クロネッカーの数論の解明

Ⅲ．黎明期における代数的整数論の諸相

高瀬正仁（九州大学）

はじめに

複素整数の概念の自覚的認識

ピエール・ド・フェルマ（1601-1665）の名高い「欄外ノート」に始まる近代的整数論の流れの中で、カール・フリードリッヒ・ガウス（1777-1855）の著作『整数論』（1801年）の出現は、真に画期的という言葉に値するめざましい出来事であった。ガウスはこの大著を皮切りに息の長い究明を続け、雄大な数論的世界を建設したが、その眼目は、一般的に措定された高次合同式の舞台の上に、何かしら相互法則の名にふさわしい法則を発見して確立することにあったと見るのが至当である。1801年の著作『整数論』の段階では、発見され、証明された相互法則はなお平方剰余を対象とする場合に留まっていた。しかし1828年の論文

［G-1］　四次剰余の理論 第一論文 ［ガウス全集２，pp．65-92．
1825年に概要が報告され、1828年に公表された。］

と1832年の論文

［G-2］　四次剰余の理論　第二論文 ［ガウス全集２，pp．93-148．
1831年に概要が報告され、1832年に公表された。］

に進むと状勢は明らかに新段階に到達し、一段と深みのある深まりを見せている。実際、これらの二論文では四次剰余相互法則の究明の具体相が詳細に叙述されているが、その歩みにつれておのずと、「整数域の拡張」という鮮明な事態が生起した。そうして四次剰余相互法則というものが生い立つべき本来の場所、言わば「存在領域」として、ガウス整数域が設定されるに至ったのである。これに関連して、ガウス自身、「第二論文」（［G-2］）の中でこんなふうに語っている。

・・・我々は1805年からこのテ-マに向けて心を傾け始めたが、そのときただちに、一般理論の真の泉はアリトメティカの**拡大された領域**の中に探し求められるべきであることを我々は確信した。

すなわち、これまでに探究されてきた諸問題では、高等的アリトメティカは実整数だけの範囲内に限定されているが、すでに第一節において示唆したように、四次剰余に関する諸定理は、アリトメティカの領域が虚の量にまで拡張されて、$a+bi$ という形の数が制限なしにアリトメティカの対象となるようになって初めて、最高の単純さと真実の美しさをもって光り輝くのである。ここで

i は習慣に従って虚量 $\sqrt{-1}$ を表わす。また、a, b は $-\infty$ と ∞ の間のあらゆる不定整数を表わしている。我々はこのような数を**複素整数**［＝ガウス整数］という名で呼びたいと思う。
［ガウス全集２，p．102］

さらにこの言葉には次のような脚註が附されている。

ここで通りすがりに、少なくとも、このようにして確立された数域は、わけても四次剰余の理論にとってふさわしいものであるという事実に注意を喚起しておくのが時宜にかなっていると思う。それと同様に、三次剰余の理論は $a+bh$ という形の数の考察を土台として、その上に建設されるのが至当である。ここで h は方程式 $h^3-1=0$ の虚根、たとえば $h=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i$ である。また同様に、高次冪剰余の理論のためには、他の虚量の導入が必要とされるであろう。［同上］

こうして相互法則の一般的究明は代数的整数というものの自覚的認識を呼び起こし、ここに代数的整数論の端緒が開かれた。ガウスの言葉はそれ自体としては断片的な数語にすぎないが、この間の事情を端的に物語って、間然するところがない。数論における新理論の誕生を告げる歴然たる証言と言わなければならないであろう。

代数的整数論の黎明期

ガウスの数論はガウスに続く世代に所属する数学者たちに深い影響を与え、その後の100年余の数論史の方向を決定した。アンドレ・ヴェイユ

(1906-　) はシモーヌ・ヴェイユ（アンドレの妹）に宛てて書かれた1940年3月26日付の書簡の中で、ガウスの『整数論』に触れて、

> 彼［＝ガウス］の『整数論』は1820年ころになってやっと、アーベル、ヤコビ、レジューヌ・ディリクレに読まれて理解されるようになったが、ほぼ一世紀に渡って数論家のバイブルであり続けた。［ヴェイユ全集1，p.244］

と語っている。ニールス・ヘンリック・アーベル（1802-1829）、カール・グスタフ・ヤコブ・ヤコビ（1804-1851）、ペーター・グスタフ・レジューヌ・ディリクレ（1805-1859）はみな『整数論』の刊行に踵（くびす）を接するようにして世に現われて、それぞれに独自の仕方でガウスの継承者であろうとした同世代の数学者である。代数方程式論と楕円関数論の扉を開いてガウスの数論的世界に分け入ったアーベルはひとまず措き、今、相互法則と代数的整数論に着目するならば、ガウスの継承者として指を屈しなければならないのはまずヤコビとディリクレであり、続いてエルンスト・エドヴァルト・クンマー（1810-1893)、フェルディナント・ゴトホルト・マックス・アイゼンシュタイン（1823-1852）、レオポルト・クロネッカー（1823-1891）、それにユーリウス・ヴィルヘルム・リヒャルト・デデキント（1831-1916）である。これらの六人の数学者のうち、クロネッカーとデデキントは代数的整数の一般理論の建設者として名高いが、一般理論の出現という大がかりな出来事に先立って、代数的整数論には黎明期とも称するべき時代が確かに存在した。そうして我々は、そのような時代を指摘して概観しようとする作業の中から、特にクロネッカーの代数的整数論の解明を進めていくための、有力な手がかりを取り

出すことができるであろう。それが本稿の目標である。

1．代数的整数論の黎明期の概念

代数的整数論の黎明期の叙述を行なう前に、もう少し精密な概念規定を語っておきたいと思う。上述のように、代数的整数論というものの成立基盤は、「数域の拡張」、すなわち、整数概念の適用域を複素数の領域へと押し拡げていくという思想である。ガウスは四次剰余相互法則の確立に当たってこの基本思想を具体的な形で表明したが、ガウスの継承者たちは、ガウスが敷いた路線の延長線上に、一般的な高次冪剰余相互法則の建設を試みた。すると必然的に、ガウスの場合にそうであったように、「相互法則の存在領域」という概念に遭遇するが、それに伴って、相互法則の建設のために前もって確立しておかなければならない二つの基礎理論の存在が明らかになる。それは、**複素単数の理論**と**理想素因子の理論**である。これらの理論はガウス自身の数論的世界の中にすでに芽生えていたと見てよい（たとえば、論文［G-2］におけるガウス整数域の単数に関するガウス自身の叙述は、複素単数論の言わば雛形を与えている）が、ヤコビ、ディリクレ、クンマーの手を経て急速に生長し、やがて高い完成度をもつまとまりのある理論体系が出現した。クンマーはこの確固とした土台の上に相互法則の究明を押し進め、正則円分体における冪剰余相互法則の確立という、大きな成果を獲得した。その様子は1859年のクンマーの論文

［Ku-1］　素次数の冪の剰余および非剰余の間の一般相互法則について

[クンマー全集1，pp．699-839］

の中に詳細に描かれているが、ここにおいてガウス以来の一連の究明は、なお大団円を迎えたとは言えないまでも、19世紀の数論史の大山脈を形成する峰々の一つにたどり着いたと考えられるのである。ガウスの『整数論』の刊行に始まり、クンマーの論文［Ku-1］の出現に至るおよそ60年の数論史。それが代数的整数論の黎明期である。

このような黎明期という時代区分はだれの目にもおのずと気付かれるものであり、別段、それ自体に独自性が認められるわけではない。しかし今、クロネッカーの数論を代数的整数論の方面から見て解明しようという企図を抱くとするならば、黎明期への着目はにわかに重要な意義を帯びてくるように思われる。なぜなら、1845年の学位論文

［Kro-1］　複素単数について　［クロネッカー全集1，pp．5-73．本文はpp．9-71．全20章から成るが、第16章までが1845年の学位論文である。残る四つの章は　1882　年に書き加えられた。］

に象徴的に表明されているように、クロネッカーの数学者としてのキャリアは黎明期の代数的整数論に始まっているからである。この学位論文の段階では、クロネッカーは完全にクンマーの影響のもとに置かれている。しかし1881年の大作

［Kro-2］　代数的量のアリトメティカ的理論の概要　［クロネッカー全集2，pp．239-387．1881年．］

に至ると状勢は一変し、今度は楕円関数の特異モジュールの数論的特性の解明をめざして、独特の一般理論の構想が表明されるに至るのである。クロネッカーの代数的整数論は明らかに二分され、その前半期はまさしく黎明期に包摂されている。そこで私は、クロネッカーの数論の本質が顕わになる後半期の考察に先立って、言わばそのための準備として、黎明期の全体像の中にクロネッカーの学位論文を正しく位置付けてみたいと思ったのである。

2．さまざまな萌芽の提出［ヤコビの数論］

ヤコビからルジャンドルへの1827年8月5日付書簡

クンマーは、雄篇［Ku-1］の冒頭に附されている長大な序文の中で、代数的整数論の黎明期における相互法則の究明の様相を詳細に叙述している。以下しばらく、若干の文献を補いつつ、クンマーの言葉に耳を傾けたいと思う。

相互法則究明という、ガウスの数論の基幹線を継承しようとする試みが具体的に開始されたのは、ようやく1827年のことであった。ガウスの『整数論』の刊行の年から数えて、実に26年後の出来事である。先鞭をつけたのはヤコビであった。ヤコビはこの年の8月5日付でルジャンドルに当てて一通の書簡（ヤコビ全集1，pp．390-396）を送っている。この手紙は、楕円関数の変換理論においてルジャンドルの限界を大きく打ち破った新発見の第一報として数学史上に名高いが、それに続いて、ヤ

コビは平方剰余相互法則の新しい証明を報告したのである[1]。ヤコビの証明はガウス自身による第六証明（第四証明と同様、ガウスの和の考察に基づくが、その符号の決定を必要としないという点において、第四証明とは異なっている）の単純化とみなされるものであった。文面は下記の通りである。

p は奇素数とし、x は方程式 $\dfrac{x^p-1}{x-1}=0$ の根、g は合同式 $g^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}$ の原始根としよう。すると、

$$x-x^g+x^{g^2}-x^{g^3}+\cdots-x^{g^{p-2}}=+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$$

となる。

同様に、一般に

$$x^q-x^{qg}+x^{qg^2}-x^{qg^3}+\cdots-x^{qg^{p-2}}$$

は、q が数 p の平方剰余であるか、あるいは平方非剰余であるのに応じて、$+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}$ または $-\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}$ に等しい。

ところが q も素数のときには、q の倍数は無視すると、

$$x^q-x^{qg}+\cdots-x^{qg^{p-2}}=\left(x-x^g+\cdots-x^{g^{p-2}}\right)^q=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$$

となる。

それ故、$(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}$ を q で割るときの剰余が $+1$ であるか、あるいは -1 であるのに応じて、q は p の［平方］剰余もしくは［平方］非剰余になる。ところが、これは相互法則、あるいは、ガウス氏にならえば、平方剰余に関する基本定理そのものである。［ヤコビ全集１，p．394］

---

(1) ルジャンドルは著作『数論の試み』第三版『数論』に、このヤコビの証明を収録した。

クンマー［Ku-1］の伝えるところによれば、オギュスタン・ルイ・コーシー（1789-1857）とヨセフ・ルイ・リューヴィユ（1809-1882）も、ヤコビの証明と類似の証明を与えたということである。

しかし数論に関するヤコビの報告は平方剰余の理論に限定されていたわけではなく、それ自体は広く高次冪剰余の理論に及んでいる。実際、ヤコビは数論を物語る前に、まず初めに、

『整数論』第７章においてガウス氏の手で提示された円周の等分に関する新しい理論から出発して、私は三次剰余、四次剰余、それに**いっそう高次の冪剰余の理論**に関する基本定理へと私を導いてくれる、一つの方法を発見しました。［同上。太字による強調は私が行なった。］

という注目すべき言葉を口にした。1827年という時点では、四次剰余の理論に関するガウスの二論文［G-1］，［G-2］はまだ日の目を見ず、わずかに［G-1］の概要のみが二年前（1825年）に公表されていただけにすぎなかった。ところが、真に驚嘆に値することと言わなければならないが、ヤコビはそのささやかな示唆の中からガウスの真意を正しく汲み、三次、四次をも超えて一挙に一般の高次冪剰余の理論への見通しを語ったのである。ヤコビの言う「新しい方法」のいかなるものかは、この手紙の記述だけではまだ明らかではないが、ともあれガウスの円周等分論に根ざしていることは疑いを容れない事実である。上記の平方剰余相互法則の新証明も、その方法の基本となるアイデアを簡潔に示そうとする意図をもって表明されたのである。

ルジャンドルへの手紙では、三次剰余の理論に関するいくつかの定理

を得たことが報告されて、それらはみな「ある同一の原理」（ヤコビ全集１，p.395）から導出されるという指摘とともに、「この種のものとしては最初の成果である」（同上）ことが明確に宣言されている。具体的に例示されているのは、ある素数が他の素数の三次剰余であるか否かの判定を可能にする一つの著しい定理である。それを見よう。

$6n+1$ という形の素数 p が与えられたとしよう。このとき、もう一つの任意の素数 q について、$4p$ は

$$L^2+27q^2M^2,\ q^2L^2+27M^2$$

という二通りの形状のいずれかであるとするなら、そのときつねに q は p の三次剰余である。ただし、$q=2$ および $q=3$ の場合には、後者の形状は除外しなければならない。

また、q は 7 よりも大きい素数としよう。このとき、p が $(q\kappa+mM)^2+27M^2$ という形であれば、そのときつねに q は p の三次剰余である。ここで数 m は、下記の表を用いて q に関して与えられるものである。

$q=11$	13	17	19	23	29	31	37	・・・
4	1	3	3	2	1	5	8	・・・
		9	9	8	2	7	3	・・・
				11	11	6	9	・・・
					13	11	7	・・・
							12	・・・
								・・・

たとえば、$4p$ は

$$L^2+36963M^2,\ 1369L^2+27M^2,$$

$$(37\kappa+3M)^2+27M^2,\ (37\kappa+9M)^2+27M^2,$$
$$(37\kappa+7M)^2+27M^2,\ (37\kappa+12M)^2+27M^2,$$
$$(37\kappa+8M)^2+27M^2$$

という7通りの形状の一つであるとすれば、そのときつねに 37 は p の三次剰余である。

数 $4p$ は上記の定理で定められた形状のどれにも包摂されないとすると、その場合には q は p の三次剰余ではありえない。[ヤコビ全集1, p.395]

クンマーは [Ku-1] において、1827年に生起したヤコビの数論上の発見に言及し、

> 1827年に、ヤコビは円周等分の理論を著しく簡易化して構成し、この理論の中に**冪剰余相互法則の豊かな泉**を発見した。その泉から、彼は、上に言及がなされた平方剰余相互法則の証明のみならず、クレルレ誌2, p.66において、彼の手で提出された三次剰余に関する諸定理をも導くことができたのである。[クンマー全集1, p.705. 太字による強調は私が行なった。]

と評している。ここで、「クレルレ誌2, p.66」という指示語の対象は、末尾に「1827年6月22日」という日付をもつヤコビの論文

[J-1] 三次剰余に関するさまざまな究明 [ヤコビ全集6, pp.233-237, 1827年]

である。この論文に提示されている二つの定理は、なお完全というには遠いとはいうものの、その志向するところが三次剰余相互法則そのものにあったことは明白である。そればかりではない。クンマー［Ku-1］の伝えるところによれば、円周等分の理論の中に「冪剰余相互法則の豊かな泉」を発見した後に、ヤコビは「この泉から、彼はしばらく後に、新しいガウスの原理を用いて、三次と四次の剰余に対する完全な相互法則を、その最も簡明な姿形のもとで導出して証明した」（クンマー全集1，pp．705-706）という。ここで言われている証明は公表はされなかったが、「数論に関する講義の中で、ケーニヒスベルク［大学］における彼の聴講者たちに報告」（クンマー全集1，p．706）され、「講義ノートを通じて広まっていった」（同上）のである。

後にアイゼンシュタインは、論文

［E-1］ 1の三乗根を用いて作られる複素数における、三次剰余に対する相互法則の証明 ［アイゼンシュタイン全集1，pp．59-80．1844年］

［E-2］ 相互法則 複素数の理論における四次剰余に関する基本定理の新しい証明。四次剰余に関する基本定理の証明。四次指標に関する最も一般的な定理。それは特別の場合として基本定理を包摂する。［アイゼンシュタイン全集1，pp．126-140．1844年］

において、それぞれ三次剰余相互法則と四次剰余相互法則の第一証明を与えた（三次と四次の相互法則に対するアイゼンシュタインの証明はいくつか知られている）。しかしクンマーの見るところによれば、それらは「ヤコビが10年以上も前に発見した証明とまったく同じもの」（クン

マー全集１，p.706）にすぎなかったということである。

クンマーも明記しているように、ヤコビの成功はガウスの第二論文［G-2］を踏まえたうえでの出来事である。そうしてクンマーの言う「新しいガウスの原理」とは、「数域を拡大して、相互法則の存在領域を正しく設定する」という、あの基本思想のことにほかならない。既述のように、この基本原理の表明がなされたのは1832年の論文［G-2］、あるいはその前年（1831年）に公表された［G-2］の概要においてのことである。しかしその土台の上に次々と築かれていくべき高次冪剰余相互法則の種々相を見れば、ガウス自身の寄与は四次剰余相互法則の提示に留まり、証明が与えられたのはわずかに二つの補充法則に対してのみにすぎなかった（第一論文［G-1］）。このような一般的状勢を背景にして観察するとき、ヤコビの足取りの力強さは群を抜いて際立っている。ガウスの円周等分方程式論の基本精神を継承して楕円関数の等分方程式論を展開したアーベルとともに、ヤコビこそは、数論におけるガウスの継承者たちの中で、まず初めに指を屈するべき人物である。

ヤコビの数論

数学者・数理物理学者としてのヤコビの広大な業績の中で、純粋に整数論に所属すると見られる部分はごくわずかである。全７巻から成る全集を概観しても、「数論に関する諸論文」として分類されている論文は二篇の遺稿を含めて13篇であり、ようやく第６巻の半分弱を占めるにすぎない。しかもヤコビが示したのは大きな完成された理論というわけではなく、個々の興味深い定理の証明であったり、歩むべき道筋のスケッチであったりした。だが、それらはみなはなはだ示唆に富み、引き続く理論展開のための第一着手として非常に有効に作用した。私はここで、

特に代数的整数論形成史という観点から見て、ヤコビの数論の小さな世界が引き起こした三つの影響を指摘しておきたいと思う。それらは、まず既述のように、

Ⅰ. アイゼンシュタインの相互法則研究

に対して具体的な動機を与えたこと、次に

Ⅱ. ディリクレによる二次形式の類数公式の確立と、その複素二次形式への拡張

の理論的可能性を明示したこと、最後に、

Ⅲ. クンマーによる理想素因子の発見

を導くに足る予備的考察を行なったことである。本稿のねらいは、主として Ⅱ と Ⅲ の上に及ぼされたヤコビの影響の様相を観察することである[1]。

さて、数論に関するヤコビの 13 篇の論文のうち、代数的整数論への直接的な寄与と判断されるのは、上掲の [J-1] を含めてわずかに3篇である。他の二篇は下記の通りである。

[J-2]　円周等分とその数論への応用　[ヤコビ全集6, pp.254-274. 1837年]

[J-3]　5次、8次および12次の冪剰余の理論において考察するべき複素素数について　[ヤコビ全集6, pp.275-280. 1839年.]

我々は後者の先鋭な数学的エッセイ [J-3] の中に、本稿における我々の考察のための具体的な指針を求めたいと思う。

---

(1) アイゼンシュタインの独自の数論については、稿をあらためて詳細に論じたいと思う。

理想素因子の理論への寄与

クンマーは［Ku-1］においてヤコビの二論文［J-2］と［J-3］に言及し、「ヤコビは当地［＝ベルリン］の学士院において、1837年と1839年に、これらの定理［＝三次と四次の冪剰余相互法則］に関して二度に渡る報告を行なった。・・・それらの報告のうちの後者［＝［J-3］］の中で、彼は、**同じ泉から五次と八次の冪に対する相互法則を取り出せるのではないか**という期待を表明している」（クンマー全集1，p．706．太字による強調は私が行なった）と述べている。そこで我々はヤコビ自身の言葉に注目したいと思う。ヤコビは論文［J-3］の末尾でこんなふうに語ったのである。

> これらの素数 $f(\alpha)$ の間で、5次、8次および12次の冪剰余の理論において、相互法則を捜さなければならない。それらを帰納的観察のみを通じて見つけるのはおそらく可能であろう。しかる後に、もしそのような帰納的観察がそれほどやっかいなものでなければ、相互法則の真の形状が知られるのである。私が以前、学士院に報告したノート［＝［J-2］］において二次、三次および四次の剰余に関して行なったのと全く同様にして、相互法則を合成数にまで及ぼそうとするなら、円周等分の理論から即座に、一方の数が実数という特別な場合に対して、5次、8次および12次の冪に関する簡明な相互法則が導出される。新しい技巧を用いることにより、**同じ泉から、二つの複素数に対するいっそう一般的な諸定理を導くのは可能かどうかという点の判断については、今後の研究を俟たなければならない。**［ヤコビ全集6，p．280．

太字による強調は私が行なった。]

ヤコビが発見した「冪剰余相互法則の豊かな泉」は、四次を越える次数の冪剰余相互法則のためには無力であり、クンマーの言う「ヤコビの期待」はついにかなえられることはなかった。しかしそれにもかかわらず、論文 [J-3] の重要さは不変である。なぜならここには、上に引用したヤコビの言葉の冒頭の一語「これらの素数 $f(\alpha)$」に象徴されているように、5次、8次および12次の冪剰余相互法則の確立に当たって、それらの相互法則の真実の対象として設定されるべき「何かある素なるもの」に肉薄しようとする、斬新な考察の足跡が認められるからである。

ヤコビの探索に具体的な手がかりを与えたのは、またしてもガウスの第二論文 [G-2] であった。ヤコビはまずガウスによるガウス整数の究明に言及し、続いて、「アリトメティカのさまざまな方法と結果のうち、このような複素数に対しても有効性を保持するものを報告する作業が残されている」(ヤコビ全集6, p. 277) という広汎な見通しを指摘した。範例として挙げられたのは、有理係数をもつ二次形式に関するラグランジュとガウスの理論の適用域を押し拡げて、ガウス整数域を係数域とする二次形式、すなわち複素二次形式の理論を展開することであった。すなわち、ヤコビは、「たとえば、たやすくわかるように、二次形式を還元するラグランジュの方法は、$pyy+qyz+rzz$, ここで p, q, r, y, z は上に指定された通りの複素数 [=ガウス整数] を表わす、という表示式に拡張される (ヤコビ全集6, p. 277) と明言し、二次形式の還元理論の拡張を提案したのである。

後にディリクレは、1842年の論文

[D-1]　複素係数と複素不定数をもつ二次形式の研究　[ディリクレ全集1, pp . 535−618 .]

において、ヤコビが提起した複素二次形式の還元理論を詳細に展開した **（ディリクレに及ぼされたヤコビの影響（1））**。

この複素二次形式の還元理論から、やがてクンマーの手に継承されて完成されることになる理想素因子の理論の端緒が開かれていった。今、ヤコビの指示に従って、

$$y^2-\sqrt{-1}\,z^2$$

という、非常に単純な形状をもつ複素二次形式を取り上げてみよう。すると「このような形式 [の二つの不定数に**ガウス整数**を与えることによって表現される数] を割り切る [ガウス整] 数 $a+b\sqrt{-1}$ はどれも、再び同じ形状をもたなければならないことが証明される」（ヤコビ全集6, p . 277）。その証明はヤコビの言う「拡張された還元理論」の応用例であり、「形式 $yy+zz$ [の二つの不定数に有理整数を与えることによって表現される数] を割り切る数はどれも、ふたたび二つの平方数の和であるという周知の定理 [(1)] の完全な類似物」（同上）なのである。特に $p=a^2+b^2$ （これは、ガウス整数 $a+b\sqrt{-1}$ のノルムと呼ばれる有理整数である）は $8n+1$ 型の素数になるものとしてみよう。するとガウス整数の理論の初歩から即座に、「 $\sqrt{-1}$ は $a+b\sqrt{-1}$ の平方剰余であること、あるいは、同じことになるが、$a+b\sqrt{-1}$ は形式 $yy-\sqrt{-1}\,zz$ [で表現される何かある数] の約数であること、従って、今しがた注意がなされた定理により、それ自身、このような形をもつこと」（同上）が示される。

(1) フェルマが言明し、オイラーが証明した。

ここで、最後に主張されている事実、すなわち $\sqrt{-1}$ はノルム $p=a^2+b^2$ が $8n+1$ 型であるガウス整数 $a+b\sqrt{-1}$ の平方剰余であるという事実は、**ガウス整数域における平方剰余相互法則**の第一補充法則の、ある一つの特別の場合にほかならない。ディリクレは論文 [D-1] の中で、複素二次形式論の展開に先立って、ガウス整数を対象として、二つの補充法則を伴う平方剰余（「四次剰余」ではない）相互法則を確立した。このような点にも、ディリクレの数論の上に及ぼされたヤコビの影響の深さが見て取れるように思う。ヤコビが言及している事実については、ディリクレ全集１，p．556 参照。

さて、あらためて $a+b\sqrt{-1}=y^2-\sqrt{-1}\,z^2$ と置き、右辺を二つの因子 $y+\sqrt[4]{-1}\,z$ と $y-\sqrt[4]{-1}\,z$ に分解しよう。そうして y', y'', z', z'' は有理整数を表わすとして、

$$y=y'+y''\sqrt{-1},\ z=z'+z''\sqrt{-1}$$

と置けば、$a+b\sqrt{-1}$ は

$$y'+y''\sqrt{-1}+\sqrt[4]{-1}\left[z'+z''\sqrt{-1}\right],$$
$$y'+y''\sqrt{-1}-\sqrt[4]{-1}\left[z'+z''\sqrt{-1}\right]$$

という二つの因子に分解されることになる。これらの因子は有理整数と１の８乗根、すなわち $\alpha=\sqrt[4]{-1}$ とを用いて組み立てられている。そこで今、

$$\varphi(\alpha)=y'+y''\alpha^2+z'\alpha+z''\alpha^3$$

と置けば、簡単な計算により、

$$a+b\sqrt{-1}=a+b\,\alpha^2=\varphi(\alpha)\,\varphi(\alpha^5)$$

という分解が得られるであろう。こうして「$8n+1$ 型の素数 $p=aa+bb$

はつねに、四つの複素数の積

$$\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^3)\varphi(\alpha^5)\varphi(\alpha^7)$$

になる」(ヤコビ全集6, p. 278)。この分解から、$8n+1$ 型の素数の平方的形状[(1)]に関する周知の事実が取り出される。すなわち、すぐにわかるように、積 $\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^3)$ は $c+d\sqrt{-2}$ という形をもち、積 $\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^7)$ は $e+f\sqrt{2}$ という形をもつ(ここで c, d, e, f は有理整数を表わしている)。よって、四つの因子を二つずつの組に整理する仕方のあれこれに由来して、同じ素数が $a^2+b^2, c^2+2d^2, e^2-2f^2$ という、三通りの形で表現されることがわかる。これらの事実は「ある共通の泉から取り出された」(同上)のである。

全く同様にして、「$12n+1$ 型の素数は、1 の 12 乗根から成る四つの複素数に分解される」(同上)ことが証明される。そうしてこの場合にも、この分解から、素数の平方的形状に関する知識が取り出される。すなわち、それらの四つの因子を二つずつ組み合わせる三通りの仕方の各々の応じて、$12n+1$ 型の素数の、$a^2+b^2, c^2+3d^2, e^2-3f^2$ という三通りの平方的形状が得られるのである。

このような二つの印象の深い事例を提示した後に、ヤコビはもう一つの話題へと話を転じていく。新たな議論の糸口となるのは、p は素数とし、λ は $p-1$の約数とするとき、「素数 p は 1 の λ 乗根を用いて作られる二つの複素数の積として表示される」(ヤコビ全集6, p. 279)という、論文 [J-2] においてすでに書き留められていた事実であ

(1) ある素数 p がある二次形式 $f(x,y)$ による表現を受け入れるとき、p は平方的形状 $f(x,y)$ をもつと言う。素数の平方的形状に関する理論は、ガウス以前の近代的整数論、すなわちフェルマ、オイラー、ラグランジュ、ルジャンドルという四人の数学者の手で形成された数論の大きなテーマであった。

る。ここで言われている積表示は必ずしも一通りに限られるわけではなく、幾通りかの相異なる仕方で行なわれるのが普通である。ところが、「そのような複素数のいくつかを互いに乗じて、その積を再び他のいくつかの同種の複素数で割るとき、分母と分子の双方の複素数がどのように通分されるのかという点がはっきりしなくても、その商がやはり複素整数になる」（同上）という事態が生起することがある。ヤコビは「この注目すべき状勢に導かれて、**素数** p **のこれらの複素因子は、それら自身、一般に再び合成物でなければならないという確信を抱くに至った**」（同上）のである。このヤコビの確信こそ、理想素因子の理論への扉を開く、決定的な鍵なのであった。

もしヤコビの目が正しく見ていたとするなら、上に引用したヤコビの言葉の中で言われている「複素因子」の因数分解をさらに押し進め、「真の複素**素数**」（同上。太字の語句は、原文ではイタリック体で記されて強調されている）に達するまで続けていけば、「分母の諸因子を形成する複素素数は、分子の素因子により個々に約分される」（同上）ことになる。そうして上述のような「注目すべき状勢」の中に認められる意外性は、首尾よく解消されるのである。我々が初めに見たように、すでにヤコビは「全く別の道をたどって、$\lambda=8$ および $\lambda=12$ に対して、この結果に到達していた（同上）。そこで思い切って「このいささか骨の折れる試みを遂行した」（同上）ところ、実際に、「試行の対象として設定した $5n+1$ という形の素数に対して、双方ともに 1 の 5 乗根を用いて作られる因子の各々を、再び二つの同種の整因子に分解することに成功した」（同上）。そうして「それに続いてこのような分解が可能であることの一般的証明を見つけるのはむずかしいことではなかった」（同上）というのである。かくして「$5n+1$，$8n+1$，$12n+1$ とい

う形の素数は、各々１の ５，８，12 乗根から作られる四つの複素整数の積として表示される」（同上）ことが判明した。このような思考のプロセスを経て我々の認識の網の目にかかる複素整数は実際に素数であることが示される。そこでヤコビはそれらを対象として、５，８，12次の冪剰余相互法則の発見と証明を企図したのである。

今日ではその理由と併せて広く理解されているように、ヤコビの期待は結局、かなえられなかった。しかし影響は大きかった。実際、クンマーはヤコビの指針を忠実に踏襲し、素因子分解の手続きをもう一歩深い地点まで掘り下げて、相互法則の真の対象をなす理想素因子の鉱脈を発掘することに成功した（**クンマーに及ぼされたヤコビの影響（1）**）。ヤコビが明示した道筋は、正しく正鵠を射ていたと言わなければならないであろう。

３．無限小解析の数論への応用［ディリクレの数論］

アーベルからホルンボエへの1826年10月24日付書簡より

1826年の秋、パリに滞在中のアーベルは、友人ホルンボエに宛てて書かれた10月24日付の手紙の中で、ディリクレとの出会いを簡潔に伝えている。アーベルによれば、ディリクレは「先日、ぼくを同郷の人間と思ってぼくに会いにきたプロシア人」（アーベル全集２，ｐ．259）である。そうしてディリクレが「ルジャンドル氏とともに、方程式 $x^5+y^5=z^5$ を整数を用いて解くのは不可能であることを証明した」（同上）ことを報告し、ディリクレは「大きな洞察力をもつ数学者」（同上）であると述べている。ここで言及されている「ディリクレの証明」は、数学者と

してのディリクレの経歴の第一歩に位置するものであり、この年の前年、1825 年 7月11日に、「二、三の五次不定方程式の非可解性について」という標題でフランスの科学学士院に報告されている。ディリクレの歩みは不定解析に始まるのである。

アーベルの言葉の中で、「ルジャンドル氏とともに」という一語については多少の説明を要すると思う。学士院での報告の段階では、ディリクレの証明はなお完全とは言えず、一つの論点、すなわち「三つの不定数 x, y, z の一つが 5 で割り切れて、しかもその 5 で割り切れる不定数が奇数になる場合」の考察が今後の課題として残されていた。その後、ルジャンドルはこの不備を補い、著作『数論の試み』の第二版『数論』の第二の補遺に中で、「5次の冪に対するフェルマの定理」の完全な証明を公表した。それを受けて、ディリクレはディリクレなりに、ルジャンドルのものとは別の証明を完成した[1]。

1825 年 7月11日の学士院報告が公表された 1828 年のクレルレ誌第三巻には、

[D-2]　ある種の四次式の素因子の研究　[ディリクレ全集 1, pp. 65-98]

---

[1] ディリクレ全集（全二巻）の第一巻の冒頭の二論文はいずれも、1825 年 7 月 11 日の学士院報告と同一の標題をもっている。後者の論文（ディリクレ全集 1, pp. 23-46）は学士院報告そのものだが、クレルレ誌 3（1828 年）に掲載された時点で「補足」が書き加えられた。ディリクレの証明はこれで完成したのである。前者の論文（同上, pp. 3-20）はその完成した証明を新たに書き下して統一性をもたせたものであり、ディリクレの遺稿の中から発見されたということである（ディリクレ全集 1 の目次の中にそのように記されている。p. Ⅶ 参照）。どちらの論文でも、最終的に獲得された定理はそれ自体としては「5 次の冪に対するフェルマの定理」を包摂する一般的な形で提示されている。

という、ディリクレのもう一つの論文も掲載されている。クンマー［Ku-1］はこの論文についてこんなふうに語っている。

> 上述のガウスの二論文のうち、第一論文がまだ公にされず、その予告だけが前もってゲッティンゲン通報において公表されたとき、そこから知りうることはといえば、ある数がある与えられた素数の四次剰余であるかどうかという問題の解決は、ある種の二次形式、すなわち、法をその形に設定可能な二次形式の不定数の数値に依存するという状勢[1]のみであった。その時点で、ディリクレ氏はクレルレ誌３，ｐ．35において四次剰余に関する論文を公表した。その論文の中で、彼は、まだ知られていなかった複素数に関するガウスの新原理を使用することができず、ただ二次形式と平方剰余の理論だけを使用して、四次剰余の理論の中に深く分け入っていった。しかし四次相互法則を発見することはできなかった。［クンマー全集１，ｐ．705］

クンマーの言うように、論文［D-2］のテーマは四次剰余の理論である。この時点ではまだ、ガウス整数の導入という「ガウスの新原理」に依拠することはできず、四次剰余相互法則を独自に確立しようとするディリクレの試みは成功には至らなかった。しかし四次剰余の理論への着眼が、ガウスの第一論文［G-1］の直後にすでに始まっているという事実は注目に値する。ディリクレもまた数論におけるガウスの継承者のひとりであ

[1] ガウス「四次剰余の理論　第一論文」における二定理のうち、第一定理。p は $8n+1$ 型の素数として、$p=t^2+2u^2$ と置く。このとき、t が $8n+1, 8n+7$ 型であるか、あるいは $8n+3, 8n+5$ 型であるのに応じて、± 2 は p に関する四次剰余もしくは非四次剰余になる。

り、ヤコビのように、ガウスに触発されて相互法則への道を歩み始めたのである。

無限小解析の数論への応用

相互法則の究明に寄せるディリクレの多大な貢献の中で、最も本質的と考えられるのは、フーリエ解析の数論への応用という、斬新な技術上の着想の導入である。しかもこの着想の芽生えは非常に早く、ほとんど数学者としての出発の時点にまでさかのぼることができるようである。実際、ディリクレのアイデアが実現されるためには、何よりもまず、数論への応用を見越して構想された独自のフーリエ解析が確立されていなければならないが、論文［D-2］が公表された年の翌年、1829年のクレルレ誌第四巻にはすでに、フーリエ級数の収束性を論じる有名な論文

［D-3］与えられた限界の間で、任意の関数を表示するのに使われる三角級数の収束について　［ディリクレ全集1, pp. 119-132］

が現われているのである。そうしてこの論文の数年後には、フーリエ解析の数論への応用が具体的に開始され、鮮明な印象の伴う数々の成果に結実した。その様子を一瞥したいと思う。

まず1835年の論文

［D-4］　有限級数もしくは無限級数の総和への定積分の一つの新しい応用について　［ディリクレ全集1, pp. 239-256.］

では、ガウス自身の方法とは全く異なる方法で、ガウスの和の符号決定

問題が解決された。論文の標題に見られる「有限級数」とは、ガウスの和のことにほかならない。この論文はもとより相互法則究明の一環をなすものである。なぜならこの問題の解決の意義は、そこから平方剰余相互法則の証明が取り出されるという点に求められるからである。

1837年の論文

[D-5]　初項と項差が約数を共有しない無限等差数列はどれも、無限に多くの素数を包含するという定理の証明　[同上 , pp . 315-342 .]

では、ルジャンドルが提示した等差数列の素数定理が、初めて厳密な仕方で確立された。周知のように、この定理があれば、ルジャンドルによる平方剰余相互法則の欠陥（の一つ）が除去されるのであるから、「ディリクレ氏この名高い研究は、その由来を相互法則の究明に負っていると考えられる」（クンマー［Ku-1］. クンマー全集 1 , p . 700 ）のである。

1839～40年の論文

[D-6]　無限小解析の数論への種々の応用に関する研究　［同上 , pp . 413-496 . 1839年のクレルレ誌19と1840年のクレルレ誌21に分載された。）

は、ディリクレの数論を代表する大作である。この論文では二次形式の類数公式の確立という、著しい成果が獲得されたが、ディリクレに先立って、ヤコビは1832年の論文

[J-4]　二次形式　$yy+Azz$，ここで　A　は　$4n+3$　型の素数を表わす、の因子類の個数に関する所見　[ヤコビ全集6，pp.240-244.]

においてすでに、非常に特別な一つの場合を対象として類数公式というものの範例を与えている（**ディリクレに及ぼされたヤコビの影響（2）**）。

二次形式の類数公式の確立という出来事は、ガウスの『整数論』における二次形式論を補完する働きを示すものであり、相互法則の理論との間に直接的なつながりが認められるわけではない。ところがクンマーはディリクレの手法を用いて円分体の類数公式を確立し、その観察を通じて「正則な素数」という概念を設定するとともに、正則円分体における高次冪剰余相互法則の発見と証明に成功した。まさしくそれ故に、ディリクレの技巧上のアイデアは、相互法則の究明の流れの中で本質的な役割を果たしたと言えるのである[1]。

1841年の論文

[D-7]　複素数の理論の研究　[同上，pp.511-532.]

に移ると、等差数列の素数定理がガウス整数域に拡張された形で設定され、論文 [D-5] におけるのと同じ手法で証明されている。これは、「アリトメティカのさまざまな方法と結果のうち、このような複素数［＝ガ

[1] ディリクレの技巧はクロネッカーの楕円関数論にも深い影響を及ぼした。この論点については、後に詳細に論じたいと思う。

ウス整数］に対しても有効性を保持するもの」（ヤコビ全集6，p. 277）を列挙するという、ヤコビが明示した指針に沿う作業である。

この作業は、1842年の論文「複素係数と複素不定数をもつ二次形式の研究」（［D-1］）にも継承された。この論文では、まずガウス整数域における平方剰余相互法則が確立され、続いてその土台の上に、論文［D-6］と同様の道筋をたどりつつ、ガウス整数を係数とする二次形式の類数公式が築かれていく。そうしてそのようにして最終的に確定した結果を踏まえて、ディリクレは「複素判別式に対しては、形式の個数は一般に、モジュールが $\sqrt{\frac{1}{2}}$ の第一種完全楕円関数の等分、あるいは同じことになるが、レムニスケートの等分と関係があることが判明するのである。ただし、等分の除数、すなわち等分して生じる部分の個数は複素整数である」（ディリクレ全集1，p．538）という観察を表明した。理論的には、複素二次形式の類数の考察はガウス数体上の二次数体の類数の考察と同等である。ディリクレはこのような考察を通じて、アーベルの虚数乗法論に接近していったのである。

4．クロネッカーの学位論文と一般理論への道

複素単数の理論

複素単数の理論は、理想素因子の理論とともに、相互法則の確立のために欠くことのできない基礎理論である。この理論の意義は、下記のクンマー［Ku-1］の言葉に尽きていると思う。

ここで言及がなされた多様かつ明敏な方法、しかも二次、三次

および四次剰余を対象とする場合にはまことに適切な方法はことごとくみな、より高次の相互法則の探究のためには全然適用することができない。あるいは、せいぜいのところ非常に限定された適用が許されるにすぎない。**その真の理由は、四次を越えるや否や、この法則の根底をなす複素数を対象として生起するある特有の事情、すなわち、無限に多くの単数の存在にある。**複素素数は、それが剰余、非剰余のどちらなのかという点では、附随しうる単数として別のものを選ぶと、それに応じて全く異なる特徴をもつ。まさしくそれ故に、**最も簡明な相互法則というものは、これらの単数を整然たる秩序のもとに制御したとき、すなわち、取り扱うべき複素素数を当面の問題のために最も適切な形に選定するときに初めて提示される**のである。［クンマー全集 1，p. 707-708．太字による強調は私が行なった。］

クンマー自身、1844 年の論文

［Ku-2］　1 の冪根と実整数から作られる複素数に関する研究　［ケーニヒスベルク大学 300 周年記念に寄せるブレスラウ大学の祝賀論文。クンマー全集 1，pp. 165-192．］

において複素単数論に着手したが、このクンマーの研究を受けて、1845 年にクロネッカーの学位論文「複素単数について」（［Kro-1］）が書かれている。しかし「単数を整然たる秩序のもとに制御」するためには、最終的には「ディリクレの単数定理」の確立をめざさなければならないであろう。ディリクレはこの複素単数論の主問題を、1846 年の論文

[D-8]　複素単数の理論　[ディリクレ全集1, pp. 641-644.]

において、「きわめて一般的な、しかも遠くまで見通しのきく様式で、驚くべき単純さをもって」（[Kro-1] の序文におけるクロネッカーの言葉。クロネッカー全集1, p. 6）確立したのである。

クンマーの数論

高次冪剰余相互法則の究明はヤコビ、ディリクレ、アイゼンシュタインによってさまざまな仕方で試みられたが、その過程を通じて生起した最も本質的な出来事は、二つの基礎理論、すなわち複素単数の理論と理想素因子の理論の重要性が、非常に明確な形で認識の網の目にかかってきたという一事であった。クンマーは円分体を舞台としてこれらの二つの理論を構成し、その土台の上に、先行する三人の数学者の研究を受けて、言わば集大成のような形で一般相互法則を確立した。1859 年のクンマーの論文「素次数の冪の剰余および非剰余の間の一般相互法則について」（「Ku-1」）はその全容を詳細に描写する雄篇であり、ガウスに始まる代数的整数論の流れの中に打ち立てられた金字塔とも言うべき作品である。クンマーが確立したのは「正則円分体における冪剰余相互法則」であるから、考察の対象として取り上げられている相互法則の次数は任意ではなく、「正則な奇素数」という限定条件が課されている。それは、クンマーが依拠した方法、すなわちクンマー数体における種の理論というものの本質に起因して発生する条件である。本稿ではこの正則性条件それ自体の吟味 (1) は行なわないが、クンマー数体への移行というクンマ

(1)　これについては、高瀬正仁『ガウスの遺産と継承者たち　ドイツ数学史の

ーのアイデアの中に、「数域の拡張」というガウスの基本思想が生きて働いていることを、クンマー自身の言葉に即してここで指摘しておきたいと思う。

もとよりクンマー数体という用語それ自体はクンマーとは無縁である。クンマー自身はまず「二段重ねになっている二つの複素数の理論」を用いるという構想を表明し、続いてその意義を語っている。クンマーの言葉は下記の通りである。

> 私は、当面の目的のために、二段重ねになっている二つの複素数の理論を用いる。下層部をなす理論は方程式 $\alpha^{\lambda}=1$ の根のみを包含するものであり、私の先行する研究により既知とみなしてよい。上層部をなす理論は、このような1の λ 乗根のほかに、ある λ 次方程式の根を含んでいる。次に、この複素数の上層理論はさらに三つの相異なる階層に分かたれる。それらの相互関係は、原始目に対する導来目の関係と同一である。その関係は複素数の理論では固有の意味をもっている。すなわち、低階層では実在の**整数**としては表わされず、実在の**分数**としての表示だけしか可能ではないある種の複素数、それ故に理想数とみなさなければならないことになる複素数が、高階層の中では実在の複素整数として表わされるのである。[クンマー全集1, p. 711. 太字で表記した二語に対応する原語は、字間をあけて強調されている。]

さらにクンマーは言葉を継いで、この「相互に積み重なりあうさまざまな複素数の理論の適用を根底に据えるという考え」はガウスその人に

構想」(海鳴社 1990年)参照。

由来することを打ち明けている。

> この、相互に積み重なりあうさまざまな複素数の理論の適用を根底に据えるという考え。すなわち、通常の数に関する理論の中では見い出すのが困難であるか、あるいは、おそらく全く見つからないものを、正しく選定された複素数の理論の中で探さなければならないという考え。また、たとえ与えられなかったとしても、さらに歩を進めていっそう高いレベルの適切な理論を求めていくべきであり、そのようにして、提示された目標が達成されるまで歩みをやめないという考え。**このような考えは、複素整数の導入という元来のガウスの考えの簡単な帰結にすぎない**と見てさしつかえない。［同上．太字による強調は私が行なった。］

ガウスとクンマーを結ぶ線上に位置して、クンマーに具体的な示唆を与えた人物も存在する。それはヤコビである。

> ある複素数の理論から、いっそう高いレベルの理論への上昇の例もすでに存在する。実際、たとえば三次剰余相互法則のヤコビの証明において、$\alpha^3=1,\ x^p=1$ とし、p は $6n+1$ という形の素数としよう。すると、二根 α と x を同時に含む、円周等分のラグランジュの分解式の適用は、α のみを含む複素数から、根 α と x を含むいっそうレベルの高い理論への上昇以外の何ものでもないのである。［同上］

ここに言われている通りの状勢ではないが、ヤコビの論文［J-2］の中

には確かに、クンマーの言う「いっそう高いレベルの理論への上昇の例」が現われている（クンマーに及ぼされたヤコビの影響（２））。理想素因子の理論のみにとどまらず、我々はここでもまた、代数的整数論の形成に寄せるヤコビの本質的な貢献に出会うのである。

一般理論への道

円分体上のクンマー数体の理論と正則円分体における冪剰余相互法則が手中にあれば、それらを言わば雛形として、代数的整数に関する一般理論への道はおのずと開かれてくるであろうと私は思う。デデキントとクロネッカーはその方向に向かって実際に歩を進めたのである。その際、理論的な主柱となるのは、複素単数の理論と理想素因子の理論の構成である。また、数論の立場から見て本質的な指針として作用するのは、冪剰余相互法則の存在領域でありうるような完全に一般的な数体において、冪剰余相互法則を確立しようとする意志である。特にクロネッカーの場合には、楕円関数の特異モジュールに備わっている著しい数論的特性の解明が、デデキントには見られないクロネッカーに固有の課題として課されている。「クロネッカーの数論の解明」という視点に立脚するとき、特異モジュールと相互法則の間に認められる密接な関連の考察は、黎明期以降の代数的整数論の諸相の観察を通じてつねに中核に位置し続けるであろう。それは同時に、本稿の続篇における最も基本的なテーマである。

[平成７年（1995年）４月10日]