otto Hesse (1857)" , preprint.

[5] "Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen," *Jl. fur die reine u. angew Math.*17, (1837), pp.68-82.=in *Werke* 4, pp.41-55.

いる．そこでこの報告では，ハミルトンの光学の論文の検討から始め，力学の論文へとすすんでいきたい．言うまでもなく，これらの論文は物理学上の問題を扱ったものであるが，この報告では，これらを数学史の立場から評価していくことになる．つぎにヤコビの力学と等周問題に関する議論を分析し，ハミルトン・ヤコビ理論の形成された過程を論じていく．

ヤコビの記述から察せられるように，変分学におけるハミルトン・ヤコビ理論は，力学から得られたものである．ただし，力学の理論を数学に焼き直すには，それなりの工夫がなされているはずである．これが実際に何であったかもあわせて検討したい．

2.ハミルトンの光学-力学研究

1) 光学の特性関数

ハミルトンは，1828 年“光線系の理論第 1 部”[6]を発表し，新しい幾何光学の方法を提唱した．これは，ハミルトン自身が特性関数と呼んでいる新たな関数を導入することにより，光学系の幾何学的な性質を研究しようとするものである．今日の幾何光学ではアイコナールと呼ばれている関数が用いられているが，特性関数はその原型となったものである．

この論文の冒頭で，ハミルトンは，光線の径路が，

$$\delta\int v ds=0, \qquad (2-1-1)$$

（v は屈折率，ds は線要素）

にしたがうことを反射・屈折の法則から証明し，この命題を「最小作用の原理」と名づけた．この名前のつけ方について，2 つほど注意をしておこう．まず,「原理」と名づけられているが，これは反射・屈折の法則から導かれたもので，彼の光学の原理ではない．また「作用」と呼ばれているが，この命題は光線の径路の長さに関するものである．今日光線の径路の長さに屈折率をかけたものは，光学的距離と呼ばれているので,「光学的距離最短の命題」と呼ぶのがハミルトンの主旨をもっとも明確に伝えた表現ということになろう．ただし，光が粒子であると仮定すれば，質量 1 の粒子の力学的な作用が最小であるように粒子の運動が規定されることを示していると解釈できるし，波動であるとみなせば，フェルマーの「最短時間の原理」と読みとることもできる．今日の光学の教科書では，式 (2-1-1) 自体を指して,「フェルマーの原理」と称しているものもある．

続いてハミルトンは，反射・屈折の法則から積分

$$I=\int v d\rho, \qquad (2-1-2)$$

を x, y, z で微分すると光線の方向余弦が与えられることを示している．この関数は偏微分方程式

$$\left(\frac{\delta I}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta I}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta I}{\delta z}\right)^2=v^2, \qquad (2-1-3)$$

[6] "Theory of Systems of Rays(Part First)," *Trans.Roy.Irish Acad.*, 15, (1828),pp.69-178 = in *Mathematical Papers*, vol.1, pp.1-87.

をみたすので，これを解いて積分 (2-1-2) が求まれば，光線系の性質を規定することができる．そこでハミルトンは積分 (2-1-2) を「特性関数」と名づけた．

"光線系の理論第２部"[7]でハミルトンは別の方法で特性関数を導入した．まず，積分 (2-1-2) の変分を計算することにより，

$$
\begin{aligned}
\delta\int \upsilon d\rho &= \int \delta(\upsilon d\rho) \\
&= \upsilon(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z) - \upsilon'(\alpha'\delta x' + \beta'\delta y' + \gamma'\delta z') \\
&\quad + \int\{(\frac{\delta\upsilon}{\delta x})d\rho - d(\upsilon\frac{dx}{d\rho})\} \\
&\quad + \int\{(\frac{\delta\upsilon}{\delta x})d\rho - d(\upsilon\frac{dx}{d\rho})\} \\
&\quad + \int\{(\frac{\delta\upsilon}{\delta x})d\rho - d(\upsilon\frac{dx}{d\rho})\}.
\end{aligned}
\qquad (2-1-4)
$$

((α,β,γ) は (x,y,z) における，(α',β',γ') は (x',y',z') における方向余弦，υ' は (x',y',z') における屈折率.)

いま，両端を固定して積分をとると「最小作用の原理」から (2-1-4) 式 $=0$，$\delta x=\delta y=\delta z=0, \delta x'=\delta y'=\delta z'=0$ となるから，

$$
\begin{cases}
\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta x}\right)d\rho = d\left(\upsilon\frac{dx}{d\rho}\right), \\
\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta y}\right)d\rho = d\left(\upsilon\frac{dy}{d\rho}\right), \\
\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta z}\right)d\rho = d\left(\upsilon\frac{dz}{d\rho}\right),
\end{cases}
\qquad (2-1-5)
$$

が得られる．これが光線の径路を与える方程式となる．(2-1-4) 式と光線の出発点が固定されているという条件より，特性関数 I の変分は，

$$\delta I = \upsilon(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z), \qquad (2-1-6)$$

となる．これから

$$\alpha = \frac{1}{\upsilon}\left(\frac{\delta I}{\delta x}\right),\quad \beta = \frac{1}{\upsilon}\left(\frac{\delta I}{\delta y}\right),\quad \gamma = \frac{1}{\upsilon}\left(\frac{\delta I}{\delta z}\right), \qquad (2-1-7)$$

となるので，方向余弦の性質より，(2-1-3) と同様の１階偏微分方程式

$$\left(\frac{\delta I}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{\delta z}\right)^2 = \upsilon^2, \qquad (2-1-8)$$

が導かれる．この方程式を解けば光学系を特徴づける特性関数 I を得ることができるのである．

ハミルトンは，"光線系の理論第１部"では反射・屈折の法則を基礎にして，「最小作用の原理」を証明し，特性関数の理論を展開してきた．ところが"第２部"では，「最小作

[7] "Theory of Systems of Rays (Part Second)," 未発表の論文であるが全集には収録されている．in *Mathematical Papers*, vol.1, pp.88-106.

用の原理」を光学の基礎原理として，特性関数の理論を構成している．この理由は，大気中の光線の屈折など，屈折率が連続的に変化するような現象を記述するためには，積分形を伴う「最小作用の原理」を用いて光線の振る舞いを規定する方が適当であったためであろう．

"第２部"で完成されたハミルトンの光学の理論はつぎのようなものであった．"「最小作用の原理」で規定される光線の幾何学的性質は，特性関数を用いて記述することができる．この特性関数は１階偏微分方程式を解くことによって得られる．"この物理学上の理論を純粋に数学的に読みかえれば，以下のようになろう．"ある極値曲線に伴う関数は１階偏微分方程式を解くことによって与えられる．この関数がわかれば，極値曲線は特定できる．"すなわち，変分学上の問題を１階偏微分方程式に帰着させようとするアイデアがここで登場しているのである．ハミルトンの"光線系の理論"の数学史上の意義はこの点にあろう．

2) 力学の特性関数

ハミルトンは 1833 年には，光学の特性関数と力学の作用積分が，数学形式上類似していることを論文[8]のなかで指摘している．この点に着目し，力学の特性関数の理論を提示したのが 1834 年の"動力学における一般的方法"[9]である．

以下では時間微分を・で表すことにする．ハミルトンはニュートンの運動方程式に力学の基礎を置き，これを積分して活力保存則 $U+T=H$ を導き出した．ここで，Uは今日のポテンシャル・エネルギーの符号を逆にしたもの，Tは運動エネルギーである．Hは積分定数である．つぎにハミルトンは力学の特性関数を

$$V=\int\sum m_i(\dot{x}_i dx_i+\dot{y}_i dy_i+\dot{z}_i dz_i)=\int_0^t 2T dt, \qquad (2-2-1)$$

と定義する．この変分は

$$\delta V=\sum m_i(\dot{x}_i\delta x_i+\dot{y}_i\delta y_i+\dot{z}_i\delta z_i)-\sum m_i(\dot{a}_i\delta a_i+\dot{b}_i\delta b_i+\dot{c}_i\delta c_i)+t\delta H, \qquad (2-2-2)$$

となる．これより連立方程式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial x_i}=m_i\dot{x}_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i}=-m_i\dot{a}_i,\\
&\frac{\partial V}{\partial y_i}=m_i\dot{y}_i, \quad \frac{\partial V}{\partial b_i}=-m_i\dot{b}_i,\\
&\frac{\partial V}{\partial z_i}=m_i\dot{z}_i, \quad \frac{\partial V}{\partial c_i}=-m_i\dot{c}_i,\\
&\quad\frac{\partial V}{\partial H}=t, \qquad (i=1,\ldots,n)
\end{aligned}\right\} \qquad (2-2-3)$$

が得られる．この方程式から，仮に特性関数 V が求まれば，任意の位置での速度が得られることがわかる．すなわち，特性関数は運動を特徴づけるものなのである．活力保存の

[8] "On a General Method of Expressing the Paths of Light , and of the Planets, by the Coefficients of Characteristic Function," *Dublin University Review*, October, (1833), pp.795-826.=in *Mathematical Papers*, vol.1,311-332.

[9] "On a General Method in Dynamics," *Phil.Trans.,Part II*,(1834), pp.247- 308=in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.103-161 .

法則を用いることにより，特性関数のみたす偏微分方程式

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m_i}\Big\{\Big(\frac{\delta V}{\delta x_i}\Big)^2+\Big(\frac{\delta V}{\delta y_i}\Big)^2+\Big(\frac{\delta V}{\delta z_i}\Big)^2\Big\}=U+H,\\ \frac{1}{2}\sum\frac{1}{m_i}\Big\{\Big(\frac{\delta V}{\delta a_i}\Big)^2+\Big(\frac{\delta V}{\delta b_i}\Big)^2+\Big(\frac{\delta V}{\delta c_i}\Big)^2\Big\}=U_0+H,\end{aligned}\right\}(2-2-4)$$

が得られる．この方程式を解けば，$x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, h$ の関数として特性関数が求められる．

ハミルトンは，この論文の最後に補助関数 Sを

$$S=V-tH=\int_0^t(T+U)dt, \qquad (2-2-5)$$

で定義した．この関数の変分は

$$\delta S=-H\delta t+\sum\Big(\dot{x}_i\delta x_i-\dot{a}_i\delta a_i+\dot{y}_i\delta y_i-\dot{b}_i\delta b_i+\dot{z}_i\delta z_i-\dot{c}_i\delta c_i\Big), \qquad (2-2-6)$$

となり，これと活力保存則を組み合わせると S のみたす偏微分方程式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta t}+\sum\frac{1}{2m_i}\Big\{\Big(\frac{\delta S}{\delta x_i}\Big)^2+\Big(\frac{\delta S}{\delta y_i}\Big)^2+\Big(\frac{\delta S}{\delta z_i}\Big)^2\Big\}=U,\\ \frac{\delta S}{\delta t}+\sum\frac{1}{2m_i}\Big\{\Big(\frac{\delta S}{\delta a_i}\Big)^2+\Big(\frac{\delta S}{\delta b_i}\Big)^2+\Big(\frac{\delta S}{\delta c_i}\Big)^2\Big\}=U_0,\end{aligned}\right\}(2-2-7)$$

が得られる．こうして補助関数についても特性関数と同様な議論が可能であることが示された．

ハミルトン自身は，力学の特性関数の提示にあたり，光学との数学形式の重要性を強調してきた[10]．確かに1階偏微分方程式を解いてある関数を求め，その関数の微分から光学系ないし力学系の特徴をつかもうとする意図は光学・力学ともに同じものである．しかし，変分法と1階偏微分方程式の関係を把握しようとの視点から見れば，両者は大きく隔たっている．光学において，彼が問題にしていたのは，変分原理にしたがう光線の径路であり，その性質を求めるため特性関数が導入されたのだった．これに対して力学では，「変分原理にしたがう質点の軌道」という理解はない．彼が問題にしているのは，あくまでも運動方程式に基づく質点の運動なのである．ハミルトンの 1834 年論文では，ハミルトン・ヤコビの方法の基本的な発想は消えてしまったのだった．

3) 正準形式の導入

1835 年，ハミルトンは“動力学における一般的方法第2論文”[11]を出版し，彼の力学の定式化についての議論を続ける．まず彼は，ニュートン方程式から，いわゆるラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta T}{\delta \dot{\eta}_i}-\frac{\delta T}{\delta \eta_i}=\frac{\delta U}{\delta \eta_i}, \qquad (2-3-1)$$

---

[10] “On the Application to Dynamics of a General Mathematical Methods Previously Applied to Optics,” British Association Report, (1834),pp.513- 518. in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.212- 216.

[11] “Second Essey on a General Method in Dynamics ,” *Phil. Trans. Part I*,(1835),pp.95-144 in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.162 -211.

($\eta_1, \ldots, \eta_{3n}$ は一般座標系.)

を導く. ここでは $T = T(\eta_1, \ldots, \eta_{3n}, \dot\eta_1, \ldots, \dot\eta_{3n})$ と扱われている. つぎにハミルトンは $\dfrac{\delta T}{\delta \dot\eta}$ をひとつの座標系として扱おうとした. 彼の意図は明確に述べられていないが, 何らかの方法で, 運動方程式を1階常微分方程式系に帰着しようとしたためと考えられる. 運動エネルギーを表す T は変数 $\dot\eta_1 \ldots, \dot\eta_{3n}$ 2次の斉次関数なので

$$2T = \sum \dot\eta_i \frac{\delta T}{\delta \dot\eta_i}, \tag{2-3-2}$$

が成り立っている. 一方で関数 T の変分を計算すると

$$\delta T = \sum \left(\frac{\delta T}{\delta \dot\eta_i} \delta \dot\eta_i + \frac{\delta T}{\delta \eta_i} \delta \eta_i \right), \tag{2-3-3}$$

となる. (2-3-2) より求めた $\delta(2T)$ から (2-3-3) での δT を引くことにより

$$\delta T = \sum \left(\dot\eta_i \delta \frac{\delta T}{\delta \dot\eta_i} - \frac{\delta T}{\delta \eta_i} \delta \eta_i \right), \tag{2-3-4}$$

が得られる. ハミルトンは $\dfrac{\delta T}{\delta \dot\eta_i} = \varpi_i$ とおき, これを新たな独立変数とした. そして, 新しい座標系 (η_i, ϖ_i) での運動エネルギーを関数 F を用いて, すなわち

$$T(\eta_1, \ldots, \eta_{3n}, \dot\eta_1, \ldots, \dot\eta_{3n}) = F(\varpi_1, \ldots, \varpi_{3n}, \eta_1, \ldots, \eta_{3n}), \tag{2-3-5}$$

で表した. すると方程式 (2-3-4) は

$$\delta F = \sum \left(\dot\eta_i \delta \varpi_i - \frac{\delta T}{\delta \eta_i} \delta \eta_i \right), \tag{2-3-6}$$

となる. 一方で F の変分は

$$\delta F = \sum \left(\frac{\delta F}{\delta \varpi_i} \delta \varpi_i + \frac{\delta F}{\delta \eta_i} \delta \eta_i \right), \tag{2-3-7}$$

となるから, これと (2-3-6) 式を比較し, ポテンシャル・エネルギーが ϖ_i には依らないことに注意すると,

$$\frac{\delta (F-U)}{\delta \varpi_1} = \frac{\delta F}{\delta \varpi_1} = \dot\eta_1, \ldots, \frac{\delta (F-U)}{\delta \varpi_{3n}} = \frac{\delta F}{\delta \varpi_{3n}} = \dot\eta_{3n}, \tag{2-3-8}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \eta_1} = -\frac{\delta T}{\delta \eta_1}, \ldots, \frac{\delta F}{\delta \eta_{3n}} = -\frac{\delta T}{\delta \eta_{3n}}, \tag{2-3-9}$$

が得られる. これらの記号を用いてラグランジュ方程式は,

$$\frac{d\varpi_i}{dt} = \frac{\delta (U-F)}{\delta \eta_i}, \tag{2-3-10}$$

とかくことができる．ハミルトンは

$$H = F - U = F(\varpi_1, \varpi_2, \dots \varpi_{3n}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{3n}) - U(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{3n}), \qquad (2-3-11)$$

として関数 H を導入した．これより運動方程式に相当する2n 個の連立方程式系

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{d\eta_1}{dt} = \dfrac{\delta H}{\delta\varpi_1}; & \dfrac{d\varpi_1}{dt} = -\dfrac{\delta H}{\delta\eta_1}; \\ \dfrac{d\eta_2}{dt} = \dfrac{\delta H}{\delta\varpi_2}; & \dfrac{d\varpi_2}{dt} = -\dfrac{\delta H}{\delta\eta_2}; \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d\eta_{3n}}{dt} = \dfrac{\delta H}{\delta\varpi_{3n}}; & \dfrac{d\varpi_{3n}}{dt} = -\dfrac{\delta H}{\delta\eta_{3n}}; \end{array}\right\} \qquad (2-3-12)$$

が得られた．これが，今日正準方程式と呼ばれているものの原型である．

ここでハミルトンは，積分

$$S = \int_0^t \left(\sum \varpi_i \frac{\delta H}{\delta\varpi_i} - H\right) dt, \qquad (2-3-13)$$

を導入する．彼自身は明確に述べてはいないが，$\sum \varpi_i \dfrac{\delta H}{\delta\varpi_i} - H = 2T - (T - U) = T + U$ という関係があることから，これは補助関数を正準座標系で書き換えたものだと察することができるだろう．彼は，積分 (2-3-13) が，運動方程式 (2-3-12) の積分を与えることを証明していく．

$$\delta S = \int_0^t \delta S' dt, \qquad (2-3-14)$$

とおくと

$$S' = \sum \varpi_i \frac{\delta H}{\delta\varpi_i} - H, \qquad (2-3-15)$$

となる．これより

$$\begin{aligned} \delta S' &= \sum\left(\frac{\delta H}{\delta\varpi_i}\delta\varpi_i + \varpi_i \delta\frac{\delta H}{\delta\varpi_i}\right) - \sum\left(\frac{\delta H}{\delta\varpi_i}\delta\varpi_i + \frac{\delta H}{\delta\eta_i}\delta\eta_i\right) = \sum\left(\varpi_i\delta\frac{\delta H}{\delta\varpi_i} - \frac{\delta H}{\delta\eta_i}\delta\eta_i\right) \\ &= \sum\left(\varpi_i\delta\frac{d\eta_i}{dt} + \frac{d\varpi_i}{dt}\delta\eta_i\right) = \frac{d}{dt}\sum \varpi_i\delta\eta_i, \end{aligned} \qquad (2-3-16)$$

が成り立っているから

$$\delta S = \sum (\varpi_i\delta\eta_i - p\delta e), \qquad (2-3-17)$$

（(p_i, e_i) は $(\varpi_i,\ \eta_i)$ の初期値）

となる．この両辺を比較することにより，ハミルトンは別の連立方程式系

$$\left.\begin{array}{ll} \varpi_1 = \dfrac{\delta S}{\delta\eta_i}; & p_1 = -\dfrac{\delta S}{\delta e_1}; \\ \varpi_2 = \dfrac{\delta S}{\delta\eta_2}; & p_2 = -\dfrac{\delta S}{\delta e_2}; \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varpi_{3n} = \dfrac{\delta S}{\delta\eta_{3n}}; & p_{3n} = -\dfrac{\delta S}{\delta e_{3n}}; \end{array}\right\} \qquad (2-3-18)$$

を得た．この方程式により，ϖ_i は η_i の関数として定められるのだから，これらは方程式(2-3-12)の積分を与えていることになろう．ここでハミルトンは S を主関数と名づけかえた．

ハミルトンは，Sのみたす1階偏微分方程式を以下のような手順で求めた．S を時間 t で全微分すると，

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\delta S}{\delta t}+\sum\frac{\delta S}{\delta\eta}\frac{d\eta}{dt}, \tag{2-3-19}$$

となるから

$$\frac{\delta S}{\delta t}=S'-\sum\varpi\frac{\delta H}{\delta\varpi}=-H, \tag{2-3-20}$$

が得られる．これより

$$\frac{\delta S}{\delta t}+H=0, \tag{2-3-21}$$

となる．ここで$-H=-(F-U)$ は定数だから，彼は偏微分方程式系

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\delta S}{\delta t}+F\left(\frac{\delta S}{\delta\eta_1},\frac{\delta S}{\delta\eta_2},\cdots,\frac{\delta S}{\delta\eta_{3n}},\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_{3n}\right)=U\left(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_{3n}\right),\\&\frac{\delta S}{\delta t}+F\left(\frac{\delta S}{\delta e_1},\frac{\delta S}{\delta e_2},\cdots\frac{\delta S}{\delta e_{3n}},e_1,e_2,\cdots e_{3n}\right)=U\left(e_1,e_2,\cdots e_{3n}\right),\end{aligned}\right\} \tag{2-3-22}$$

を得た．

この過程を見ても，ハミルトンは，自分の力学の理論を変分原理に基づいて作ろうとはしていないことがわかるだろう．しかしこの論文で，彼は変分原理と主関数の関係について，つぎのようなことを指摘している：S には2つの意味がある．両端を固定して変分をとれば，ラグランジュの運動方程式を与え，両端を開放して変分をとれば運動方程式の解を与える，と．[12]

この注意は，変分原理を軸として力学の理論を構成するためのひとつの可能性を示唆している．すなわち，運動の軌跡は変分原理によって規定され，その方程式の解は，1階偏微分方程式を解くことによって与えられると読みかえることができるのである．ハミルトン－ヤコビ形式の基本的なアイデアが再び登場してきたということができるだろう．

3．力学形式から変分法へ

1) ハミルトンの成果のヤコビによる再構成

ヤコビがハミルトンの力学の論文を読んだのは1836年後半と思われるが，その年末には，論文"変分法と微分方程式の理論について"を発表し（出版は1837年）等周問

[12] δSを計算すると，

$$\delta S=\left[\sum\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}_i}\delta\eta_i\right)\right]_0^t-\int_0^t\left[\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}_i}-\frac{\partial T}{\partial\eta_i}-\frac{\partial U}{\partial\dot{\eta}_i}\right)\delta\eta_i\right]dt,$$

となることより得られる．

題[13] の解も力学と同様な１階偏微分方程式に帰着されることを述べている．この手順が実際に示されたのは,『力学講義』[14]第 19 講である．これを検討する前に，ヤコビの力学上の成果について２つほど言及しておこう．

１つは，ヤコビがハミルトンの主関数をポテンシャルエネルギーが時間を陽に含む関数となっている場合にまで拡張していることである．この成果は上述の論文とは別の，やはり 1837 年に出版された論文“連立常微分方程式を偏微分方程式に帰着させる方法について”[15]で詳しく述べられている．

もう１つは，ハミルトンの注意を生かし，変分原理を基礎に据えて力学理論を構成していることである．すなわち，今日ハミルトンの原理と呼ばれる変分原理

$$\delta S = \delta \int_0^t (T+U)dt = 0, \qquad (3-1-1)$$

（ここで関数 U は時間を陽に含む）

から出発して，ニュートン方程式およびラグランジュ方程式を導いている．さらにラグランジュ方程式から，正準方程式を導き出している．この手続きは,『力学講義』第８・９講で示されている．ヤコビの力学ではこれを基礎原理として主関数の理論をはじめとする考察がなされているのである．

では等周問題が扱われている第 19 講について検討していこう．以下では $i = 1, \ldots, n$ とする．ヤコビはまず，力学の理論整備から始めている．彼は積分，これはハミルトンの主関数を表しているのだが,

$$V = \int_0^t (T+U)dt, \qquad (3-1-2)$$

を考察する上で，$\varphi = T + U$ とおく．関数 V の変分をとると

$$\delta V = \delta \int \varphi dt = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - \sum \frac{\partial \varphi^0}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i^0$$

$$+ \int \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i dt, \qquad (3-1-3)$$

となる．質点の運動はラグランジュ方程式にしたがうから,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0. \qquad (3-1-4)$$

---

13 今日等周問題といえば，何らかの境界条件のついた変分問題と理解されている．しかし，18 世紀においては，等周問題という言葉で，変分問題一般を指すことはすでに指摘されている．C.Fraser, "Isoperimetric Problems in the Variational Calculus of Euler and Lagrange," *Historia Mathematica*, 19, (1992),pp.4-23. ヤコビも等周問題という言葉を使っていながら，境界条件を付していない．

14 *Vorlesungen über Dynamik*, (1866), Berlin, Clebsch ed. reprinted by Chelsea in 1969.

15 "Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewohnlicher Differentialgleichungen," *Jl. fur die reine u. angew Math.*,17, (1837), pp.97-162.=in *Werke* 4, pp.57-127.

ここでヤコビは，第 9 講で正準座標系を導入した手続きにしたがって，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_i}=p_i$ とおき，

$$\delta V=\sum\left(p_i\delta q_i-p_i^0\delta q_i^0\right), \tag{3-1-5}$$

を得た．t を一定にしたまま，V の変分をとると，

$$\delta V=\sum\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial V}{\partial q_i^0}\delta q_i^0\right). \tag{3-1-6}$$

(3-1-5) 式と (3-1-6) 式を比較することにより，2n 個の方程式

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0}=-p_i^0, \tag{3-1-7}$$

が得られる．これより，V が正準方程式の解を与えることが示された．

V を t で微分すると，

$$\varphi=\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}, \tag{3-1-8}$$

となる．ここで $\psi(p_i,q_i,t)=\Sigma p_i\dot{q}_i-\varphi(q_i,\dot{q}_i,t)$ とおくことにより，1 階偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\psi(t,q_1\ldots,q_n,\frac{\partial V}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial q_n})=0, \tag{3-1-9}$$

が得られる．この方程式を解くことにより，主関数が得られるのである．さらにヤコビは

$$\psi=\sum p_i\dot{q}_i-\varphi=2T-(T+U)=T-U=H, \tag{3-1-10}$$

とすることにより，(3-1-9) 式を

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H=0, \tag{3-1-11}$$

と書き換えた．今日の力学の教科書では，この $H(p_i,q_i,t)$ をハミルトニアンと呼んでいる．

ハミルトンが正準座標系を導入したときは，関数 T は運動エネルギーを表しており，2 次の斉次関数であるという条件のもとで議論が進められていた．ヤコビも第 9 講ではこの条件を仮定していた．しかし第 19 講ではこの条件を仮定せず，任意の関数 T に対して $p_i=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}$ として正準座標系を導入している．

このように『力学講義』では，第 8·9 講で得られた運動方程式に基づいて，第 19 講で主関数の理論が提示されている．この理論展開は，ハミルトンの注意を生かしたものと判断してよいだろう．今日の教科書に見られる力学のハミルトン・ヤコビ形式…変分原理から質点の運動方程式を求め，その方程式の解は 1 階偏微分方程式を解くことによって得られる…はここで確立したものということができよう．

力学の定式化を終えた後，ヤコビは，これと同様な数学的な手続きをとることにより，等周問題の新しい定式化ができることを論じた．そこでは $T+U$ は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和，ととらえるのではなく，純粋に数学的な，$t,q_i,\dot{q}_i$ の関数とし，$\varphi=T+U$ と表す．そして

$$\int_\tau^t\varphi(q(t),\dot{q}(t),t)dt, \tag{3-1-12}$$

の極値曲線を与えるような関数 $q=q(t)$ を求めることを1階偏微分方程式を解くことに帰着させようとするのである．

ヤコビは新しい関数$\psi=\sum p_i\dot{q}_i-\varphi$, を導入して，その2種類の変分を計算する．

$$\delta\psi=\sum\dot{q}_i\delta p_i+\sum p_i\delta\dot{q}_i-\delta\varphi=\sum\dot{q}_i\delta p_i-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta t, \tag{3-1-13}$$

$$\delta\psi=\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\delta p_i+\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\delta t. \tag{3-1-14}$$

この両者を比較することにより，

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_i}=\dot{q}_i, \tag{3-1-15}$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial q_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_i}=\dot{p}_i. \tag{3-1-16}$$

一方で

$$\delta\int_\tau^t\varphi(q(t),\dot{q}(t),t)dt=0, \tag{3-1-17}$$

の必要条件として，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_i}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}, \tag{3-1-18}$$

が導かれる．これは

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_i}, \tag{3-1-19}$$

とかくこともできる．(3-1-16) 式と (3-1-19) 式より，極値曲線を与える方程式は正準方程式に帰着されることを示すことができた．

ヤコビの理論では，力学と同じ形式が等周問題にも適用できる．ヤコビがポテンシャル関数を時間 t を陽に含む場合にまで拡張したこと，T が2次の斉次関数であるとする力学的な仮定を落とした上で，正準座標系を導入して力学形式を整備したことが，これを可能にした要因であろう．

2) 正準座標系の意義

力学であれ，変分法であれ，微分方程式論であれ，ハミルトン・ヤコビの方法には，必ず正準座標系が伴う．この座標系の意義について，力学と変分法でのヤコビの手続きを比較することにより考察していこう．

(3-1-2) 式で定義される主関数のみたす偏微分方程式を導く過程に注目してみよう．ヤコビは1837年論文“連立常微分方程式を偏微分方程式に帰着させる方法について”において以下のような手続きを示している．まず，一般座標系…これはデカルト座標系に容易に読みかえることができる…では S を微分することにより

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right), \tag{3-2-1}$$

が得られる．ここから偏微分方程式を導くためには，$\frac{dq_i}{dt}$ を何らかの偏微分係数におきかえなければならない．古典力学の問題に対しては，ポテンシャル関数 U が q_i と t に依存し，運動エネルギーを表す関数 T が$\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n$ の２次の斉次関数との仮定があったから，

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = m_i \frac{dq_i}{dt}, \qquad (3-2-2)$$

という関係が成り立っており，ここから，関数 V がみたす偏微分方程式を得ることができる．ところが，等周問題では，関数 $T+U$ が$\varphi = \varphi(q_i, \dot{q}_i, t)$ と置き換えられているため，この方法で偏微分方程式を導き出すことはできない．すなわち，デカルト座標系や一般座標系では，主関数の偏微分方程式を求める時点でハミルトン・ヤコビの方法は破綻してしまうのである．

この場合に，正準座標系，より正確にいえばヤコビが『力学講義』第 19 講で用いたそれは有効な道具となる．そこでは，力学的な条件を付すことなく，任意の関数に対して $p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_i}$ の関係があるから，$\dot{q}_i$ を p_i の関数として表すことが出来たし，$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$ も成り立っている．１つめの性質にしたがうことにより，$H = \Sigma p_i \dot{q}_i - \varphi(q_i \dot{q}_i, t)$ と定義され，$(p_i, q_i, \dot{q}_i, t)$ の関数であるはずの H を (p_i, q_i, t) の関数として得ることができた．この関係式と２番目の性質を用いれば，(3-2-1) から$\sum \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}$を消去することができる．また，２番目の性質から H は $q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}, t$ の関数となる．このようにして，力学的な条件のない問題について定義された主関数に対しても，偏微分方程式を導入することが可能になる．

ヤコビが扱った問題においては，正準座標系は，力学を離れた純粋に数学的な問題を扱う際に，威力を発揮するものであった．おそらく，ヤコビは，力学と同じように等周問題を定式化しようとする過程でこのことに気づいたことであろう．

4. おわりに

これまでの議論を通じて，ハミルトンとヤコビが，彼らの名を関する方法を確立する際に，実際どういう役割を果たしたかを明らかにすることができた．ハミルトンは，光学と力学の問題を体系的に扱おうとする際，いくつかの数学的な道具を開発した．それはあくまで物理的な問題を解決するために用いられたものだった．ヤコビは，それらの道具の数学的な面での価値を理解し，それらを生かして，ハミルトンのアイデアを整理した．その際，ハミルトンが仮定していた物理学的な制限をヤコビがはずしていく様子が見い出された．

ヤコビのこの手続きを，私は，“数学化”という言葉で表現したいと思う．19 世紀はじめの物理学・数学や歴史を扱う際，科学史家はしばしば“物理学の数学化”という表現を用いる．この言葉は，状況に応じてさまざまな意味あいで使われているが，ここでいう“数学化”とは，自然現象を記述する方程式や関数から物理的な仮定を取り去る過程である．

最後に変分問題を１階偏微分方程式に帰着することのメリットについて述べておきたい．ヤコビは力学の問題について…数学的には，主関数 S が変数 t を陽に含まない場合で，変分問題にはもちろん適用できない…は，直接運動方程式を解くより，１階偏微分方