ポントリャーギン双対定理の生れるまで
位相幾何から位相群へ

杉浦光夫（津田塾大）

§0 まえがき

本稿は、ポントリャーギン双対定理が、いかにして生れたかを主題とする。

ポントリャーギン双対定理と呼ばれている局所コンパクト・アーベル群の双対定理は、ポントリャーギンの著書[32]「連續群」（初版1938）の英訳 Topological groups (Princeton Univ. Press, 1939) によって普及した。しかしポントリャーギンの最初に発表した論文[16]「可換位相群の理論」（Ann. Math. 35 (1934)）では、双対定理としてはコンパクト・アーベル群と離散アーベル群の双対定理が証明されているだけであり、（第二可算公理をみたす）任意の局所コンパクト・アーベル群の双対定理は、この[16]を見たファン・カムペン(26)(1935)が初めて証明したのである。

一方[16]では第二可算公理をみたす任意の連結局所コンパクト群Gがコンパクト群とベクトル群 $\mathbb{R}^n$ の直和となるという構造定理（第二基本定理）と、さらにGが局所連結のときには、

Gが高々可算個の1次元トーラス群とベクトル群R^nの直和になるという定理（第三基本定理）をも証明している。このように連結性の条件はつくものの、ポントリャーギンは、コンパクトでも離散でもない局所コンパクト・アーベル群も考察の対象としているのである。

そこで本稿では、主として次の三つの問に答えることを目標とする。

I. ポントリャーギンは、なぜコンパクト・アーベル群と離散アーベル群の双対定理を考えたのか。

II. ポントリャーギンは、[16]においてなぜ一般の局所コンパクト・アーベル群一般の双対定理を考えなかったのか。

III. ポントリャーギンは、[16]においてなぜ、連結性・局所連結性をみたす局所コンパクト・アーベル群についてだけ構造定理（第二、第三基本定理）を考えたのか。

筆者は、1988年5月ポントリャーギンが死去したとき、彼の仕事を通観した(25)。そのとき、上記の問題IIIを考えたが、不十分な解答に終っていた。今度改めて、ポントリャーギンの初期論文に目を通して、双対定理の由来を考え、位相幾何におけるアレグザンダー双対定理の精密化と一般化が、当時のポントリャーギンの関心の中心の一つであり、これとの関連において、問題I.IIの解答を考えるべきことがわかった。

本稿はその報告である。

問題Ⅲは、Ⅰ,Ⅱとは由来が異なり、コルモゴロフが提出した問題「連結局所コンパクト位相体は、$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ のいずれかに同型であるか」を、ポントリャーギンが肯定的解決した論文[10]に起源がある。そのことにも触れることにした。

さて現代数学には、双対定理と呼ばれるものがいくつも存在するが、それらの起源を遡れば、平面射影幾何学における双対定理に辿りつく。そこでシンポジウムでは、射影幾何のブリアンションの定理とパスカルの定理の双対性から話を始めたが、本稿では冗長になるのを恐れ、位相幾何学におけるポアンカレの双対定理(16)とアレクサンダーの双対定理(1)から話を始め、直ちにポントリャーギンの仕事に移ることとした。

本稿では生かせなかったが、ブリアンションの原論文の捜索に大変お世話になった平井武氏に御礼を申し上げる。

また原稿を通読して、位相幾何学に関し、適切な助言をして下さった中村得之氏に感謝する。

§1, §2の位相幾何学の歴史に関しては、デュドンネ(9), ボーリンガー(5), 静間(24)を参考にした。これらの著者に感謝する。

以下ポントリャーギンの論文については、その論文集(20)才1巻の論文リストの番号を[3]のように示し、その他の文献

という。」（全集 92－93ページ）

見られるようにホモロジー的な考えが基礎になっている。リーマンは、この「連結度」という概念を活用した。それは現在ならば、1次元ベッティ数を用いる所である。リーマンはこの連結度を高次元多様体に拡張する試みを始めていることは、遺稿中の「位置解析に関する断章」（23）（年代不詳）によって知られる。しかしリーマンは、この仕事を完成することなく、40才で死去した。ただイタリアに転地中に親しくなったベッティの仕事（4）の中に、リーマンの影響が見られる。

さてポアンカレは「位置解析」（16）（1895）の序文で、次のような趣旨のことを述べている。それまでに彼が研究して来た微分方程式の定性的理論，三体問題，二変数の多価函数，摂動函数の展開への多重積分の応用，連続群に含まれる離散群の研究等々において，自然に位置解析の問題が現われ，位置解析の研究の必要性と有用性を感じた。

ポアンカレが「位置解析」の対象としているのは，C^1級の微分可能多様体または解析的多様体である。その定義として，ポアンカレは最初数空間$\mathbb{R}^N$においていくつかのC^1級函数による等式と不等式によって与えられ，ヤコービ行列の階数が一定という条件をみたすものを考えた。不等式が入っているのは、変数の範囲を限定するためで，例えば開部分多様体を

については、本稿末尾の文献表の番号を(4)のように示した。なおポントリャーギンの1940年までの論文のリストも本稿末尾に入れておいた。

§1. ポアンカレの双対定理

位相幾何学は、ポアンカレによって始めて数学の一分野として独立した。ポアンカレの方法で、特に重要なのは、ホモロジー概念と胞体分割の二つであり、その成果としては、双対定理が目立つ。たゞこゝでは、ホモロジー概念の先駆者として、リーマンを挙げておく。リーマンは、学位論文「一複素変数函数の一般理論の基礎」(21)(1851)および「アーベル函数の理論」(22)(1857)において、曲面の「連結度」という概念を導入し、それが閉リーマン面上の函数論において、基本的な役割を演ずることを示した。後の(22)から引用すれば、彼の連結度の定義は次のようなものであった。「曲面F上に、n個の閉曲線 $a_1, a_2, \cdots a_n$ であって、どの a_i も、またその全体もFの一部分の境界の全体とならないものが存在するとする。そして別のもう一個の閉曲線をそれらに追加すると、このn+1個の閉曲線がFのある部分の境界の全体となるとき、この曲面Fは(n+1)重連結である

定義したり，連結成分を指定したりするために必要である。続いてポアンカレは，第二のより広い定義を与える。それはワイヤストラスの解析形成体の拡張であって，解析函数による局所座標系の組であって，定義域に共通部分がある場合には，一方は他方の解析接続になっているようなもので定義される。またポアンカレは，二つの局所座標系の間の座標変換のヤコービ行列式が常に正となるように局所座標系がとれるとき，その多様体は「向きづけ可能」（bilatère という言葉を使っている）と定義する。

次いで基本的なホモロジーの定義を与える。それはリーマンやベッティの考えを受け継いだものである。ポアンカレは当初部分多様体によって実現されるホモロジーだけを考えて居り次のように定義する。

「p 次元多様体 V を考える。W を V の q 次元部分多様体とする。W の境界が λ 個の $q-1$ 次元連結部分多様体 $v_1, v_2, \cdots, v_\lambda$ から成るとき，この関係を

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0$$

と記す。」そしてこのような関係をホモロジーと呼ぶ。

ここまでは，リーマンの連結度とさして変らないが，ポアンカレはこゝに重要な一歩を踏み出す。すなわち彼は

「ホモロジーは，普通の等式と同じように，結合することがで

きる。」 と述べる。結合するとは、互いに加えたり、引算をしたりすることができるということである。 こうすると自然に $k_1 v_1 + k_2 v_2 \backsim k_3 v_3 + k_4 v_4$ (k_i は整数、v_i は $g-1$ 次元部分多様体のような表現が生ずる。ポアンカレは、このような表現の意味を次のように説明する。

「$k_1 v_1 + k_2 v_2 \backsim k_3 v_3 + k_4 v_4$ は、v_1 と殆んど同じ (peu différent) k_1 個の多様体と v_2 と殆んど同じ k_2 個の多様体と v_3 と殆んど同じで向きの反対な k_3 個の多様体および v_4 と殆んど同じで向きが反対な k_4 個の多様体が境界を作る g 次元多様体 W が存在することを意味する。」

この説明は苦しい。「殆んど同じ」という言葉には何の説明もなく数学的内容は確定していない。またホモロジーの定義の所には明記されていないが、後の実例の所で $\sum k_i v_i \sim 0$ という関係と、0でない整数 c をかけた $\sum c k_j v_j \sim 0$ は同値であるとされている。これによると $k_i v_i \sim 0$ と $v_i \sim 0$ は同値になり、結局分母を払って整数係数にした有理数係数のホモロジーを考えていることになる。そこで「位置解析」には「ねじれ係数」は登場しない。ポアンカレが整係数のホモロジーと有理係数のホモロジーの差に気がつき、「ねじれ係数」を、行列の単因子として導入するのは「補遺2」においてである。そしてポアンカレは、ベッティ数を次のように定義する。

「Vの中の同じ次元の多様体 $v_1, v_2, \cdots v_\lambda$ が一次独立とは，それらの間に整数を係数とするホモロジーが存在しないことをいう。Vの中に $P_m - 1$ 個の一次独立なm次元閉多様体（サイクル）は存在するが，それ以上一次独立のものが存在しないとき，Vのm次元連結数は P_m であるという。従ってVがm次元多様体であるとき，$m-1$ 個の数 $P_1, P_2, \cdots P_{m-1}$ が定義され，それぞれ $1, 2, \cdots, m-1$ 次元多様体に関するVの連結数である。今後これらの数をVのベッティ数と呼ぶ。」

従って現在の定義でのVのm次元ベッティ数 p_m はポアンカレの $P_m - 1$ に等しい。現在のような定義の始まりはレフシェッツの本「トポロジー」（13）あたりが最初のようである。

次にポアンカレは，彼のホモロジー論の最も重要な結果である双対定理を次のように述べる。

ポアンカレ双対定理

「（向きのある）閉多様体Vにおいて，両端から等しい次元のベッティ数は，互に等しい。」

Vがn次元であるとすれば，双対定理は

$$P_{n-r} = P_r$$

と表わされる。

ポアンカレは、これを証明するために n 次元多様体の中にある ν 次元と $n-\nu$ 次元の二つの向きのついた部分多様体 V_1, V_2 が一般の位置にあるとき、V_1 と V_2 の間のクロネッカーの交点数 $N(V_1, V_2)$ について次の命題が成立つと主張した。

多様体 U の切断 V とは、U に含まれる多様体で、閉多様体であるか、V の境界があるときは、それは U の境界に含まれるものをいう。

命題「k 次元多様体 U において V_i を $k-1$ 次元閉部分多様体とするとき、切断 V を適当に選んで、等式

$$\sum_i k_i N(V, V_i) = 0$$

が成立しないようにできるための必要十分条件は、ホモロジー

$$\sum_i k_i V_i \sim 0$$

が成立たないことである。ここで切断 V は1次元である。以上の関係は、V が p 次元、V_i が $k-p$ 次元のときも成立つ。」
この命題から、ポアンカレは、次のようにして双対定理を導いた。

U を k 次元閉多様体とする。このとき U の切断もすべて閉多様体である。いま U の1次独立な p 次元切断

$$C_1, C_2, \cdots, C_\lambda. \quad (\lambda = P_p - 1)$$

をとる。U 内の μ 個の $k-p$ 次元閉多様体

$$V_1, V_2, \cdots, V_\mu$$

に対して，この V_i 達の間にホモロジー

(1) $$\sum_i k_i V_i \sim 0$$

が成立つための必要十分条件は，上の命題により

(2) $$\sum_i k_i N(C_1, V_i) = \cdots = \sum_i k_i N(C_\lambda, V_i) = 0$$

で与えられる。(2)は μ 個の未知数 $k_1, \cdots, k_\mu$ に関する1次独立な λ 個の同次1次方程式を連立させたものである。従って $\mu > \lambda$ のときには (2)は，すべては0でない解 $(k_1, \cdots, k_\mu)$ を持つ。従って $V_1, \cdots, V_\mu$ が独立で自明でない (1) のような関係が存在しないとすれば

(3) $$\mu \leqq \lambda$$

でなければならない。これは V の $n-p$ 次元ベッティ数 P_{n-p} と p 次元ベッティ数 P_p の間に，次の関係が成立つことを意味する。

(4) $$P_{n-p} \leqq P_p$$

そこで，p と $n-p$ を入れ換えて論ずれば，

(5) $$P_p \leqq P_{n-p}$$

も成立つから，双対定理 $P_{n-p} = P_p$ の成立つことが示されたとポアンカレはいう。

さて，1898年の学位論文「代数曲面の連結性に関する位相理論の基礎研究」(11) において，ヘーゴール (P. Heegaard (1871—1948)) は，ポアンカレの「位置解析」についての批判を行った。特に双対定理については，ポアンカレの証明を批判しただけ

ではなく，3次元閉多様体で，$P_1=2$，$P_2=1$ となる例があるとして，定理の結論自身が成立たないと主張した。これに対し，ポアンカレは，「ベッティ数について」というノート(19)(1899)において，ヘーゴールの批判に反論した。

「これらの批判は根拠のないものではない。この定理(双対定理)はベッティの定義したベッティ数に対しては成立たない。それはヘーゴールの例によってわかる。(中略) しかし私の定義したベッティ数に対しては正しいのである。」とポアンカレは言う。こゝでポアンカレは「位置解析」で述べた「彼のベッティ数が，リーマンの連結度に等しい」という命題の誤りであることを認めたわけである。ポアンカレは，ヘーゴールの批判を機会に，彼の「位置解析」全体を見直して，その五つの「補遺」を書いた。特にその最初のものでポアンカレは彼のホモロジー論を始めからやり直し，ホモロジーが部分多様体で実現されるという見方を捨てて，多様体の胞体分割に基礎を置くホモロジー論を展開した。こうしてポアンカレは組合せ位相幾何学をも創始したのである。これについては，微分可能多様体は胞体分割可能かという問題と，ベッティ数は胞体分割のとり方に依存せず，多様体の位相不変量であるかという二つの基本的問題が生じ，その解決は後人に待つことになった。

ポアンカレは，この胞体分割から導かれるベッティ数を「位

置解析」で定義したものと区別するために「簡約ベッティ数」(nomber de Betti réduit)と呼んでいる。そしてそれが「位置解析」のベッティ数と一致することを示すことを試みているが、証明は不完全であった。以下この節でベッティ数というときは、簡約ベッティ数を意味する。「補遺1,2」(17,18)において、ポアンカレはホモロジー論を一歩進めた。すなわち結合行列に基本変形を施して標準形にすることにより、ベッティ数を求める方法を提示したのである。これは結局有限生成アーベル群の構造定理を単因子論を用いて求めていることになる。ポアンカレは、ホモロジー群の概念を明確には導入していないが、この辺は極めて代数的である。ただし今日の言葉で言えば剰余群 Z_p/B_p の構造を Z_p の B_p に対する関係から求めているわけで若干複雑である。またここで当然であるが「ねじれ係数」が登場する。

ポアンカレは、この新しいベッティ数の計算法を用いて、双対定理の証明を与えることができた。それは多様体 V の胞体分割 T に対して、重心細分を用いて、双対複体 T^* を作ると T と T^* の結合行列が互に他の転置行列になることに基づく。この方法でポアンカレは、ねじれ係数についても双対定理が成立つことを発見した。こうしてヘーゴールの批判をきっかけとして、ポアンカレは彼のトポロジー研究を一段と深化させたのであった。 ベ

§2　アレグザンダーの双対定理

アレグザンダー（J.W. Alexander）の双対定理は、ジョルダンの曲線定理をn次元に拡張したジョルダン・ブラウアー（Jordan-Brouwer）の定理がそのルーツである。この一般化は、ルベーグ（12）によって始めて取上げられたが、彼は短いC.Rノート以外は、これについて発表しなかった。

ブラウアーはホモロジーの概念は用いなかったが、単体近似，写像度のような重要な方法を導入し、同相写像による$\mathbb{R}^n$の次元および領域の不変性定理，不動点定理，ジョルダン・ブラウアーの定理などを1911年前後の短期間に集中的に証明した。

ジョルダン・ブラウアーの定理　「n次元球面S^n（または$\mathbb{R}^n$）内の部分集合Jが$n-1$次元球面S^{n-1}と同相であるとき，次のことが成立つ：Jの補集合S^n-J（$\mathbb{R}^n-J$）は，J度二つの連結成分を持ち、Jは二つの成分の共通の境界である。」

・ブラウアーは、この定理に二つの証明を与えているが，いずれも複雑で難解であった(7,8)。これに対して，アレグザンダーはホモロジー論と双対定理の立場から、この定理を見直し明快な証明を与えた。彼はn次元球面S^nに埋め込まれたi次元球面C^iとその補集合S^n-C^iの mod 2 でのホモロジーを考え

た。mod 2 のホモロジーは既に 1913年のヴェブレン(O. Veblen)とアレグザンダーの論文(2)で導入されていた。また $S^n - C^i$ はコンパクト集合ではなく，従って有限個の胞体の合併とはならないが，アレグザンダーは，S^n のいくらでも細かい胞体分割Tを考え，Tの k-chain の内 $S^n - C^i$ に含まれるものを考えることによって，$S^n - C^i$ のホモロジーを考えた。このときはもはや有限生成加群ではなくなるので，ベッティ数もアプリオリには有限とは言えないが，実際には双対定理によって $S^n - C^i$ の k 次元 mod 2 ベッティ数(アレグザンダーは連結度と呼んでいる)は有限となる。ただしアレグザンダーの定義による k 次元連結度 R^k に対し，$R^k - 1$ が今日の k 次元 mod 2 ベッティ数である。アレグザンダーの双対定理は次のように述べられる。

アレグザンダー双対定理 I　n 次元球面 S^n に埋め込まれた i 次元球面 C^i に対して，C^i と $S^n - C^i$ の連結度の間には次の関係が成立つ。

$$R^i(C^i) = R^{n-i-1}(S^n - C^i) = 2$$

$$R^s(C^i) = R^{n-s-1}(S^n - C^i) = 1 \quad (s \neq i)$$

系．$i = n-1 = s$ の場合 $R^0(S^n - C^{n-1}) = 1$ で $S^n - C^{n-1}$ は二つの連結成分からなる。これがジョルダン・ブラウアーの定

理である。

双対定理Ⅰは、C^iに対して$n-i-1$次元胞体Kで境界とならないもので、C^iとまつわるものが、本質的に唯一つ存在することを意味する。アレグザンダーはこの定理をiに関する帰納法で証明した。この双対定理Ⅰを一般化して、アレグザンダーは次の定理をも得た。

アレグザンダーの双対定理Ⅱ、n次元球面S^nに埋め込まれた任意のチェインCに対し、次の等式が成立つ。

$$R^i(C)=R^{n-i-1}(S^n-C),\quad 0\leqq i\leqq n-1.$$

アレグザンダーの証明は初等的であるがデリケートである。また数年後に発表されるマイヤー・ヴィートリスの定理(14),(27)の論理を先取りしている所もある。

§3 二つの双対定理の統一

13才の時失明したポントリャーギン(L.S. Pontryagin)は、母の献身的な協力によって勉強を続けることができ、1925年17才でモスクワ大学数学・物理学部に入学した。この年講師であったP.S. アレクサンドロフはゲッティンゲンに留学してH.ホップと親しくなり、E.ネーターの加群を基礎とする新しい代数学の方

法を摂取した。翌年モスクワに帰ったアレクサンドロフは、この新しい位相幾何学の方法を紹介した。そこではベッティ数ではなく、任意の可換環を係数環とするホモロジー(加)群が中心的な概念であった。ポントリャーギンはこのセミナーに出席して位相幾何の勉強を始めた。そしてセミナーでアレクサンドロフの出した問題に答えて、アレクザンダーの双対定理を、ベッティ数(mod 2)の間に関係でなくホモロジー群(mod 2)の間の関係としてとらえる論文[1]を書いた。その主定理は次のようなものである。いま $r+s=n-1$ のとき、R^n 内の交わらない二つの境界チェイン Γ^r, Γ^s のまつわり数を $b(\Gamma^r, \Gamma^s)$ と置く。$\Gamma^r=\partial K^{r+1}$, $\Gamma^s=\partial K^{s+1}$ のとき、これは K^{r+1} と Γ^s, Γ^r と K^{s+1} の交点数に等しい。

主定理「K^s が R^n 内の s 次元複体とし

(1) $\Gamma_1^r, \Gamma_2^r, \cdots, \Gamma_p^r$

が、K^s の r 次元ホモロジー群(mod 2)の基底とし

(2) $\gamma_1^{n-r-1}, \gamma_2^{n-r-1}, \cdots, \gamma_p^{n-r-1}$

を R^n-K^s の $n-r-1$ 次元ホモロジー群(mod 2)の基底とする。このとき(1)または(2)の任意の[自明でない]一次結合Cに対して、それぞれ(2)または(3)の元Dが存在して、$b(C, D)\neq 0$ となる。」

ポントリャーギンは、その修士論文[6]で、この定理は

$b(\Gamma^r, \Gamma^s)$が $H_r(K^\lambda, \mathbb{F}_2) \times H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n - K^\lambda, \mathbb{F}_2) \to \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$の非退化双一次写像であると把握し，これから標数2の素体$\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$ 上の有限次元ベクトル空間（従って有限群）として

$$H_r(K^\lambda, \mathbb{F}_2) \cong H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n - K^\lambda, \mathbb{F}_2)$$

であることが導かれることを強調した。この論文［6］の序文は、この方面の研究の歴史を適確に述べ，彼の研究の意図を明快に述べているので，以下この序文前半の訳文を掲げよう。

「ポアンカレは，1895年発表の有名な研究「位置解析」において，今日彼の名を冠して呼ばれる双対定理を発見している。すなわち向きのつくn次元［閉］多様体において，各rに対し、r次元と$n-r$次元のベッティ数は等しいという事実を、彼は発見したのであった。おおよそ同じころ，ジョルダンは始めて，彼の曲線定理を発見した。しかし当時，この二つの全く異る定理が，同一の思考圏に属すると考えたり，またジョルダンの定理は，極めて広大で意義深い一般化ができることを予想した人は一人もいなかったのである。この一般化がなされた道筋を，ごく簡潔に述べると次のようになる。

1912年にブラウアーは閉曲線の不変性定理（Math. Ann. 72 (1912), 422–425）を証明した。これは一般に平面$\mathbb{R}^2$内にある閉集合Fの補集合$\mathbb{R}^2 - F$の連結成分の個数は，Fの位

相的性質のみによって定まるという定理であった。極めて特別な場合として［Fが円周と同相のとき］，この定理は，ジョルダンの曲線定理を含む。この定理によって，初めて閉曲線の概念を，平面から分離して不変的に定義する原理的な可能性がえられたのであった。これによって，いわゆる組合せ位相幾何学の種々の不変量をすべての最も一般な閉集合に対しても転用する道が既に示唆されていたのであった。この一般化は，最近五年間に多くの新しい結果をもたらした。それは先ず第一に，アレクサンドロフ（Math. Ann. 30 (1928), 101–187），レフシェッツ，ヴィートリス によるものであった。すべてのこれらの結果は閉集合に対する一般双対定理の中に組込まれるのである。これについては，この論文の第三章で扱う。

ただしこの研究においては，初等的な図形に対して証明された定理を，より一般な集合に対しても証明するだけでなく，次元についても一般化を行っているのである：すなわちジョルダンの定理は，2次元の平面と一次元の曲線に関する定理であったのが，それぞれn次元とr次元に一般化されて定式化され，証明されるのである。この方向での最初の研究は，1911年ルベーグによってなされた（C.R. Paris 154 (1911, 173–175)。ルベーグはn次元多様体が，n+1次元空間を［二つに］分割するという性質は，n次元空間内におけるr次元多様体が，

$n-r-1$ 次元のまつわりを許すという性質の特別な場合であることを初めて認識した。これによってルベーグは n 次元におけるジョルダンの定理の一部を証明したのである。残りの部分の証明とまつわり理論を完全かつ不変的に基礎づけることは、同じ頃ブラウアーによってなされた（Math. Ann 71 (1911), 314-319, Proc. Akad. Amsterdam 15 (1912), 113-122）。

本質的に新しく、かつ最も広い立場からの展望を開いた進歩がアレグザンダーによってなされた。彼は、R^n 内の任意の複体 K の r 次元ベッティ数［mod 2］は、K の補集合 R^n-K の $n-r-1$ 次元ベッティ数［mod 2］に等しいことを、並外れて簡単でエレガントなやり方で証明したのであった（アレグザンダーの双対定理）（Trans. AMS 23 (1922), 333-349）。これはジョルダンの曲線定理の思考圏において（より一般の閉集合でなく）多面体と同相なものに関する限り、当時知られていたすべての定理を含む強力な一般化であった。アレグザンダーの双対定理を、任意の閉集合に拡張することは、1927年アレクサンドロフによってなされた（Gött. Nachr. 25 Nov. 1927）。また同じ頃レフシェッツ（Ann. Math. 29 (1928), 232-254 とフランクル（Wien. Ber. Dez., 1927. 689）も、［別の］このような拡張を行った。その際レフシェッツは、任意の多様体の閉集合に対して彼の結果を証明した。彼が用い

た本質的な補助手段は、まつわり理論従って結局はクロネッカーの交点数理論の一層の開発であった。この理論をトポロジーの新しい問題に対して、望み得る限りの一般性を持って、レフシェッツは発展させたのである。一方ヴェブレンは、既に1923年以来，ポアンカレ双対定理の証明と一般化のために、交点数理論を用いていた。すなわちヴェブレンは，n次元閉多様体のr次元と$n-r$次元のホモロジー基底を適当に選ぶことにより、この双方の基底の間の交点数の作る行列が単位行列となるようにすることができることを示した。この事実は勿論ポアンカレの双対定理を含んで居り、さらにそれを本質的に一般化したものとなっている。このように定式化されたポアンカレ・ヴェブレンの双対定理をR^n内の一つの複体Kのr次元ホモロジー群［mod 2］と，R^n-Kの$n-r-1$次元ホモロジー群［mod 2］の基底を適当に選ぶとき，この二つの基底の間のまつわり数の作る行列が単位行列となるようにできるというアレグザンダー双対定理の上述の一般化とを比較するとき、この二つの定理の間の類似性が直ちに目に入るであろう。

この論文では，アレクザンダー双対定理とポアンカレ・ヴェブレン双対定理は共に、同一の純粋に代数的な原理を，対応する次元のホモロジー群の間に適用することに帰着されることを示し，この二つの双対定理の類似性の根拠を明らかにする。

この代数的な原理とは、二つのアーベル群（加法群とする）U, V に対して、U の各元 u と V の各元 v に対して、第三の加群 M の元である積 $u.v$ が定まるという新しい演算［$U \times V \to M$ の $\mathbb{Z}$-双線型写像］を考えることによって与えられる。ここで加群 M は有限または無限巡回群［$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}$］である。

このような演算の与えられた二つのアーベル群の対 (U, V) を群対という。任意の 0 でない $u \in U$ または $v \in V$ が与えられたとき、$u.w \neq 0$ または $w.v \neq 0$ となる w が存在するとき［即ち積が非退化双線型写像のとき］、この群対を直交群対という。［実は直交群対という用語は後の［16］で初めて登場する。この論文［6］では「素群対」(primitive Gruppenpaar) という語が用いられているが、より適切な［16］の用語に統一した。］

直交群対に関する主定理は次のように述べられる。「(U, V) が直交群対ならば、U と V は同型である。」

ポアンカレー双対定理の場合には、向きづけ可能で単体分割可能な n 次元閉多様体 K の、r 次元と $n-r$ 次元ホモロジー群 $H_r(K, \mathbb{Z})$ と $H_{n-r}(K, \mathbb{Z})$ の元 u, v に対し、積 $u.v$ を交点数 $\chi(u, v) \in \mathbb{Z}$ とする。またアレグザンダー双対定理の場合には、$\mathbb{R}^n$ 内の複体と同相な K に対し $H_r(K, \mathbb{F}_2)$ と $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n - K, \mathbb{F}_2)$ の元 u, v に対する積を、まつわり数

る $(u,v)\in \mathbb{F}_2$ とする。これによって $(H_r(K,\mathbb{Z}), H_{n-r}(K,\mathbb{Z}))$ と $(H_r(K,\mathbb{F}_2), H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-K, \mathbb{F}_2))$ が直交群対となる。こうしてこの二つの双対定理は、この直交群対に対する双対定理という共通の原理から導かれることになったのである。さらにポントリャーギンは、どちらの双対定理の場合にも、係数環は任意の自然数 $m>0$ に対する $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とできることをも示している。

この論文で、ポントリャーギンは、アレクサンダー双対定理について、次の三つの一般化を考えている。

(1) K を複体と同相な集合に限らず、任意のコンパクト集合とする。

(2) $\mathbb{R}^n$ の代りに、$H_r(M)=0$ $(1\leqq r\leqq n-1)$ となる n−多様体 M の中で考える。

(3) 係数環を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $(m>0)$ でなく $\mathbb{Z}$ とする。

位相幾何の双対定理から、位相群の双対定理への道を主要な関心の対象とする本稿では、(1) の視点が最も重要であるから、以下 (1) について述べる。(2) の一般化は、特に問題はなく直ちにできる。(3) については、この論文では完全な解決は得られて居らず、整係数ホモロジー群 H でなくベッティ群 (=H/ねじれ群) に関する定理しか得られていない。

以下 (1) の拡張がどのようにしてなされたかを述べよう。

$\mathbb{R}^n$内の任意のコンパクト集合あるいは任意のコンパクト距離空間 X に対してホモロジー群を定義することは、何人かの数学者によって考えられたが、ポントリャーギンは、その師アレクサンドロフ（3）の方法を用いた。ここでは群の列の極限を考えることが必要になる。

群の列 $(U_n)_{n\in N}$ と準同型写像の列 $\varphi_n : U_n \to U_{n+1}$ の列 $(\varphi_n)_{n\in N}$ の組 $(U_n, \varphi_n)_{n\in N}$ を考える。このような列を現在では群の順系という。各 n に対して，$x_n \in U_n$, $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$ をみたすような元の列 $(x_n)_{n\in N}$ の全体 X を考える。二つの列 $(x_n), (y_n) \in X$ が同値ということを，ある n_0 より大きなすべての n に対し $x_n = y_n$ であることと定義する。この関係 R は集合 X における同値関係であり、商空間 $U = X/R$ が定まる。今 $(x_n)R(x'_n)$, $(y_n)R(y'_n)$ ならば $(x_n y_n)R(x'_n y'_n)$ となるから，商空間 U に積が定義され，U は群となる。この群 U を列 (U_n, φ_n)（あるいは (U_n)）の順極限といい，現在では $U = \varinjlim U_n$ と記す。

さて、二つのアーベル群の対 (U_1, V_1), (U_2, V_2) が共に積 u, v に関して直交群対となっているとしよう。今準同型写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ があるとき、その転置準同型写像 ${}^t\varphi : V_2 \to V_1$ が

$$\varphi(u_1)\cdot v_2 = u_1 \cdot {}^t\varphi(v_2)$$

によって定義される。従ってアーベル群の順系 $(U_n, \varphi_n)_{n\in N}$

が与えられたとき、各nに対し(U_n, V_n)が直交群対となるようなアーベル群V_nが存在すれば、このときφ_nの転置準同型は${}^t\varphi_n : V_{n+1} \longrightarrow V_n$である。従って$(V_n, {}^t\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$はアーベル群の逆系であり、その逆極限$V = \varprojlim V_n$が考えられる。しかしポントリャーギンは、この概念を見逃し「群の列(V_n)は極限を持たない」と考えてしまった。こうして彼は順極限だけを考えたので、議論の対称性が失われたのである。ポントリャーギンはそこで群の逆系$(V_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varphi_n : V_{n+1} \longrightarrow V_n)$が与えられたとき、$(U_n, V_n)$が直交群対ならば$(V_n, {}^t\varphi_n)$は群の順系となり、順極限$U = \varinjlim U_n$が考えられることを利用した。アレクサンドロフ(3)は、任意のコンパクト距離空間Fが複体の列(K_m)が近似できることを示した。このとき各mに対し、単体写像$\pi_m : K_{m+1} \longrightarrow K_m$が定義されている。適当な付加条件をみたすこのような複体の列を、射影スペクトルとアレクサンドロフは呼んだ。このときK_mのホモロジー群$H_r(K_m, G)$に対し単体写像π_mから導かれる準同型写像

$$(\pi_m)_* : H_r(K_{m+1}, G) \longrightarrow H_r(K_m \cdot G)$$

が定義される。こうして射影スペクトルから、ホモロジー群の逆系$(H_r(K_m), (\pi_m)_*)$が得られる。複体K_mに対するアレクサンダーの双対定理によって$H_r(K_m, \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})$ $(\mu > 0)$と

$H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-K_m,\ \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})$は、まつわり数を積として直交群対を作る。従って双対群の順極限

(1) $\varinjlim H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-K_m,\ \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})$

が得られる。これは自然に $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-F,\ \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})$ と同型となる。そこでポントリャーギンは、アレクサンダーの双対定理の一般化として次の形の一般化された双対定理を得た。

一般化双対定理「$\mathbb{R}^n$の任意のコンパクト部分集合Fを近似する射影スペクトル$(K_m,\ \pi_m)_{m\in N}$からは、ホモロジー群の逆系 $(H_r(K_m\cdot\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}))_{m\in N}$が得られる。アレクサンダーの双対定理により、各mに対し直交群対を作るホモロジー群の順系 $(H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-K_m,\ \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}))_{m\in N}$ の順極限(1)は、$H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-F,\ \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})$ と同型である。」この定理は双対定理としては形が整っていない。「逆系$(H_r(K_m))_{m\in N}$ の逆極限として $H_r(F,\ \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})$ が得られ、それが $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-K_m)_{m\in N}$ の順極限である $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-F,\ \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})$ と直交群対を作る。」というのが自然な形の定理であろう。しかし逆極限を見逃したポントリャーギンは、この形に定理を述べることができなかったのである。

しかしながら、このような考察を経て、例えばアレクサンダーの双対定理において本質的なのは、$H_r(K,\ \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})$ と $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-K,\ \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})$ の同型性であるよりは、むしろこの二つの群の双対性（直交群対を作ること）である認識がポントリャ

ーギンの中に生れたのではなかろうか。係数群が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のとき、この二つの群が同型であるのは、有限アーベル群がその双対と同型であるという特別な事情によることがわかって来たのである。

§4 アレクザンダー双対定理から位相群の双対定理へ

ポントリャーギンは前節で扱った論文 [6] では、$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合Fに対し、整係数ホモロジー群 $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-F, \mathbb{Z})$ をFの位相不変量で explicit に表わすことには成功しなかった。彼はねじれ群で割ったベッティ群に関する結果しか得られなかったのである。この点に不満を感じて彼はさらに研究を続けた。[6] の序文で彼が述べているように、既に1930年にレフシェッツ (13) は、この問題に対する一つの解を与えていた。それは相対ホモロジー群の概念を導入することによるもので、後にチェック・コホモロジー群の概念と結びついて、ポアンカレとアレクザンダーの二つの双対定理を統合して表現する現代の標準的理論となった (例えばブレドン (6) 参照)。

しかしポントリャーギンは、[6] で展開した直交群対の方法をさらに深めることによって、独自の方法で、この問題を解決できると考えて研究を進めた。彼は群対の定義を変えることを考

えた。[6]では群対(U, V)の積の値の属する群Mは、$\mathbb{Z}$か$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$であったのを、1次元トーラス群$\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$という位相群をMとすることにしたのである。そして有限生成アーベル群に限らず、より広い範囲で群対を考えることにした。代表的な例が($\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$)という直交群対である。このとき$m\in\mathbb{Z}$と$v=x \bmod \mathbb{Z}$の積は$m.v=mx \bmod \mathbb{Z}$である。ポントリャーギンのアイディアは、$H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-F, \mathbb{Z})$という離散アーベル群を、コンパクト・アーベル群$H_r(F, \mathbb{T})$の指標群としてとらえるというものであった。そこで彼は一般に可算離散アーベル群$\mathfrak{G}$とコンパクト・アーベル群Xの作る直交群対の理論を指標群の理論として作り上げ、それによって彼の位相的双対定理(アレクザンダー双対定理の一般化精密化)を基礎づけることを考えた。そしてその前半の指標群の理論を「位相アーベル群の理論」と題する論文[16](1934年)の第1章で述べた。後半は論文「閉集合に対する位相的一般双対定理」[18]で発表した。

その内容を概観しよう。[16]ではアーベル群は加法群として表わし、第2可算公理をみたす位相群のみを考える。特に離散群は、すべて高々可算個の元を持つものとする。Gを局所コンパクト・アーベル群とし、Gから$\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$への連続準同型写像$\alpha$をGの指標といい、その全体の作るアーベル群

$X=X(G)$ に、コンパクト開位相を入れた位相アーベル群 $X(G)$ を，G の指標群という（この一般の指標群の定義は，後の著書「位相群」[38]（1939年）によるもので，[16] では離散群とコンパクト群に対し別々に指標群を定義している。）特に g が離散アーベル群のとき，その指標群 $X=X(g)$ はコンパクト群であり，X がコンパクト・アーベル群ならばその指標群は離散群である。

以下 g を離散アーベル群，$X=X(g)$ をその指標群であるコンパクト・アーベル群とする。今 $\mathfrak{h}$, Φ をそれぞれ g, X の部分群とし，それらの零化群を

$$\langle X, \mathfrak{h}\rangle=\{\alpha\in X \mid \alpha(\mathfrak{h})=0\},\ \langle g, \Phi\rangle=\{x\in g \mid \alpha(x)=0\ (\forall\alpha\in\Phi)\}$$

によって定義する。このとき次のことが成立つ（定理 2, 3, 4）。

(1) $\Phi=\langle X, \mathfrak{h}\rangle \Rightarrow \mathfrak{h}=\langle g, \Phi\rangle$

(2) $\Phi=\langle X, \mathfrak{h}\rangle \Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ の指標群 $X(\mathfrak{h})\cong X/\Phi$

$g/\mathfrak{h}$ の指標群 $X(g/\mathfrak{h})\cong\Phi$

(3) $\mathfrak{h}=\langle g, \Phi\rangle \Rightarrow \langle X, \mathfrak{h}\rangle=\Phi$

一般に g, X が位相アーベル群で，$g\times X\to\mathbb{T}$ の連続双一次写像 $(\alpha, x)\longrightarrow\alpha.x$ が与えられたとき，対 (g, X) を群対という。特に

$$\langle X, g\rangle=\{0\},\ \langle g, X\rangle=\{0\}$$

となるとき，(g, X) は直交群対という。(g, X) が直交群対な

らば、自然な写像により、gとXは互に他の指標群となる（[16] 定理5）。

このときポントリャギン双対定理の原型（[16] 才一基本定理）は次の形に述べられる。その定理には、任意のコンパクト群が十分多くの既約表現を持つというペーター・ワイルドの定理（15）が本質的に用いられる。ハール測度の発見（10）によって，ペーター・ワイルのコンパクト・リー群に関する定理が任意のコンパクト群の適用できるようになったことが、ここに用いられている。原ポントリャーギン双対定理「才2可算公理をみたす任意のコンパクト・アーベル群Ωの指標群をgとし、gの指標群を$X(g)$とする。Ωの各元αに対して$X(g)$の元χ_αが

$$x(\alpha) = \chi_\alpha(x), \quad ({}^\forall x \in g)$$

によって定義される。自然な写像$\alpha \longmapsto \chi_\alpha$によって$\Omega$は、$X(g)$に同型である。」

この定理を基礎にして、ポントリャーギンはアレグザンダー双対定理の係数群を$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$の場合から一般化する次の定理を得た（[18] 基本定理）。

アレグザンダー・ポントリャーギンの双対定理。「FをR^nのコンパクト集合とする。またgを可算離散アーベル群，$X = \overset{\vee}{X}(g)$をgの指標群であるコンパクト・アーベル群とする。このときコンパクト・アーベル群$H_r(F, X)$と離散アーベル群$H_{n-r-1}(R^n - F, g)$

は、まつわり数を積として、直交群対を作り互いに他の指標群となっている。」 特に $g=\mathbb{Z}$ の場合として整係数ホモロジー群 $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-F, \mathbb{Z})$ が集合 F の位相不変量である $H_r(F, \mathbb{T})$ の指標群として、explicit に表わされる。こうしてアレグザンダー双対定理の一般化、精密化が、位相アーベル群（離散群とコンパクト群）の双対定理という形で表現されたのであった。

双対性の考えは、位相幾何学の内部に滲透して行った。その最大の成果はコホモロジー群の導入である。しかしそれを語ることは本稿の文脈から外れることになるであろう。

§5 まとめ

以上をまとめて、まえがきに述べた三つの問題に対する著者の解答を述べよう。

問 I　ポントリャーギンはなぜコンパクト・アーベル群と離散アーベル群の間の双対定理を考えたのか。

答　アレクザンダーの双対定理の一般化、精密化として $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-F, \mathbb{Z})$ を F の位相不変量で表わす問題に対し、離散アーベル群 $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-F, \mathbb{Z})$ は、コンパクト・アーベル群 $H_r(F, \mathbb{T})$ の指標群であるという答をポントリャーギンは得た。このような離散アーベル群とコンパクト・アーベル群の双対

的な関係が位相幾何における彼の研究目標にとって本質的であると考えた所に、ポントリャーギンの位相アーベル群のルーツがあったのである。

問Ⅱ　ポントリャーギンは[16]において、なぜ一般の局所コンパクト・アーベル群の双対定理を考えなかったのか。

答　ポントリャーギンが位相群の双対定理を考えたそもそもの動機が、離散アーベル群 $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n-F, \mathbb{Z})$ をコンパクト集合Fの位相不変量で表わすという問題にあったのであるから、離散アーベル群とその指標群であるコンパクト・アーベル群しか、考えなかったのは当然である。

問Ⅲ　ポントリャーギンは、なぜ[16]において連結性、局所連結性をみたす局所コンパクト・アーベル群の構造定理のみを考えたのか。

答　ポントリャーギンは、1932年にコルモゴロフの出した「連結な局所コンパクト位相体は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に限るか」という問題を肯定的に解決した(「連続な体について」[10])。[16]才Ⅲ, Ⅳ章の理論はこの問題の系譜の中のものと考えられる。例えば[16]の才三基本定理は次のように述べられる。

才三基本定理「才二可算公理をみたす連結, 局所コンパクト・アーベル群は、高々可算個のトーラス群 $\mathbb{T}$ と有限個の $\mathbb{R}$ の直和である。」このように抽象的な位相、代数構造に適当

な条件を置くことにより、古典的な $\mathbb{T}^{\alpha}\times\mathbb{R}^{n}$ を特徴付けることは、1930年代の数学の一つの目標であった。

一方連結性への固執には、p 進体のような完全不連結な局所コンパクト群が、まだ当時のトポロジストの関心の外にあったという時代背景が考えられる。要するに論文[16]では、ポントリャーギンの二つの研究の流れ（[1][6][18]の流れと[10]の流れ）が合体しているのである。

References

(1) J.W.Alexander, A proof and extension of the Jordan-Brouwer separaiton theorem, Trans. AMS 20 (1922), 333-349.

(2) J.W.Alexander, and O. Veblen, Manifolds of N-dimensions, ann. of Math. 14(1913), 163-178.

(3) P.S.Alexandroff, Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlosser Mengen beliebiger Dimension, Ann. of Math. 30(1928), 101-187.

(4) E. Betti, Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimension, Ann. Mat.pura appl. 2(1871), 140-158.

(5) M.Bollinger, Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs, Arch. for History of Exact Sciences 9(1972/73), 94-170.

(6) G.E.Bredon, Topology and Geometry, Grad. Text, Springer, 1993.

(7) L.E.J.Brouwer, Beweis des Jordanschen Satzes für n-dimensionen, Math. Ann. 71 (1911), 314- 319.

(8) L.E.J.Brouwer, On looping coefficients, Proc. Akad. Amsterdam, 15(1912), 113-122.

(9) J.Dieudonné, A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960, Birkhaüser, 1989.

(10) A.Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math. 34(1933), 147-169.

(11) P.Heegaard, Forstudier til en topologisk teori för algebraike Fladers Sammenhäng, Det Nordiske Forlag Ernst Bojesen, Copenhagen, 1898. (仏訳 Sur l'analysis situs, Bull. Soc. Math. France, 44(1916), 1161-242).

(12) H. Lebesgue, Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M.Jordan relatif aux variétés fermés, C.R. Acad. Sci. Paris, 152(1911), 841-844.

(13) S.Lefschetz, Topology, AMS Coll. Publ. 12, 1930.

(14) W.Mayer, Über abstrakte Topologie, Monath. für Math. u. Phys. 36(1929), 1-42, 219-258.

(15) F.Peter und H.Weyl, Die Vollsändigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppen, Math. Ann. 97(1927), 737-755.

(16) H. Poincaré, Analysis Situs, J. l'Ecole Polytechnique, 1(1895), 1-121. Oeuvres VI, 193-288.

(17) H.Poincaré, Complément à l'Analysis Situs, Rend. Circolo Mat. Palermo, 13(1899), 285-343. Oeuvres VI, 290-337.

(18) H. Poincaré, Seconde complemént à l'Analysis Situs, Proc. London Math. Soc. 32(1900), 277-308. Oeuvres VI, 339-370.

(19) H.Poincaré, Sur les nombres de Betti, C.R. Acad. Sci. Paris, 128(1899), 629-630. Oeuvres VI, 289.

(20) L.S.Pontrjagin, Selected works vol. 1, Selected Research Papers, Gordon and Breach, New York, 1986.

(21) B.Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer verändlichen complexen Grösse, Inauguraldisserttion, Göttingen, 1851. Werke zweite Auflage, 1-43.

(22) B. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, J. reine u. angew. Math. 54(1857), 115-155, Werke 227-271.

(23) B.Riemann, Fragment aus der Analysis Situs, Werke 479-482.

(24) 静間良次,トポロジー,寺阪英孝・静間良次,19世紀の数学,幾何学II,第 4 章,共立出版数学の歴史 VIIb,1982.

(25) 杉浦光夫,ポントリャーギンの生涯,数学セミナー,1988・12, 40-44.

(26) E. van Kampen, Locally bicompact abelian groups and their character groups, Ann. of Math. 36(1935),448-463.

(27) L. Vietoris,Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe, Monath. für Math. u. Phys. 37(1930), 159-162.

Early Papers of L.S.Pontryagin, 1927-1940.

[1] Zum Alexanderschen Dualitätssatz, Nachr. Göttingen,Math. Phys. Kl., 1927, 315-322.

[2] Zum Allexanderschen Dulitätssatz. Zweite Mitteilung, ibid., 446-456.

[3] Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie, Math. Ann.102(1930), 785-789. (mit F. Frankl).

[4] Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension, C.R. Acad. Sci. Paris, 190 (1930), 1105-1107.

[5] Einfacher Beweis eines dimensionstheoretischen Überdeckungssatze, Ann. of Math. 32 (1931), 761-762.

[6] Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssatze, Math. Ann. 1005(1931), 165-205.

[7] Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes, Math. Ann. 105(1931), 734-745. (mit G. Tolstowa).

[8] Der allgemeine Dualitätssatz für abgeschlossene Mengen, Verhandlungen Int. Mathemaiker-Kongresses, Zürich, 1932, Bd. 2, 195-197.

[9] Sur une propriété metrique de la dimension, Ann. of Math. 33(1932), 156-162.

[10] Über stetige algebraische Körper, ibid. 163-171.

[11] A statistical approach to dynamical systems, Zhur. eks. teor. fiz.,3(1933), 165-180. (with A.Andronov and A.Witt), in Russian.

[12] Les fonctions presque périodiques et l'analysis situs, C.R. Acad. Sci. Paris,196(1933), 1201-1203.

[13] On dynamical systems close to Hamiltonian systems, Zhur. eks. teor. fiz., 4(1934), 883-885.

[14] Statistische Auffassung dynamischer Systeme, Phys. Z. Sowj.Un., 6(1934), Sonderdruck, 1-24. (mit A.Andronov und A.Witt).

[15] Über Autoschwingungssysteme, die den Hamiltonschen nahe liegen, Phys. Z.Sowj. Un. 6(1934), 25-28.
[16] The theory of topological commutative groups, Ann. of Math. 35(1934), 361-388.
[17] Sur les groupes abéliens continus, C.R. Acad. Sci. Paris,198(1934),328-330.
[18] The general topological theorem of duality for closed sets. Ann. of Math. 35(1934), 904-914.
[19] Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de M.Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris,198(1934), 238-240.
[20] The Betti numbers of compact Lie groups, Doklady AN SSSR, 1(1935), 433-437. (in Russian and English).
[21] Sur les nombres de Betti des groupes de Lie, C.R. Acad. Sci. Paris, 200(1935), 1277-1280.
[22] The structure of compact topological groups, Trudy Vtorogo Vsessoyuzunogo mat. s"ezda, Leningrad, 1934,vol. 2, p.135, Leningrad-Moscow, 1936. (inRussian).
[23 The structure of locally compact commutative groups, Ibid., p. 136.
[24] Linear representations of topological groups, Usp. mat. nauk, 1936 N2, 121-143. (in Russian).
[25] The theory of topological commutative groups, Ibid.177-195. (in Russian).
[26] Linear representations of compact topological groups, Mat. Sbornik,1(1936), 267-272. (in Russian).
[27] Les variétés à n dimensions généralisées,C.R. Acad. Sci. Paris, 202(1936), 1327-1329. (avec P.S.Alexandroff).
[28] Sur les transformations des sphères, C.R. Congrès Int. Math. Oslo, 1936, t.2, p.140. Oslo, 1937.
[29] Rough systems, Doklady AN SSSR,14(1937), 247-250. (with A.Andronov). (in Russian).
[30] Système grossiers, C.R. Acad. Sci. URSS 14(1937), 247-250. (avec A.Andronov).
[31] Über den Brouwerschen Dimensions-begriff, Comp. Math.,4(19937), 239-255. (mit P.S.Alexandroff und H. Hopf).
[32] Continuou groups, Moscow-Leningrad, 1938, 315 p. (in Russian).
[33] Lie groups, Usp. mat. nauk, 1938, N4,165-200. (in Russian).
[34] The classification of continuous mappings of a complex into a sphere I, Doklady AN SSSR, 19(1938), 147-149. (in Russian).
[35] The classification of continuous mappings of a complex into a sphere II, Ibid., 361-363. (in Russian).
[36] Classification des transformations d'un complexe n+1 dimensionnel dans une sphère n-dimensionnelle, C.R. Acad. Sci. Paris, 206(1938), 1436-1438.
[37] Homologies in compact Lie groups, Mat. Sbornik,6(1939), 389-422. (abstract in Russian).
[38] Topological groups, Princeton Unv. Press, 1939. 299 p. (English translation of [32]).
[39] Über die topologische Struktur der Lieschen Gruppen, Comm. Math. Helv., 13(1940/41), 277-283.