『大成算経』巻十一所載の「帯不尽」なる図形について

佐藤賢一

はじめに

本稿が主題とする帯不尽とは、和算家によって考察された一図形群の名称である。しかし、従来の和算史において、この帯不尽はさほど顧みられる対象ではなかった。その理由として、幾つかを挙げることができる。

まずこの帯不尽は、『大成算経』(1711 年、未刊)の巻十一に初めて登場し、しかも、これ以後の和算家によって継続して研究された形跡がない。『大成算経』(全二十巻)は、関孝和と建部賢明、賢弘兄弟の共編になる数学の一大叢書である。関と建部兄弟の知名度、あるいは彼らが後世の和算家に与えた影響という点を考慮するならば、帯不尽は例外的に、後継者達に興味を喚起させなかった対象であったと言えよう。従って、史家が帯不尽について言及するのは、『大成算経』を語る文脈においてばかりであった、という事態が常になっていたのである。しかも不思議なことに、『大成算経』自身が、これまで史家をしてその追究を敬遠させてきたかのような印象を持たせるほど、先行研究の少ない著作であった。従って、なおさら帯不尽について言及されることは稀だったのである。

また、『大成算経』の内容に踏み込んでみるならば、この帯不尽という図形は巻十一に登場する。この巻は正多角形の理論である「角術」の解説に当てられている。帯不尽は、その定義については後に詳説するが、正多角形の一変形として扱われており、正多角形の議論の後に帯不尽の考察が付加的に為されている。これまでのところ史家の注目を惹いてきたのは、正多角形の理論の方のみである。帯不尽の研究に着手しようにも、その前提となるべき正多角形の議論の中に未解決の歴史的問題が多数存在していたこともあり、とても帯不尽までは手が回らなかったというのが、偽らざる実状であった[(1)]。

このような帯不尽を改めて検討する意義は、次のような点に求められる。第一に、関孝和、建部兄弟という著名な和算家が関与した数学上の事項であるということである。彼らの数学について不明な点があるならば、是非とも真っ先に解決しなければなるまい。少なくとも、彼らの数学が後世の和算家に対して与えた影響の大きさを考慮するならば、たとえ帯不尽のように後続する研究がなかったものであったとしても、史学的な分析を遂行し、その本質を究明することは必要であ

る。

第二に、既に筆者は別稿において、『大成算経』巻十一の正多角形に関する部分の紹介を終えている[2]。筆者自身の問題意識として、その次の段階に取り組むべき帯不尽の未解決問題を解くことは、『大成算経』の角術の解読にとって是非とも必要とされるものなのである。

第三に、これは帯不尽が和算家の興味を惹くことがなかったということの予期せぬ副産物なのであるが、『大成算経』巻十一の帯不尽の記述において、写本によって非常に顕著な差異が確認される。これは、写本の流伝の過程で、無批判かつ機械的に筆写が行われ、誤解・誤写が蓄積された結果そのようになったのであるが、この帯不尽の記述の差異を比較することにより、これまで不明であった『大成算経』の写本間の異同、系統がある程度分かるようになるのである。すなわち、帯不尽の記事は『大成算経』の写本そのものの歴史に重要な手懸かりを提供するのである。

このような意義を持つ帯不尽に関して、以下の本文では次のような構成に基づいて論を展開する。まず、帯不尽について述べる前に、その前提となる「角術」について簡単に述べ(第一章)、その後に、「帯不尽」に関する『大成算経』の原文の記述を訳出し、解説を加える(第二章)。最後に、『大成算経』の写本の伝来を知る上で参考となる帯不尽の記述の写本間の相違について検討を加える(第三章)。

1. 角術について

(1)角術の概略

本章では帯不尽に関する議論を進める上で必要な予備知識を紹介する。抑も、帯不尽を収録する『大成算経』の巻十一は、「角術」、すなわち和算における正多角形の理論を展開している。角術の内容は、次のように整理される。

角術とは、一辺の長さ(通常は一尺、または一寸とする)が与えられた正多角形において、次の値を計算する解法である。

①外接円の半径(角径、以下 R とおく)を求めること

②内接円の半径(平径、以下 r とおく)を求めること

③面積を求めること

これら三つの計算が角術の主要部分を為す。②の r が得られれば、③の面積は

容易に得られるので、角術の実質的な内容は①と②の計算のみになる。

関孝和が創始した角術の解法は、正多角形の問題に初めて天元術を応用することであった[3]。正確に言うならば、関は正多角形の対角線等の直線図形のみを補助線とし、それらの長さを補助未知数として R あるいは r についてのみの開方式[4]を構成するために天元術を応用したのである。

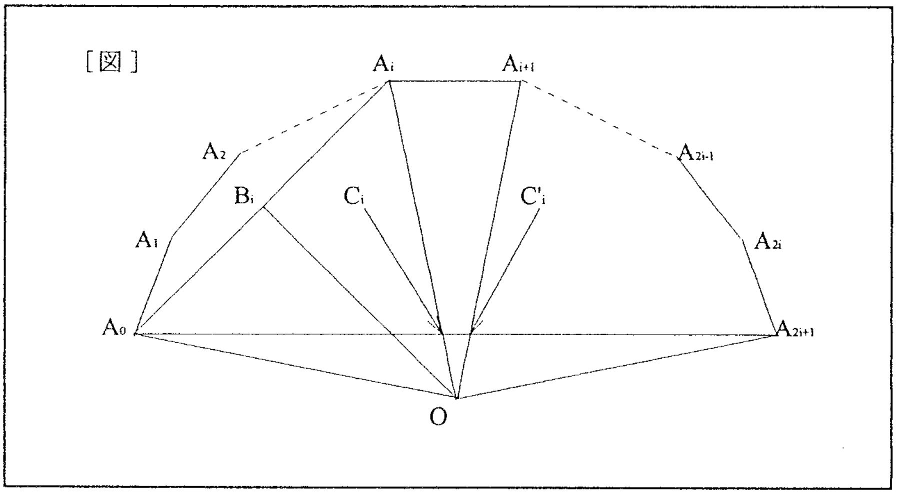
天元術を角術に応用することにより、一旦開方式が構成されたならば、それを数値計算的に解くことにより、任意の精度の解(R や r)が得られる。そこで次の問題は、いかなる補助線を導入し、それらをどのように処理して開方式を構成するのかということである[5]。

(2)補助線の名称について

以下、『大成算経』が導入する補助未知数について、その名称を列記する。ここでは正多角形を対象とした記述を行っているが、『大成算経』では同じ用語法が帯不尽に対しても適用される。

下図において、一辺 a の正多角形の中心を O とする。ある頂点を A_0 とし、順に A_1, ..., A_{2i+1} まで選ぶ。このとき、O から A_0A_i に下ろした垂線の足を B_i とする。また、OA_i と A_0A_{2i+1} の交点を C_i, OA_{i+1} と A_0A_{2i+1} の交点を C'_i とする。関と建部兄弟は、各線分に名称を与え、それぞれの長さを次のような補助未知数として設定している。(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, r_i, α_i は筆者による記号。)

$A_0A_i = a_i$;係 i 面斜　($a_1 = a$ とする)
$OB_i = r_i$; i 面中闊　($r_1 = r$ とする)
$OC_i = OC'_i = b_{2i+1}$; $2i+1$ 面中報角径　($b_1 = R$ とする)
$C_iC'_i = c_{2i+1}$; $2i+1$ 面中報面　($c_1 = a$ とする)
$A_0C'_i = d_{2i+1}$; $2i+1$ 面長斜　($d_1 = a$ とする)
$A_0C_i = e_{2i+1}$; $2i+1$ 面短斜　($e_1 = 0$ とする)
α_i ; a_i 上の汎数
(但し $a : R = a_i : \alpha_i$ によって定義する)。



(3)開方式構成の際に用いる公式

上で見た補助未知数の間に、以下のような公式が成立することを『大成算経』巻十一では述べている。そこで用いられている知識は、図形の対称性や三平方の定理、直角三角形間の相似といった非常に初等的なものばかりである。

［公式Ⅰ］ $4R^2=4r^2+a^2$ ［公式Ⅱ］ $2a_ir_i=a_{2i}R$

［公式Ⅲ］ $2R^2-a_i^2=2r_{2i}R$ ［公式Ⅳ］ $2r_{2i}-b_{2i-1}=b_{2i+1}$

［公式Ⅴ］ $ab_{2i-1}=c_{2i-1}R$ ［公式Ⅵ］ $b_{2i-1}r=r_{2i-1}R$

［公式Ⅶ］ $d_{2i-1}=c_{2i-1}+e_{2i-1}$ ［公式Ⅷ］ $d_{2i-1}=e_{2i+1}.$

［公式Ⅸ］ $d_{2i-1}+e_{2i-1}=a_{2i-1}$

［公式Ⅹ］ $a_{2i+1}=2r_{2i}+2r_{2i-2}+\ldots\ldots+2r_2+R$

$=b_{2i+1}+2b_{2i-1}+2b_{2i-3}+\ldots\ldots+2b_3+2R.$

（いずれも $i \geqq 1$ とする）

これらの公式を用いることにより、導入した補助未知数を順次消去し、最終的には角径のみ、または平径のみの開方式を導くのである[6]。

3.『大成算経』巻十一における帯不尽の原文について

本章では『大成算経』巻十一における帯不尽の記述を掲げ、訳と註を付す。この巻において、帯不尽に関する記述は断片的に現れる。正多角形に関する議論

が優先され、その記述が終わった後に、補足的に帯不尽について言及されるからである。従って、以下で引用する原文は必ずしも連続した箇所ではなく、飛び飛びの箇所が引用されることになる。

原文中、( )の中の文字は割註であることを示し、訳文中、[ ]の中の文字は訳者による補足を示す。また、原文には無い句読点を付し、適宜、文に番号を付けるなどしている。底本に用いた写本は、東京大学総合図書館所蔵の『角法』という、『大成算経』巻十一の異本を用い、随時他の写本を参照している。尚、原文の丁数は例えば(25 オ)、(18 ウ)のように表して、それぞれ「第 25 丁表」、「第 18 丁裏」であることを示すものとする。

(1)帯不尽の定義について

これまで、帯不尽の定義に関して全く言及せずに論を進めてきたが、『大成算経』による定義は非常に簡単なものである。

> 「角者謂諸斜各等者也。[中略] 然角数有奇偶。偶有単雙。亦有帯不尽者。」(1 オ)

[訳]正多角形とは各辺が等しいもののことである。[中略] 然るに、正多角形の角数には奇と偶がある。偶にはさらに 4 で割り切れないもの[単]と割り切れるもの[雙]がある。また、不等な一辺を持つ図形[帯不尽]もある。

この箇所は巻十一の冒頭の部分である。「帯不尽」とはその字の如く、「不尽」を「帯びた」ものという意味付け、しかもそれのみが示されている。「不尽」とは和算の用法では「余り」、「端数」という意味で用いられるのが常である。ここの「不尽」は、本来の正多角形に、「余分で不等な辺」を付加した図形という意味合いで用いられている。しかしこの定義は余りにも簡略に過ぎている。巻十一の以後の議論と照らし合わせ、我々の現代的な用語で敷衍して述べるならば、次のようになろう。すなわち「帯不尽」とは、「一辺の長さのみが不等な多角形で、線対称、且つ、円に内接するもの」である[7]。

帯不尽という語はこのような図形の総称で、個々の図形の名称としては$(n+1)$角形の帯不尽のことを「 n 角余」(または「 n 角有余」)という名称で表現する。一番簡単な図形は二等辺三角形としての「両角余」である。以下、「三角余」(実際は四角形)、「四角余」(同、五角形)、等々となる。なお、角数を一般的に偶数と奇数に分

類し、「偶角有余」、「奇角有余」とする総称の表現も原文中では用いられる。

帯不尽の一つだけ不等な辺のことを「畸面」と呼ぶ。(本論では a' の記号を用いる。)また、帯不尽の中心から畸面に下ろした垂線の長さを「畸径」(記号 ρ を用いる)とし、畸面と等辺との比(a' / a)を「余数」あるいは「畸零数」(t とする)という。その他の用語、補助線の名称等は正多角形の場合に準じて用いられる。

(2)定乗数について

帯不尽に関する定義が述べられた後、巻十一が話題とするのは「定乗数」である。この定乗数とは、角径や平径、畸径を求めるための既約開方式の次数と定義される(8)が、原文では「偶角有余」と「奇角有余」の二つの場合に分けた定乗数の結果のみが記されている。値のみを記されても、我々としては全く何も理解できないのであるが、ここは巻十一の記述の順序に従って原文を紹介し、後に説明を加えることとする。

> 「角数帯不尽者(若角数言不足者、皆以不足数減原角数、余為有畸数。故其奇偶相反也)奇角有余者、置角数内減二箇、余即為求平径角径及畸面之径式各定乗数。偶角有余者、置角数倍之、得内減三箇、余為求平径角径及畸面之径式各定乗数也。」 (4 オ)

[訳]角数が不尽を帯びる場合。(もし角数が「不足」という場合はすべて、もとの角数から「不足数」[1]を引いて、残りをこの図形の角数とする。よって、[図形の名称としての「 n 角有余」と「 $n+1$ 角不足」は同じ図形を指すけれども、その角数の]奇偶は逆転する。)「奇角有余」の場合は、角数から二を引くと、求める平径、角径、畸面の径の開方式の定乗数となる。「偶角有余」の場合は、角数を二倍して三を引くと、求める平径、角径、畸面の径の開方式の定乗数を得る。

さらに、定乗数の具体例が紹介される。

> 「如(奇)七角有余者、置角数(七)内減二箇余(五)即為求平径角径及畸面之径式各定乗数。又(奇)九角不足者、以不足数(若干)減原角(九)、反為(偶)八角有余。故倍其数得(一十六)、内減三箇余(一十三)為定乗数。如(偶)六角有余者、置角数(六)倍之得(一十二)内減三箇余(九)為求平径角径及畸面之径式各定乗数。又(偶)十角不足者、以不足数(若干)減原角

(一十)、反為(奇)九角有余。故置其数内減二箇余(七)為定乗数也。」

(5オ)

[訳]例えば奇数角の七角有余は角数の七より二を引き、求める平径、角径、畸面の径の開方式の定乗数とする。また、奇数角の九角不足は、もとの角数の九より不足数[1]を引き、[角数の奇偶が]逆転して偶数角の八角有余となる。よって、その数を倍にして十六を得て、そこから三を引いた余り十三を[平径、角径、畸径の]定乗数とする。例えば奇数角の六角有余の場合、角数六を倍にして十二を得る。これより三を引いた余り九が、平径、角径、畸面の径の開方式のそれぞれの定乗数である。また、偶数角の十角不足は、もとの角数十から不足数[1]を減じ、[角数の奇偶が]逆転して奇数角の九角有余となる。よって、この九から二を引いた余り七が[平径、角径、畸径の]定乗数である。

先の段落で述べられている定乗数の計算式は、次のように表現される。帯不尽の角径、平径、畸径に関する開方式の定乗数を J とすると、奇角有余(角数を $2p+1$ とする)の定乗数は、$J = (2p+1) - 2 = 2p - 1$ となる。また、偶角有余(角数を $2p$ とする)の定乗数は、$J = 2 \cdot 2p - 3 = 4p - 3$ となる。

後の段落は、実際に角数を挙げた例示である。その計算式は次のように表現される。

七角有余の定乗数。　$J = 7 - 2 = 5$.

九角不足(八角有余に他ならない)の定乗数。

$$J = 2 \cdot 8 - 3 = 13 .$$

六角有余の定乗数。　$J = 2 \cdot 6 - 3 = 9$.

十角不足(九角有余のこと)の定乗数。

$$J = 9 - 2 = 7 .$$

原文の直訳と数式による解釈は以上のようになるわけであるが、肝腎の「開方式」が提示される前に、それを前提とした「定乗数」が述べられているということは我々に少なからぬ戸惑いを与えるのだが、ここは辛抱して次に開方式の構成法について見てみることにしよう。

(3)開方式の構成について

(i)奇角有余の開方式について

本項では、奇角有余の開方式の構成法を述べた部分を訳出する。

「若角数帯不尽者皆以毎面乗畸零数得畸面。奇角有余者(若言不足数、以之減原角数余為有畸数。是故奇者反為偶角有余。偶者反為奇角有余。而後各依其術求之)置角数加一、得数折半之為第一係面数。又置角数減一、余折半之為第二係面数。視第一係面数奇者即止。偶者逓折半之、到得係面奇数而止。(乃係奇数者中闊与稜不相對、而表裏各不能作半稜之形。故止之也。後倣此。)」 (9オ)

[訳]もし多角形の[一辺が]不尽を帯びるならば、辺に畸零数を掛けて畸面を得る。奇角有余の場合は([もし有余ではなく]「不足数」と言うならば、もとの角数より[1 を]引いて、その余りを帯不尽の角数とする。そのため、もとの表現が「奇」であれば反転して「偶角有余」となり、「偶」であれば反転して「奇角有余」となる。このようにしてそれぞれの術を求める。)角数に一を加え、それを折半し、得た数を第一係面数とする。また、角数より一を引いて、それを折半して得た数を第二係面数とする。第一係面数を見てそれが奇数ならば、そこで以後の操作を打ち切る。偶数ならば順次折半していき、奇数を得るまで続ける。(すなわち[係面数が]奇数の場合、中闊と角径[「稜」]は直交[「相対」]せず、その係面斜のどちらの側[「表裏」]をとっても[左右対称性が得られないので]半稜の形[[公式Ⅱ]を適用するための、係面斜を辺とする鈍角二等辺三角形]を作ることができない。よって、ここで操作を止める。以後これに倣う。)

ここで訳出した箇所には、次のようなことが述べられている。

以下、奇角有余の角数を $n = 2m+1$ とおく。まず第 i 係面数という数列$\{k(i)\}$を設定する。これは[公式Ⅱ]を適用するための準備である。その数列を次のように定義する。すなわち、 $(n+1)/2 = m+1 = k(1)$, $(n-1)/2 = m = k(2)$ とし、もし $k(1)$ が奇数ならばここで操作を止める。偶数ならば、順次 2 で割って第 3 、第 4 係面数とし、奇数を得たところで操作を止める(9)。これが、第 i 係面数の数列である。この数列の用い方は次の段落で述べられる。

「起於第一係斜至第二、作勾股。従第三至末随形之屈伸作半稜及圭求之。幷原面与畸面乗角径、為因第二中闊二箇第一係斜。亦乗角径、為因第二中闊因第三中闊四箇第三係斜。復乗角径、為因第二中闊因第三中闊因第四中闊八箇第四係斜。逐如此至末係斜。乗角径而後省面、則角

径幾乗巾与畸零添一箇数相乗者、為因末係斜之汎数(若原面為最末係斜者、以平径即為汎数也。後倣此)因毎件中闊若干箇第二中闊。以之為先数。求其末係斜之汎数為後数。亦求毎件中闊(若中闊係面奇数者、求其中報角径而後、乗平径為因角径中闊也)逐相乗而亦斉段数寄左。以角径幾乗巾乗先数而斉乗数相消得式。」(9オ -9ウ)

[訳]第一係面斜より始めて第二[係面斜]にいたるが、[この二つを斜辺とし、畸面の対辺を底辺とする]直角三角形を[二つ]作る。第三[係面斜]より最後の係面斜については、頂角の鈍、鋭に従って、「半梭」あるいは「圭」を作って、[以下の「先数」の式と「後数」の式を]求める。辺と畸面の和に角径を乗じたものは、第二中闊を掛けた第一係面斜の二倍である。これにまた角径を乗じると、第二中闊、第三中闊を掛けた第三係面斜の四倍である。さらに角径を乗じると、第二中闊、第三中闊、第四中闊を掛けた第四係面斜の八倍となる。順次このようにして最後の係面斜[すなわち奇数面が出るところ]まで計算を行う。その式に角径を乗じて辺を簡約すると、角径の幾乗かに畸零数と一を加えた和を掛けた数が、最後の係面斜の汎数(もし一辺が最後の係面斜となった場合は、平径を汎数とする。以下このようにする)、そしていくつかの中闊、そして若干数を掛けた第二中闊に等しくなる。[この式を]先数とする。最後の係面斜の汎数を求めて後数とする。また、それぞれの中闊(もし中闊の中で奇数面に係るものがあれば、その中報角径を求めた後、平径を乗じ、角径を掛けた中闊に変形する)を求めて、順にそれらを掛け合わせ、数係数を整えて「寄左」の式とする。角径の何乗かを先数に掛け、乗数を整えて「相消」の式とし、開方式を得る。[最後の開方式は「寄左」=「相消」によって得られるものである。]

第 i 係面数の数列$\{k(i)\}$を得た後の操作について、ここで訳出した部分は次のように述べる。まず $a_{k(1)}$、$a_{k(2)}$ と帯不尽の一辺を用いた直角三角形を二つ作る。これは畸面の両端から対辺に向かって垂線を下ろしたときにできる直角三角形である。ここで、

$$(a+a')R = 2a_{k(1)}r_{k(2)}$$

という関係式が成り立っていることが証明無しに言及されている。さて $n = 2m+1$ とすると、$(a+a')R = 2a_{m+1}r_m$となる[10]。この式に R を乗じると、

$$(a+a')R^2 = 4a_{k(3)}r_m r_{k(3)} \quad \text{を得る。}(\because[公式II])$$

$k(i)$が偶数である限り同様の操作を続け、$k(u) = 2v+1$ (奇数)となった時点で汎

数 $\alpha_{k(u)}$を導入し、

$$(a+a')R^{u-1}\cdot R = 2^{u-1}\cdot a_{k(u)}\, r_{k(u)}\, r_{k(u-1)} \ldots\ldots\ldots\ r_m\cdot R$$
$$= 2^{u-1}\cdot a\ r_{k(u)}\, r_{k(u-1)} \ldots\ldots\ldots\ r_m\cdot \alpha_{k(u)}.$$

$\therefore (1+t)R^u = 2^{u-1}\cdot r_{k(u)}\, r_{k(u-1)} \ldots\ldots\ldots\ r_m\cdot \alpha_{k(u)}$ 　($\because\ a' = at$)　とする。

この式が「先数」である。「後数」の式は、上で導入した汎数を諸公式を用いて式変形し、r または R のみの式としたものとする。($k(u)=1$ のときは r を汎数とみなす。)これ以後の式操作の具体的な方法は述べられておらず、最終的な開方式の構成の仕方については、ここで訳出した部分では曖昧にしか分からない。さらに後に述べられる実例で検討されることとなる。以上が、この部分で述べられている内容の現代的な解釈である。

(ii)偶角有余

本項では、「偶角有余」の開方式構成法の原文を訳出する。

「偶角有余者(乃不論単雙也)置角数折半之、為第一係面数。其数奇者即止。偶者逐折半之、到得係面奇数而止。起於第一係斜逐作半梭及圭求之。以畸面乗角径、為因第一中闊二箇第一係斜。又乗角径為因第一中闊因第二中闊四箇第二係斜。復乗角径為因第一中闊因第二中闊因第三中闊八箇第三係斜。逓如此至末係斜。乗角径而後省面則角径幾乗巾与畸零数相乗者、為因末係斜之汎数因幾件中闊若干箇第一中闊。即自乗為先数。求其末係斜之汎数為後数。又求毎件中闊(若中闊係面奇数者求中報角径而後、乗平径也)逐相乗而後自乗、亦乗平径巾、亦斉段数寄左。以角径幾乗巾乗先数、而斉乗数、相消得式。」

(9ウ - 10オ)

[訳]偶角有余(単偶と雙偶の区別はしない)は、もとの角数を折半して第一係面数とする。これが奇数ならばそこで止める。偶数ならば順次これを折半していき、係面数が奇数になったところで止める。[先数の構成を]第一係斜より始めて、順次半梭及び圭を作って求める。畸面を角径に乗じたものは、第一中闊を掛けた二倍の第一係面斜に等しい。また角径を乗じると、第一中闊、第二中闊を掛けた四倍の第二係面斜に等しくなる。さらに角径を乗じると、第一中闊、第二中闊、第三中闊を掛けた八倍の第三係面斜に等しくなる。順次このようにして、最後の係面斜にまで至る。[最後にこの式に]角径を乗じ、辺を簡約するならば、角径の何

乗かに畸零数を掛けたものが、最後の係斜の汎数といくつかの中闊を掛けた何倍かの第一中闊に等しくなる。すなわち、これを自乗して先数とする。その最後の係斜の汎数を[式変形によって]求めて後数とする。また、[これらから開方式を構成するには]各中闊を[式変形によって]求めて(もし中闊が奇数面にまたがっているならば中報角径を[式変形によって]求めた後、平径を乗じる)、それらを順次相乗した後自乗し、さらに平径の自乗を乗じ、数係数を整えて寄左とする。角径の何乗かを先数に乗じて乗数を整えて、相消とし、開方式を得る。

ここで訳出した部分についての現代的な解釈は、以下のようになる。

偶角有余の第 i 係面数の数列の求め方は、奇角有余の場合と同様の方法となるが、より単純になる。すなわち、奇角有余では $k(1)$と $k(2)$を別のものとして設定したが、偶角有余の場合は $k(1)$のみを考えればよい。まず n 角有余($n = 2m$)において、$k(1) = n / 2 = m$ とする。以下、順次折半していき、奇数を得るまで続ける。そこで、$k(u) = 2v+1$ を得たとする。「先数」の式の構成は次のようになる。[公式Ⅱ]を応用して、$a' R = 2\, a_{k(1)}\, r_{k(1)}$ を得る。これに[公式Ⅱ]の結果を乗じていくと、 $a' R^2 = 4\, a_{k(2)}\, r_{k(2)}\, r_{k(1)}$, $a' R^3 = 8\, a_{k(3)}\, r_{k(3)}\, r_{k(2)}\, r_{k(1)}, \ldots\ldots$ となる。

最後に、$a' R^u = 2^u \cdot a_{k(u)}\, r_{k(u)}\, r_{k(u-1)} \ldots\ldots\, r_{k(1)}$ に R を掛け、汎数 $\alpha_{k(u)}$ を導入して次のように簡約する。

$$
\begin{aligned}
a' R^u \cdot R &= 2^u \cdot a_{k(u)}\, r_{k(u)}\, r_{k(u-1)} \ldots\ldots\, r_{k(1)} \cdot R \\
&= 2^u \cdot a\, r_{k(u)}\, r_{k(u-1)} \ldots\ldots\, r_{k(1)} \cdot \alpha_{k(u)} . \\
\therefore\ t\, R^{u+1} &= 2^u \cdot r_{k(u)}\, r_{k(u-1)} \ldots\ldots\, r_{k(1)} \cdot \alpha_{k(u)} .
\end{aligned}
$$

この式を自乗したものを「先数」とする。「後数」は、ここで導入した汎数を式変形することにより、r または R のみの式を構成して得る。「先数」と「後数」から開方式を構成する具体的な方法については、奇角有余の場合と同様、実例に即して述べられることとなる。以上が、この部分で訳出した内容である。

(4)七角有余、六角有余による実例

本項では、開方式の構成の具体例として挙げられている七角有余と六角有余についての記述を訳出する。

(i)七角有余

「仮如(奇)七角有余者、置角数(七)加一折半之得第一係面数(四)。又置角数減一余折半之得第二係面数(三)。視第一係面数(四)偶数。故即折

半之得第三係面数(二)。又折半之得第四係面奇数(一)而止。以原面乗畸零数得畸面。即并原面(以之視二箇第一大勾)乗角径(視第二小弦)為因第二中闊(視第二小勾)二箇第一(四面)係斜(視第一大弦)。又乗角径(視第三半梭面擬中斜)為因第二中闊因第三中闊(視第三半梭闊)四箇第三(二面)係斜(視四箇第三半梭長擬八箇第三中股)。又乗角径(視第四圭面擬大斜)為因第二中闊因第三中闊因平径(是第四中闊視圭長)八箇原面(是八箇第四係斜視圭闊)。於是省原面則角径再乗巾与畸零添一箇数相乗者為因第二中闊因第三中闊八箇平径。以之為先数。又視最末(一面)係斜即原面。故以平径即為後数。」(15ウ - 16ウ)

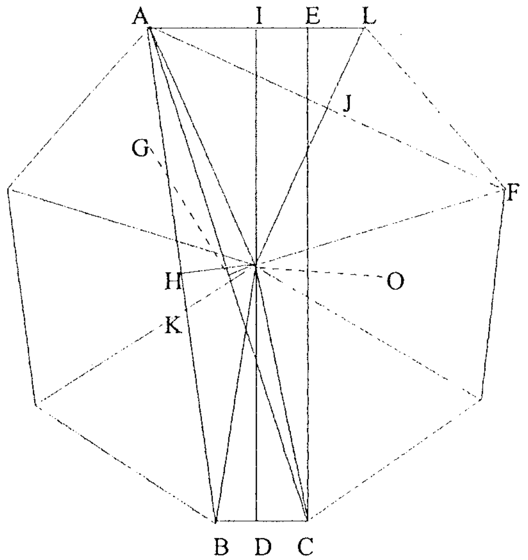
[訳]例えば、奇角有余である七角有余の場合、角数七に一を加えて折半し、これを第一係面数の四とする。また、角数の七より一を引いた余りを折半して、第二係面数の三を得る。第一係面数の四を見ると偶数である。よって、これを折半して第三係面数の二を得る。またこれを折半すると、第四係面数が奇数である一なので、ここで止める。辺を畸零数に掛けて、畸面の長さを得る。これと辺を併せた数(二倍の第一大勾[直角三角形の最短の辺、下図参照]に相当する)を角径(第二小弦[直角三角形の斜辺、下図参照]に相当する)に乗じると、第二中闊(第二小勾に相当する)を掛けた二倍の第一(四面)係斜(第一大弦に相当する)となる。これにまた角径(第三半梭の面に相当し、中斜と見なす)を乗じると、第二中闊、第三中闊(第三半梭の闊に相当する)を掛けた第三(二面)係斜(四倍の第三半梭の長に相当し、八倍の第三中股と見なす)の四倍となる。さらに角径(第四圭の面に相当し、大斜と見なす)を乗じると、第二中闊、第三中闊、平径(これは第四中闊で、圭の長に相当する)を掛けた八倍の辺(これは八倍の第四係斜で、圭の闊に相当する)となる。この式から辺を簡約すると、角径の三乗と畸零数に一を加えた数を掛けたものが、第二中闊、第三中闊を掛けた八倍の平径に等しくなる。この式を先数とする。また、最後の一面係斜を見ると、これは辺である。よって、平径を後数とする。

[七角有余の演段図]

(17 オ)には、以下の如き七角有余の演段図が掲げられている。また、各線分には以下のような名称が記されている。

AC =第一係斜[係四面斜]、　AB =第二係斜[係三面斜]、
AF =第三係斜[係二面斜]、　AL =原面即係第四斜、

OG =第一中闊[四面中闊]、　OH =第二中闊名丑[三面中闊]、
OJ =第三中闊名子[二面中闊]、　OI =平径即第四中闊、
OK =三面中報角径名寅、　OC =角径、
OD =畸径、　BC =畸面



この図において、「第一鈎股弦」とは直角三角形 ACE のことを指し、その「第一大勾」とは AE 、「第一大弦」とは AC のことである。また、「第二鈎股弦」とは直角三角形 OAH のことを指し、その「第二小弦」とは OA 、「第二小勾」とは OH のことを指す。

さて、ここで訳出した部分に述べられている内容を、数式を用いて表現すると次のようになる。まず、第 i 係面数の数列を導く。

$k(1) = (7+1)/2 = 4,\ k(2) = (7 - 1)/2 = 3,\ k(3) = k(1)/2 = 2,\ k(4) = k(3)/2 = 1.$
次に「畸面」を求める。 $a'=at.$(この畸零数 t はあらかじめ問題において与えられているものとする。従って、既知数として扱われる。)これらの準備をもとに、以下、「先数」と「後数」の両式を求める。先に紹介した公式に基づいて、次のような式が構成される。

$(a+a')R = 2a_4 r_3,$　［前項で訳出した式］
$(a+a')R^2 = 4a_2 r_3 r_2,$　［公式 II ］
$(a+a')R^3 = 8a r_3 r_2 r.$　［公式 II ］
$\therefore (t+1)R^3 = 8r_3 r_2 r.$　これを「先数」とする。

そして奇数面の中闊である r を「後数」とする。以上がこの段落の内容である。

[平径の開方式について]

> 「據此両数而求平径者、①并面巾与四段平径巾為四段角径巾、再自乗、又乗畸零添一箇数為因角径再乗巾因平径因子(是第三中闊)五百一十二箇丑(是第二中闊)寄甲位。②以倍面巾減四段角径巾余為因角径四箇子(是第三中闊也)寄乙位。③又以四段面巾減四段角径巾余為因角径四箇寅(是第二中報角径也)、乗乙位為因角径巾因子一十六箇寅、又乗平径巾以三十二乗之為因角径再乗巾因平径因子五百一十二箇丑寄左。④以甲位便与寄左相消得求平径式。」(16ウ)

[訳]この両数から平径[の開方式]を求める。①辺の自乗と平径の自乗の四倍をあわせると角径の自乗の四倍となる。これを三乗し、さらに畸零数に一を加えた数を掛けると、角径の三乗、平径、子(これは第三中闊)を掛けた丑(これは第二中闊)の五百十二倍となる。これを甲位とする。②辺の自乗の二倍を角径の自乗の四倍から減じた余りは、角径を掛けた子(これは第三中闊である)の四倍である。これを乙位とする。③辺の自乗の四倍を角径の自乗の四倍から減じた余りは、角径を掛けた四倍の寅(これは第二中報角径)である。これに乙位を掛けると、角径の自乗、子を掛けた寅の十六倍となる。さらに平径の自乗を掛けて三十二倍すると、角径の三乗、平径、子を掛けた五百十二倍の丑となる。これを寄左とする。④甲位を直接寄左と相殺することにより、求める平径の[開方]式を得る。

ここで訳出した部分の内容を、数式によって表現すると以下のようになる。

① $a^2 + 4r^2 = 4R^2$ [公式 I], $(1+t)\cdot(4R^2)^3 = 512R^3 r_3 r_2 r$ [先数より].
この式を「甲位」とする。

② $4R^2 - 2a^2 = 4r_2 R$ [公式Ⅲ]. この式を「乙位」とする。

③ $4R^2 - 4a^2 = 4b_3 R$ [公式Ⅲ]、[公式Ⅳ], $4b_3 R\cdot$乙$=16\cdot b_3 r_2 R^2$,
$32r^2\cdot 16b_3 r_2 R^2 = 512R^2 r_3 r_2 r$ [公式Ⅵ]. この式を「寄左」とする。

④甲$= 512R^2 r_3 r_2 r$. この式を「相消」とする。ここで、(寄左) = (相消)より平径の開方式を得る。

さて、この式操作の背後に隠されている開方式の構成法は、以下のようになる。

まず、先数 $(t+1)R^3 = 8r_3 r_2 r$ の右辺の文字、r_3 と r_2 を消去する。すなわち、$r_3 R^2 = b_3 r R = r(R^2 - a^2)$, $2r_2 R = 2R^2 - a^2$ となる。そこで、これらの式変形を用

いるために、先数に角径の三乗を掛ける。すなわち、

$$(t+1)R^6 = 8r_3r_2r \cdot R^3 = 4r^2(R^2 - a^2)(2R^2 - a^2).$$

角径の部分を[公式 I]によって平径の式とするために、式全体を 64 倍する。よって、$(t+1)(4r^2 + a^2)^3 = 32r^2(4r^2 - 3a^2)(4r^2 - a^2)$ という平径の開方式を得る。ここでは先数のみが操作の対象となっているが、その理由は後数である平径に何の式変形も加えられないからである。このように見ると、後数は先数と対を為すためのみに言及されているに等しい。

[角径の開方式について]

「求角径者、①角径再自乗又乗畸零添一箇数為因平径因子八箇丑寄甲位。②以面巾減四段角径巾余為四段平径巾。③又以面巾減二段角径巾余為因角径二箇子寄乙位。④亦以面巾減角径巾余為因角径寅、乗乙位為因角径巾因子二箇寅、又乗四段平径巾為因角径再乗巾因平径因子八箇丑寄左。⑤以角径再乗巾乗甲位与寄左相消得求角径式。」

(16ウ - 17ウ)

[訳]角径[の開方式]を求める。①角径を三乗し、畸零数に一を加えた数を乗じると、平径、子を掛けた丑の八倍となる。これを甲位とする。②辺の自乗を角径の自乗の四倍から減じた余りは、平径の自乗の四倍である。③また、辺の自乗を角径の自乗の二倍から減じた余りは、角径を掛けた子の二倍となる。これを乙位とする。④また、辺の自乗を角径の自乗から減じた余りは、角径を掛けた寅である。これに乙位を乗じると、角径の自乗、子を掛けた寅の二倍となる。さらに平径の自乗の四倍を乗じると、角径の三乗、平径、子を掛けた丑の八倍となる。これを寄左とする。⑤角径の三乗を甲位に掛けたものを寄左と相殺し、求める角径の[開方]式を得る。

ここで訳出した部分に述べられている内容を、数式によって表現すると次のようになる。

①$(1 + t)R^3 = 8r_3r_2r$　この式を「甲位」とする。

② $4R^2 - a^2 = 4r^2$

③ $2R^2 - a^2 = 2r_2R$　この式を「乙位」とする。

④ $R^2 - a^2 = b_3R,\quad b_3R \cdot 2r_2R = 2b_3r_2R^2,\quad 4r^2 \cdot 2b_3r_2R^2 = 8R^3r_3r_2r$.

この式を「寄左」とする。

⑤ $R^3 \cdot$甲$= 8R^3 r_3 r_2 r$.　この式を「相消」とする。ここで、(寄左) ＝ (相消)より、角径の開方式を得る。

開方式の構成法は、平径の場合と全く同様の手順によっている。

[畸径の開方式について]

「求畸面之径者、①以面巾乗畸零数巾(是畸面巾也)并四段畸径巾得四段角径巾、再自乗亦乗畸零添一箇数為因角径再乗巾因平径因子五百一十二箇丑寄甲位。②以面巾減四段角径巾余為四段平径巾。③又以倍面巾減四段角径巾余為因角径四箇子寄乙位。④亦以四段面巾減四段角径巾余為因角径四箇寅、乗乙位為因角径巾因子一十六箇寅、又乗四段平径巾八之為因角径再乗巾因平径因子五百一十二箇丑寄左。⑤以甲位便与寄左相消得求畸面之径式。」(17ウ - 18オ)

[訳]畸径[の開方式]を求める。①辺の自乗を畸零数の自乗(これは畸面の自乗)に乗じた数と畸面の径の自乗の四倍を併せた数は、角径の自乗の四倍である。これを三乗し、畸零数に一を加えたものを乗じると、角径の三乗、平径、子を掛けた丑の五百十二倍となる。これを甲位とする。②辺の自乗を角径の自乗の四倍から減じた余りは、平径の自乗の四倍となる。③また、辺の自乗の二倍を角径の自乗の四倍から減じた余りは、角径を掛けた子の四倍となる。これを乙位とする。④また、辺の自乗の四倍を角径の自乗の四倍から減じた余りは、角径を掛けた四倍の寅となる。これに乙位を乗じると、角径の自乗、子を掛けた寅の十六倍となる。さらに平径の自乗の四倍を掛け、八倍すると、角径の三乗、平径、子を掛けた丑の五百十二倍となる。これを寄左とする。⑤甲位を直接寄左と相殺して、求める畸面の径の[開方]式を得る。

ここで訳出した部分に述べられている内容を、数式によって表現すると次のようになる。

① $a^2 t^2 + 4\rho^2 = a'^2 + 4\rho^2 = 4R^2$ ....(A)

(これは[公式Ⅰ]と同様の式で、三平方の定理によって得られる。)

$(1 + t) \cdot (4R^2)^3 = 512R^3 r_3 r_2 r$.　この式を「甲位」とする。

② $4R^2 - a^2 = 4r^2$

③ $4R^2 - 2a^2 = 4r_2 R$.　この式を「乙位」とする。

④ $4R^2 - 4a^2 = 4b_3 R$,　$4b_3 R \cdot$乙$= 16 \cdot b_3 r_2 R^2$,　$8 \cdot 4r^2 \cdot 16 b_3 r_2 R^2 = 512R^2 r_3 r_2 r$.

この式を「寄左」とする。

⑤甲 $= 512R^2 r_3 r_2 r$.　この式を「相消」とする。ここで(寄左) = (相消)より畸径を求める開方式を得る。

この操作においては、(A)式のみが ρ に関する関係式である。それ以下の式は、平径を求める開方式の場合と全く同一である。すなわち、平径の開方式の構成において、$4R^2$ の部分を、ρ の式(A)に置き換えることにより、畸径の開方式が得られることになる。

以上が七角有余の開方式の構成例である。

(ii)六角有余

次に、偶角有余の例として、六角有余の開方式の構成法が述べられている部分を訳出する。

> 「仮如(偶)六角有余者、置角数(六)折半之得第一係面数(三)奇数。故即止。以原面乗畸零数得畸面(即擬二箇第一正闊)乗角径(視第一半梭面擬中斜)為因第一中闊(視半梭闊)二箇第一係斜。亦乗角径(於是稜各転折而不能作半梭之形也)而後、省原面則角径巾与畸零数相乗者為因子二箇第一(三面)係斜之汎数。即自乗為先数。又以第一係斜之汎数即為後数。」 (18 オ)

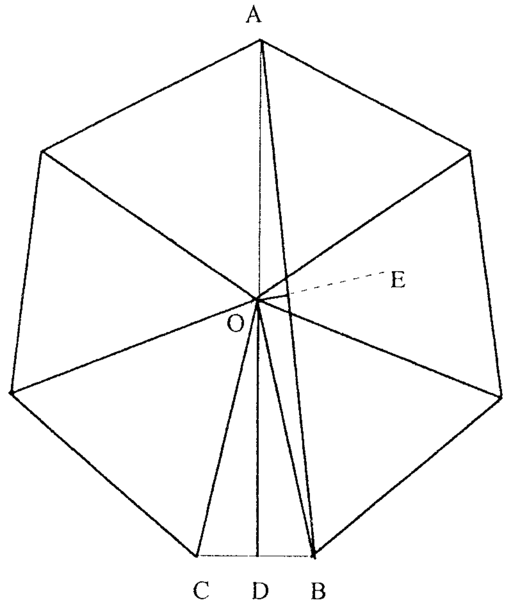
[訳]例えば、偶角有余である六角有余の場合、角数の六を折半し、第一係面数として奇数の三を得る。よって、ここで止める。辺を畸零数に乗じて畸面(すなわち、二倍の第一正闊[下図参照]と見なす)の長さを得る。これに角径(第一半梭の面を見て、中斜と見なす)を乗じると、第一中闊(半梭の闊を見る)を掛けた第一係斜の二倍となる。さらに角径(ここにおいて、各角径について半梭の形を作ることはできない)を乗じた後、[この式から]辺を簡約すると、角径の自乗に畸零数を掛けたものが、子を掛けた第一(三面)係斜の汎数の二倍に等しくなる。すなわち、これを自乗して先数とする。また、第一係斜の汎数を後数とする。

[六角有余の演段図]

(19 オ)に以下の如き六角有余の演段図が掲げられている。また、各線分には次のような名称が与えられている。

AB =第一係斜、 BC =畸面、 OD =畸径、 OE =第一中闊.

この図において、角 ABO を「第一半棱」とする。この半棱の「正闊」は BD で、すなわち畸面の半分に相当する。



ここで訳出した部分に述べられている内容を、数式を用いて表現すると次のようになる。

まず最初に、係面数の数列を求める。$k(1) = 6/2 = 3$ より、第一係面数は奇数となるので、ここで計算を止める。$k(1)$の次に $k(2)$を求めようとしても、畸面があるために求められないからである。そこで半棱を作る操作も、第一半棱のみとなる。

次に、第一半棱を作ることにより、以下の関係式が導かれる。

$a\,t = a'$,　$a'R = 2a_3 r_3$,　$a'R^2 = 2a_3 r_3 R = 2a\alpha_3 r_3$.　$\therefore\ tR^2 = 2a_3 r_3$.

この式を自乗した$(tR^2)^2 = (2\alpha_3 r_3)^2$ を「先数」とし、α_3を「後数」とする。(自乗した式を先数とする理由については、次の段落の記述を参照。)

[平径の開方式について]

「據此両数而求平径者、①并面巾与四段平径巾為四段角径巾、以之乗畸零数、亦自乗為因子(是三面中闊)巾六十四段第一(三面)係斜之汎数巾寄甲位。②以四段面巾減四段角径巾余為因角径四箇丑(是三箇中報角径)寄乙位。③倍四段角径巾加乙位為因角径四箇第一(三面)係斜之汎数、乗乙位而自乗、亦乗平径巾以一十六乗之為因角径五乗巾因子巾四千零九十六段第一係斜之汎数巾寄左。④以四段角径巾再自乗数乗

甲位与寄左相消得求平径式。」(18オ - 18ウ)

[訳]この両数によって、平径[の開方式]を求める。①辺の自乗と平径の自乗の四倍を併せると角径の自乗の四倍となる。これに畸零数を乗じ、さらに自乗すると、子(これは三面中闊である)の自乗を掛けた第一(三面)係斜の汎数の自乗の六十四倍となる。これを甲位とする。②辺の自乗の四倍を角径の自乗の四倍から減じた余りは、角径を掛けた丑(これは三面中報角径である)の四倍となる。これを乙位とする。③角径の自乗の四倍をさらに倍にして乙位に加えると、角径を掛けた第一(三面)係斜の汎数の四倍となる。これに乙位を掛けて自乗し、さらに平径の自乗を掛けて十六倍したものは、角径の六乗、子の自乗を掛けた第一係斜の汎数の自乗の四千九十六倍となる。これを寄左とする。④角径の自乗の四倍を三乗し、甲位に乗じた数と寄左を相殺し、求める平径の[開方]式を得る。

ここで訳出した部分の内容を、数式を用いて表現すると次のようになる。

① $a^2 + 4r^2 = 4R^2$ [公式Ⅰ]、 $(t \cdot 4R^2)^2 = 64r_3\alpha_3^2$. [先数]

この式を「甲位」とおく。

② $4R^2 - 4a^2 = 4b_3R$ [公式Ⅲ]、[公式Ⅳ] この式を「乙位」とおく。

③ $2 \cdot 4R^2 + 4b_3R = 4\alpha_3R$ [公式Ⅹ]、

$(4\alpha_3R \cdot 4b_3R)^2 \cdot 16r^2 = 4096\alpha_3^2r_3^2R^6$ [公式Ⅵ]. この式を「寄左」とする。

④ $(4R^2)^3 \cdot$ 甲 $= 4096\alpha_3^2r_3^2R^6$. この式を「相消」とおく。ここで、(寄左) = (相消)より、平径の開方式を得る。

この式変形において、先数を作る際に式 "$tR^2 = 2\alpha_3r_3$"(この式を(S)とする)を自乗する理由は、次のように説明される。もし(S)を自乗すること無しに式変形を行うとするならば、以下の如き問題が生じる。

まず(S)の右辺の文字、α_3 と r_3 を消去するための式変形を行う。

$\alpha_3R = (2R + b_3)R = 2R^2 + R^2 - a^2 = 3R^2 - a^2.$

$r_3R^2 = b_3Rr = (R^2 - a^2)r\ .$

これらを用いるために、式(S)の全体に R^3 を掛ける。

$\therefore\ tR^5 = 2\alpha_3R \cdot r_3R^2 = 2(3R^2 - a^2)(R^2 - a^2)r\ .$

この式には R と r が混在している。もし、この式から r のみの開方式を構成しようとするならば、[公式Ⅰ]を用いることになるが、左辺の R の次数が奇数である 5 次のために、R が一つだけ残る。この最後の R を消去するには式(S)の全体を自乗して、R の偶数次を作らねばならない。R の開方式を作る場合も同様である。

上で導いた式の右辺には、r が一つだけ残っている。この r を[公式Ｉ]を用いて R の式とするには、やはり式(S)の全体を自乗して r の偶数次を作らねばならない。(一般の偶角有余においても、先数の式を自乗しなければならないことが同様の考察によって明らかになる。)

[角径の開方式について]

「求角径者、①角径自乗乗畸零数、亦自乗為因子巾四段第一(三面)係斜之汎数巾寄甲位。②以面巾減四段角径巾余為四段平径巾。③又以面巾減角径巾余為因角径丑寄乙位。④倍角径巾加乙位為因角径第一(三面)係斜之汎数、乗乙位而自乗、亦乗四段平径巾為因角径五乗巾因子巾四段第一係斜之汎数巾寄左。⑤以角径五乗巾乗甲位与寄左相消得求角径式。」(18ウ - 19ウ)

[訳]角径[の開方式]を求める。①角径を自乗し、畸零数を乗じたものをさらに自乗すると、子の自乗を掛けた第一(三面)係斜の汎数の自乗の四倍となる。これを甲位とする。②辺の自乗を角径の自乗の四倍から減じた余りは、平径の自乗の四倍である。③また、辺の自乗を角径の自乗から減じた余りは、角径を掛けた丑である。これを乙位とする。④角径の自乗を倍にしたものに乙位を加えると、角径を掛けた第一(三面)係斜の汎数となる。これに乙位を掛けて自乗し、さらに平径の自乗の四倍を掛けると、角径の六乗、子の自乗を掛けた第一係斜の汎数の自乗の四倍となる。これを寄左とする。⑤角径の六乗を甲位に掛け、寄左と相殺して求める角径の[開方]式を得る。

ここで訳出した部分の内容を、数式を用いて表現すると次のようになる。

①$(t R^2)^2 = 4\alpha_3{}^2 r_3{}^2$.　この式を「甲位」とする。

② $4R^2 - a^2 = 4r^2$.

③ $R^2 - a^2 = b_3 R$.　この式を「乙位」とする。

④ $2R^2 + b_3 R = \alpha_3 R$,

$(\alpha_3 R \cdot 乙)^2 \cdot 4r^2 = 4\alpha_3{}^2 r_3{}^2 R^6$.　この式を「寄左」とする。

⑤ $R^6 \cdot 甲 = 4\alpha_3{}^2 r_3{}^2 R^6$.　この式を「相消」とする。ここで、(寄左) ＝ (相消)より角径の開方式を得る。

[畸径の開方式について]

「求畸面之径者①以面巾乗畸零数巾并四段畸径巾、為四段角径巾、内減面巾余為四段平径巾。以畸零数乗四段角径巾、亦自乗為因子巾六十四段第一(三面)係斜之汎数巾寄甲位。②以四段面巾減四段角径巾余為因角径四箇丑寄乙位。③倍四段角径巾加乙位為因角径四箇第一(三面)係斜之汎数、乗乙位而自乗、亦乗四段平径巾四之為因角径五乗巾因子巾四千零九十六段第一係斜之汎数巾寄左。④以四段角径巾再自乗数乗甲位与寄左相消得求畸面之径式。」(19ウ - 20オ)

[訳]畸径[の開方式]を求める。①辺の自乗に畸零数の自乗を乗じたものと、畸面の径の自乗の四倍を併せた数は、角径の自乗の四倍である。これより辺の自乗を減じた余りは、平径の自乗を四倍したものである。畸零数を角径の自乗の四倍に乗じ、さらに自乗すると、子の自乗を掛けた第一(三面)係斜の汎数の自乗の六十四倍となる。これを甲位とする。②辺の自乗の四倍を角径の自乗の四倍から減じた余りは、角径を掛けた丑の四倍となる。これを乙位とする。③角径の自乗の四倍をさらに倍にして乙位に加えると、角径を掛けた第一(三面)係斜の汎数の四倍となる。これに乙位を掛けて自乗し、さらに平径の自乗の四倍を掛けてさらに四倍したものは、角径の六乗、子の自乗を掛けた第一係斜の汎数の自乗の四千九十六倍となる。これを寄左とする。④角径の自乗の四倍を三乗し、甲位に乗じた数と寄左を相殺し、求める畸面の径の[開方]式を得る。

ここで訳出した部分の内容を、数式を用いて表現すると次のようになる。

① $a^2t^2 + 4\rho^2 = 4R^2$,　$4R^2 - a^2 = 4r^2$,　$(t\cdot 4R^2)^2 = 64{r_3}^2{\alpha_3}^2$.　この式を「甲位」とする。

② $4R^2 - 4a^2 = 4b_3R$.　この式を「乙位」とする。

③ $2\cdot 4R^2 + 乙 = 4\alpha_3 R$,　$4\cdot(4\alpha_3 R\cdot 乙)^2\cdot 4r^2 = 4096{r_3}^2{\alpha_3}^2R^6$.　この式を「寄左」とする。

④ $(4R^2)^3\cdot 甲 = 4096{r_3}^2{\alpha_3}^2R^6$.　この式を「相消」とする。ここで(寄左) = (相消)より畸径の開方式を得る。

①の ρ についての関係式以外、上で述べられている開方式の構成法は、平径の場合と全く同様である。

(5)定乗数の計算法再現の仮説について

本項では帯不尽の開方式に関する定乗数の計算法の再構成を試みる。巻十一は次のような定乗数 J の計算式を述べていた。

奇角有余(角数 $n=2m+1$)の場合：　$J = n - 2$.
偶角有余(角数 $n=2m$) の場合：　$J = 2n - 3$.

これらの計算式の導出過程に関する仮説を、以下略述する。
①奇角有余($n = 2m+1$)の場合：
まずは m が奇数の場合、巻十一の記述に従えば、「先数」と「後数」の両式から次の関係式が構成される。

$$(1+t)R^u = 2^{u-1} \cdot r_{k(u)} r_{k(u-1)} \ldots\ldots\ldots r_m \cdot \alpha_{k(u)} .$$

ここで $m+1 = 2^{u-2} \cdot s$ (s は奇数)とあらためると、$k(u) = s$ となる。これを用いて上の式を書き換えると、

$$(1+t)R^u = 2^{u-1} \cdot r_s r_{2s} \ldots\ldots\ldots r_m \cdot \alpha_s \quad \ldots\ldots\ldots(\mathrm{P})$$ を得る。

式(P)の右辺の文字を諸公式を用いて式変形し、消去するために両辺に掛けるべき R の累乗の指数 χ は、

$$\chi = (s - 1) + (2s - 1) + \ldots\ldots\ldots + \{(2^{u-2} \cdot s - 1) - 1\} + (s - 2)$$
$$= s(2^{u-1} - 1) - u + (s - 2) = 2^{u-1} \cdot s - (u+2)$$

である。そこで R^χ をこの式の全体に掛けると、　$R^u \cdot R^\chi = R^{n-1}$.

ここで $2^{u-1} \cdot s - 2 = 2m = n - 1$ である。つまり、奇角有余の開方式の定乗数 J は $n - 2$ となる。(和算式の次数の数え方、すなわち「乗数」は現行の次数の数え方よりも 1 だけ小さい値となることに注意。)

この開方式は R, r のいずれについて見ても、偶数次のみの項を含んでいる。従って、[公式 I]によって簡単に一方をもう一方の文字に変換することができ、共に同じ定乗数の値を得る。また畸径 ρ についても、$4R^2 = 4\rho^2 + a'^2$ を用いて式変形することにより、全体の次数は変化せず、同じ定乗数となる。

尚、m が偶数の場合は、$\alpha_{k(1)}$ と $r_{k(2)}$ のみを式変形によって消去することにより、

$$J = 2+(k(1) - 2) + (k(2) - 1) - 1 = n - 2$$

という結果が簡単に得られる。

②偶角有余($n = 2m$)の場合：
以下、$m = 2^{u-1} \cdot s$ (s は奇数) とする。偶角有余における「先数」と「後数」の両式から構成した式は、次のようなものであった。(簡単のために $2^{u-1} = c$ とする。)

$$tR^{u+1} = 2^u \alpha_s r_s r_{2s} \ldots\ldots\ldots r_{c \cdot s} \quad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{Q})$$

式(Q)の右辺の文字を諸公式を用いて消去するために、両辺に掛けるべき R

の累乗の指数 χ は、

$$\chi = (s - 2) + \{(s - 1) + (2s - 1) + \cdots\cdots + (2^{u-1}\cdot s - 1)\}$$
$$= 2^u\cdot s - u - 2 \quad \text{である。}$$

よって、$R^{u+1}\cdot R^x = R^{n-1}$ を得る。

式(Q)の文字の添え字を見ると、r_s の s のみが奇数である。つまり、これらの文字を消去して得た式には、因数としての r が 1 個だけ含まれることになる。この r を消去して R のみの式を作るには、全体を自乗して r^2 を作るより他無い。一方、R を消去して r のみの式を作るには、式の左辺が R の奇数次($n - 1$ 次)であることから、この場合も全体を自乗しなければならない。(前項の六角有余の実例を参照。)また、畸径の開方式の定乗数は、公式($4R^2 = 4\rho^2 + a'^2$)によって R を ρ に変換することによって得られるから、角径の開方式の定乗数と同じになる。従って、r, R, ρ についての定乗数 J は、

$$J = 2(n - 1) - 1 = 2n - 3 \quad \text{となる。}$$

以上が、帯不尽の定乗数の構成法に関する仮説である。

(6)両角余より十角余までの開方式

これまでの巻十一の議論はいわば、帯不尽についての概論であった。ここで紹介するのは、巻十一の編者らが実際に、両角余から十角余までのそれぞれの平径、角径、畸径の開方式を構成した結果を羅列したものである。まさしく開方式のみを列挙した箇所が、延々 12 丁にも渡って続くのである。(37 オ - 49 ウ)その原文を提示するのは煩瑣の一語に尽きる。そこで、本稿では現代的な数式の表示によって、それらの開方式を代数方程式の形式に翻訳して、列挙することにしたい。

①両角有余

[平径の開方式(2 次)]

$$4r^2t^2 + a^2t^2 = 16r^2$$

[角径の開方式(2 次)]

$$R^2t^2 + a^2 = 4R^2$$

[畸径の開方式(2 次)]

$$4\rho^2t^2 + a^2t^4 + 4a^2 = 4a^2t^2 + 16\rho^2$$

②三角有余

[平径の開方式(2 次)]

$$4r^2t + a^2t + a^2 = 12r^2$$

[角径の開方式(2 次)]

$$R^2t + a^2 = 3R^2$$

[畸径の開方式(2 次)]

$$4\rho^2 t + a^2t^3 + a^2 = 3a^2t^2 + 12\rho^2$$

③四角有余

[平径の開方式(6 次)]

$$64r^6t^2 + a^6t^2 + 12a^4r^2t^2 + 48a^2r^4t^2 + 512a^2r^4 = 64a^4r^2 + 1024r^6$$

[角径の開方式(6 次)]

$$R^6t^2 + a^6 + 20a^2R^4 = 8a^4R^2 + 16R^6$$

[畸径の開方式(6 次)]

$$64\rho^6 t^2 + a^6t^7 + 5a^6t^4 + a^6 + 12a^4\rho^2 t^5 + 40a^4\rho^2 t^2 + 48a^2\rho^4 t^3 + 80a^2\rho^4$$
$$= a^6t^6 + 8a^6t^2 + 12a^4\rho^2 t^4 + 32a^4\rho^2 + 48a^2\rho^4 t^2 + 64\rho^6$$

但し、この四角有余の畸径の開方式は、巻十一のすべての写本で間違った記述が為されている。正しい方程式は以下のようになる。

$$64\rho^6t^2 + a^6t^8 + 80a^6t^4 + 64a^6 + 12a^4\rho^2t^6 + 640a^4\rho^2t^2 + 48a^2\rho^4t^4 + 1280a^2\rho^4$$
$$= 16a^6t^6 + 128a^6t^2 + 192a^4\rho^2t^4 + 512a^4\rho^2 + 768a^2\rho^4t^2 + 1024\rho^6$$

④五角有余

[平径の開方式(4 次)]

$$16r^4t + a^4t + 8a^2r^2t + 40a^2r^2 = a^4 + 80r^4$$

[角径の開方式(4 次)]

$$R^4t + 5a^2R^2 = a^4 + 5R^4$$

[畸径の開方式(4 次)]

$$16\rho^4 t + a^4t^5 + 20a^4t^2 + 8a^2\rho^2 t^3 + 80a^2\rho^2 = 5a^4t^4 + 16a^4 + 40a^2\rho^2 t^2 + 80\rho^4$$

⑤六角有余

[平径の開方式(10 次)]

$1024r^{10}t^2 + a^{10}t^2 + 20a^8r^2t^2 + 160a^6r^4t^2 + 3840a^6r^4 + 640a^4r^6t^2 + 1280a^2r^8t^2$
$+ 61440a^2r^8 = 144a^8r^2 + 30208a^4r^6 + 36864r^{10}$

[角径の開方式(10 次)]

$R^{10}t^2 + a^{10} + 54a^6R^4 + 105a^2R^8 = 12a^8R^2 + 112a^4R^6 + 36R^{10}$

[畸径の開方式(10 次)]

$1024a^{10} + 55296a^6\rho^4 + 107520a^2\rho^8 + 27648a^8\rho^2t^2 + 107520a^4\rho^6t^2 + 1024\rho^{10}t^2$
$+ 3456a^{10}t^4 + 40320a^6\rho^4t^4 + 1280a^2\rho^8t^4 + 6720a^8\rho^2t^6 + 640a^4\rho^6t^6 + 420a^{10}t^8$
$+ 160a^6\rho^4t^8 + 20a^8\rho^2t^{10} + a^{10}t^{12} = 12288a^8\rho^2 + 114688a^4\rho^6 + 36864\rho^{10} + 3072a^{10}t^2$
$+ 86016a^6\rho^4t^2 + 46080a^2\rho^8t^2 + 21504a^8\rho^2t^4 + 23040a^4\rho^6t^4 + 1792a^{10}t^6 + 5760a^6\rho^4t^6$
$+ 720a^8\rho^2t^8 + 36a^{10}t^{10}$

⑥七角有余

[平径の開方式(6 次)]

$64r^6t + a^6t + a^6 + 12a^4r^2t + 48a^2r^4t + 560a^2r^4 = 84a^4r^2 + 448r^6$

[角径の開方式(6 次)]

$R^6t + a^6 + 14a^2R^4 = 7a^4R^2 + 7R^6$

[畸径の開方式(6 次)]

$64\rho^6t + a^6t^7 + 56a^6t^4 + 64a^6 + 12a^4\rho^2t^5 + 448a^4\rho^2t^2 + 48a^2\rho^4t^3 + 896a^2\rho^4$
$=7a^6t^6 + 112a^6t^2 + 84a^4\rho^2t^4 + 448a^4\rho^2 + 336a^2\rho^4t^2 + 448\rho^6$

⑦八角有余

[平径の開方式(14 次)]

$6384r^{14}t^2 + a^{14}t^2 + 28a^{12}r^2t^2 + 336a^{10}r^4t^2 + 14336a^{10}r^4 + 2240a^8r^6t^2 + 8960a^6r^8t^2$
$+ 16384a^6r^8 + 21504a^4r^{10}t^2 + 28672a^2r^{12}t^2 + 3670016a^2r^{12} = 256a^{12}r^2 + 258048a^8r^6$
$+ 4128768a^4r^{10} + 1048576r^{14}$

[角径の開方式(14 次)]

$R^{14}t^2 + a^{14} + 104a^{10}R^4 + 660a^6R^8 + 336a^2R^{12} = 16a^{12}R^2 + 352a^8R^6 + 672a^4R^{10}$
$+ 64R^{14}$

[畸径の開方式(14 次)][11]

Q = $64\rho^6 + a^6t^6 + 24a^6t^2 + 12a^4\rho^2t^4 + 96a^4\rho^2 + 48a^2\rho^4t^2$ - ($10a^6t^4 + 16a^6$
$+ 80a^4\rho^2t^2 + 160a^2\rho^4$) とおく。(原文ではこの式を「寄位」とする。)

$a^{14}t^{16} \underline{+ 28a^{12}\rho^2t^{14}} + 336a^{10}\rho^4t^{12} + 2240a^8\rho^6t^{10} + 8960a^6\rho^8t^8 + 21504a^4\rho^{10}t^6$

$+ 28672a^2\rho^{12}t^4 + 64a^2Q^2 + 16384\rho^{14}t^2 = 64a^2Q^2t^2 + 256\rho^2Q^2$

なお、この箇所で「寄位」を導入するにあたり、巻十一の本文は「若分正負而自乗則及繁位故括之」(もし[各項を]正負の別によって分類して自乗するならば、項数が繁雑になるのでこれを括る。)という割註を設けている。

また、巻十一のすべての写本において、下線を引いた項は「再寄」(上の方程式の右辺)の中に書かれているが、正しくは「相消」(同、左辺)の中に書かれるべきものである。

⑧九角有余

[平径の開方式(8 次)]

$$256r^8t + a^8t + 16a^6r^2t + 144a^6r^2 + 96a^4r^4t + 256a^2r^6t + 5376a^2r^6$$
$$= a^8 + 2016a^4r^4 + 2304r^8$$

[角径の開方式(8 次)]

$$R^8t + 9a^6R^2 + 30a^2R^6 = a^8 + 27a^4R^4 + 9R^8$$

[畸径の開方式(8 次)]

$$256\rho^8t + a^8t^9 + 120a^8t^6 + 576a^8t^2 + 16a^6\rho^2t^7 + 1440a^6\rho^2t^4 + 2304a^6\rho^2 + 96a^4\rho^4t^5$$
$$+5760a^4\rho^4t^2 + 256a^2\rho^6t^3 + 7680a^2\rho^6 = 9a^8t^8 + 432a^8t^4 + 256a^8 + 144a^6\rho^2t^6$$
$$+ 3456a^6\rho^2t^2 + 864a^4\rho^4t^4 + 6912a^4\rho^4 + 2304a^2\rho^6t^2 + 2304\rho^8$$

⑨十角有余

[平径の開方式(18 次)]

$$262144r^{18}t^2 + a^{18}t^2 + 36a^{16}r^2t^2 + 576a^{14}r^4t^2 + 38400a^{14}r^4 + 5376a^{12}r^6t^2$$
$$+ 32256a^{10}r^8t^2 +16097280a^{10}r^8 + 129024a^8r^{10}t^2 + 344064a^6r^{12}t^2 + 257556480a^6r^{12}$$
$$+ 989824a^4r^{14}t^2 + 589824a^2r^{16}t^2 + 157286400a^2r^{16} = 400a^{16}r^2 + 124416a^{12}r^6$$
$$+ 94724096a^8r^{10} + 318504960a^4r^{14} + 26214400r^{18}$$

[角径の開方式(18 次)]

$$R^{18}t^2 + a^{18} + 170a^{14}R^4 + 2275a^{10}R^8 + 4290a^6R^{12} + 825a^2R^{16} = 20a^{16}R^2 + 800a^{12}R^6$$
$$+ 4004a^8R^{10} + 2640a^4R^{14} + 100R^{18}$$

[畸径の開方式(18 次)]

$$Q = 1280\rho^8 + 5a^8t^8 + 336a^8t^4 + 256a^8 + 80a^6\rho^2t^6 + 2688a^6\rho^2t^2 + 480a^4\rho^4t^4$$
$$+ 5376a^4\rho^4 + 1280a^2\rho^6t^2 - (80a^8t^6 + 512a^8t^2 + 960a^6\rho^2t^4 + 2048a^6\rho^2$$

$$+ 3840a^4\rho^4t^2 + 5120a^2\rho^6)$$

$$a^{18}t^{20} + 36a^{16}\rho^2t^{18} + 576a^{14}\rho^4t^{16} + 5376a^{12}\rho^6t^{14} + 32256a^{10}\rho^8t^{12} + 129024a^8\rho^{10}t^{10}$$
$$+ 344064a^6\rho^{12}t^8 + 589824a^4\rho^{14}t^6 + 589824a^2\rho^{16}t^4 + 4a^2Q^2 + 262144\rho^{18}t^2$$
$$= 4a^2Q^2t^2 + 16\rho^2Q^2$$

以上が、両角余より十角余までの開方式である。この羅列した項目の末尾において、巻十一の原文は次のように述べている。

> 「右九條之形、皆帯不尽。故各有短少之畸面而、其状不全。然所帯数位各無極限。是故以畸零之余数註若干。術中各略画式、且不載其答数也。十一角已上帯不尽者亦略之。」（49ウ）

[訳]右の[両角有余から十角有余までの]九つの形は、皆[一つの辺が]不尽を帯びたものである。よって、それぞれには[一本の]短い畸面があり、その形状は不完全である。しかも、[畸面の]数値は無制限にある。そのため、ここでは畸零数を「若干」[t]として扱った。解法においてはすべての式を書くのを省略し、答の数値も載せなかった。十一角以上の帯不尽もまた省略する。

以上、本章で訳出した部分が、『大成算経』巻十一において帯不尽が言及されている全ての箇所である。原文によるこの図形の説明の仕方には、我々をして戸惑わせるものがかなり見られたが、抑も、では一体何故にこのような帯不尽という不思議な図形が考察の対象になっていたのであろうか、という素朴な疑問に『大成算経』の本文は全く答えては呉れないし、手懸かりらしい手懸かりも見いだせない状況である。しかもこの帯不尽という図形は、『大成算経』全二十巻の内、巻十一の他には、僅かに巻二十の例題に用いられた一問が見られるのみである。この図形を研究する必要性が希薄に感じられるのは筆者ばかりではなかったようで、『大成算経』を継承した和算家の間でも、純粋な正多角形に関する研究に携わった者は多数いたものの、帯不尽に関しては、殆ど研究らしい研究は現れなかったと言って良い。

そのような状況を反映したものかどうか、『大成算経』巻十一の現存写本を精査してみると、帯不尽の開方式を列挙した部分には、誤記・誤写の類が夥しく観察される。純粋な正多角形の開方式に関する記述にはそれほど誤写が見られないことと比較してみると、その差は歴然としている。ともあれ、この帯不尽が記され

た『大成算経』の写本の流伝に関する話題を、次の章で見ていくことにする。

4.『大成算経』巻十一の写本について

本章では、本論が依拠した『大成算経』巻十一の写本を紹介し、それらを大きく三つに分類し、その特徴を見ていくことにする。

(1)現存写本について

筆者の管見に入った限りでは、巻十一を具えた『大成算経』の写本は 17 本ほど有る。(東北大学の藤原集書の『大成算経』の如く、巻十一のみを欠いた写本や、零本の類を含めれば、『大成算経』そのものの写本数はもっと多くなる。)以下、それらの写本について、本論で用いる略号を添えた一覧を掲げる。(なお、同一図書館、同一文庫に複数の写本が所蔵されている場合は、請求番号を併記して識別している。)

『大成算経』巻十一現存写本一覧

Ⅰ)A 東京大学総合図書館所蔵『角法』
B 宮城県立図書館本
C 国立国会図書館本

Ⅱ)D 東北大学狩野文庫本(狩 7- 20820 - 20)
E 東北大学狩野文庫本(狩 7 - 31453 - 20)
F 京都大学理学部数学教室本
G 九州大学桑木文庫本
H 内閣文庫本
I 筑波大学本
J 大阪府立図書館本
K 早稲田大学小倉文庫本(イ 16 - 196)
L 東京理科大学本

Ⅲ)M 東京大学総合図書館本
N 東北大学岡本文庫本

O 慶応大学本
P 早稲田大学小倉文庫本(イ 16 - 197)
Q 伊能忠敬記念館本

なお、A に掲げた東京大学所蔵の『角法』という題名の写本は、内容は全く『大成算経』巻十一と同様である。同図書館には従来知られていなかった『大成算経』の写本が収蔵されていることが、今回の調査によって判明した。しかし、この写本群には『大成算経』の名称が冠されておらず、全二十巻の各巻ごとが個別に装幀され、外題には『大成算経』の各巻の名称(「形巧」や「日用術」など)が付けられている。この『角法』は、その中で『大成算経』の巻十一に相当し、内容も全く同一であることが確認される。

上記の写本において、識語や蔵書印等によって筆写者、所持者が判明している写本は、以下の 6 本である。

A :「紀伊徳川氏図書」の蔵書印があることより、江戸期に紀州徳川家の蔵書であったことが分かる。
B :仙台藩校養賢堂の蔵書を継承した「伊達文庫」内にあり、戸板保佑編『関算四伝書』後伝[1780 年成立]の第四十六として収録されている。
D :狩野亨吉が収集した、古川氏清[1758 - 1820]の蔵書の中の写本である。
E : 1790 年の平山千里による識語が確認される。
H :「昌平坂」と「元治元年」[1864 年]の印有り。
Q :伊能忠敬所持の写本である。

その他の十一本については、由来は明らかではない。

尚、これらの写本を大きく三つの組に分類しているが、その根拠については次項で述べることとする。

(2)写本間の異同について

先に掲げた写本を三つの組に分類した基準は、以下のようなものである。これらの各写本には全て、帯不尽の両角余から十角余までの開方式を列挙する部分を収録しているが、その記述の仕方、内容には三つの異なった型が観察されるのである。その三つの型に応じて I 系、II 系、III 系と命名する。その基準の概略

は以下のようなものである。

Ⅰ系：開方式の記述に殆ど誤記や書き込みが無いもの
Ⅱ系：開方式の構造に関わる誤記や書き込みを傍注で加えているもの
Ⅲ系：Ⅱ系の書き込みを地の文に組み込んだもの

和算家の間で帯不尽は研究対象としては無視されたに等しい扱いを受けていたことは既に述べたが、この三つの写本の型の存在は、そのことを端的に示すものである。関孝和を開祖と仰ぐ関流の中で、重要視された『大成算経』の中にこの図形が記されていたことにより、写本が流伝する過程で帯不尽の存在は、内容の細部はともかくとして、辛うじて忘却されず、その記述は生き残ることとなった。

伝書としての『大成算経』は、流伝の過程でほぼ忠実に、その内容は一字一句の相違もなく筆写されたものが大多数を占めている。しかしながら、巻十一に関しては例外が発生している。その例外とは、流伝の過程でただ一度だけ、帯不尽の記述に疑問を感じた和算家がいたことである(11)。その和算家は巻十一の本文に、傍注の形で自らの見解を記した。（Ⅱ系の写本の発生。）その本人にとってはそれで満足したのであろうが、その傍注をも伝承した人たちの一部は、その註が完全に正しいものであると錯誤して、『大成算経』の本文に組み込んでしまったのである。（これがⅢ系の写本となる。）このような事態が発生したと考えるならば、巻十一の本文に三系統の写本が存在することは説明される。帯不尽の開方式に対する数学的な検討が只の一度しか現れなかったのではないかと我々に思わせるほど、この分野に関する和算家の関心は低かったといわざるをえないのである。

実は巻十一のⅠ系の本文の方が数学的に見ると正しい内容を持っており、傍注を付した未知の和算家は誤っていたわけであるが、この誤註が存在してくれたおかげで、図らずも、写本の内容の新旧を判断する手懸かりが与えられたのである。

各系統の写本の内容の成立順序は、Ⅰ系、Ⅱ系、Ⅲ系の順番であると考えられる。最初にⅢ系の誤記を含む写本が原態であった可能性はない。その理由は次のような点に求められる。『大成算経』の大概の写本の記述形式は厳密で、半丁に原則として 20 字× 12 行の文字を記している。ところがⅢ系の帯不尽の開方式の該当部分だけは、この原則を崩して記されている。すなわち、後の挿入があったことを示しているのである。従って、Ⅲ系が原態の本文であった可能性は

なく、もとより傍書、朱注が随所に見られるII系が原態であったということはないので、I系、II系、III系の順に記述の内容が変化していったことが分かる。(但し、これは各写本自体の新旧までをも正確に反映したものでないことは言うまでもない。I系の写本であっても、かなり後になって筆写された場合も考えられる。ここで考えているのは飽くまでも、写本の文面の成立の順序である。)

全写本を比較校合した結果と、それらの間の系統を再現する作業についての詳細は、現在別稿を準備中であり、そちらに譲りたい。本稿では次の問題として、帯不尽の開方式の如何なる箇所が誤解を招いたのかについて検討を加えることとする。

(3)写本に現れた誤記、書き込みについて

前項で試みた巻十一の写本の成立順序の同定作業において、その指標となったのは帯不尽の開方式の記述であった。巻十一を継承したある和算家が、たまたまこの図形に対する「誤り」を見出したと誤解し、それを「訂正」したつもりで写本に書き込みを記したことにより、図らずも、現代の我々に写本の成立順序の同定に関する情報を与えてくれることとなった。本項では、その開方式の記述の誤解のされ方を中心に紹介し、同時に、この図形に対する彼等の認識を描出することを目指す。

和算において帯不尽という図形は、『大成算経』巻十一が初めて提示した図形の一群である。しかし、この図形を問題として提示する意図と、それを研究する必要性は、巻十一の内容を見る限り、明確ではない。このことは当時の和算家にとっても同様であったようで、『大成算経』以後、この帯不尽は彼らの興味を惹くことはなかった。この図形を研究の対象として取り上げた者は、殆どいないと言ってよい。(『大成算経』巻十一の解説書である有馬頼徸の『求径要法』が、帯不尽について言及している程度である。)

それ故、関以後の世代によって筆写された巻十一の帯不尽の部分は、その内容の吟味を受けること無しに、機械的に筆写されたようである。写本の成立順序同定の指標となった書き込みは、この帯不尽の開方式の本質を見極めること無く、安易な発想に基づいて為されたものである。

その書き込みの内容を見る前に、巻十一の原型が持っていたであろう誤りについてまずは検討する。『大成算経』の最終校訂者である建部賢明は、この部分についての訂正は失念してしまったようである[12]。だが、その誤りの分析をするこ

とによって、編者らの計算法の特質も明らかとなる。結果として、編者らのあら探しをすることとなってしまうが、彼らの犯した計算の誤りもまた、史家には貴重な情報源なのである。

(i)四角有余の誤りについて

以下、巻十一中の帯不尽の開方式に関する記述において、四角有余の畸径の開方式を求める箇所(39 オ)の誤りを検討する。この誤りは、本論が依拠したすべての写本に共通するものであり、『大成算経』の原本が既に有していたであろうと考えられる誤りである。

そこでは、次のように誤った畸径(ρ)の開方式が提示されている。

$$64\rho^6t^2 + a^6t^7 + 5a^6t^4 + a^6 + 12a^4\rho^2t^5 + 40a^4\rho^2t^2 + 48a^2\rho^4t^3 + 80a^2\rho^4$$
$$= a^6t^6 + 8a^6t^2 + 12a^4\rho^2t^4 + 32a^4\rho^2 + 48a^2\rho^4t^2 + 64\rho^6 .$$

正しい畸径の開方式は、次のようにならなければならない。

$$64\rho^6t^2 + a^6t^8 + 80a^6t^4 + 64a^6 + 12a^4\rho^2t^6 + 640a^4\rho^2t^2 + 48a^2\rho^4t^4 + 1280a^2\rho^4$$
$$= 16a^6t^6 + 128a^6t^2 + 192a^4\rho^2t^4 + 512a^4\rho^2 + 768a^2\rho^4t^2 + 1024\rho^6 .$$

この間違いの原因は次のように説明される。四角有余の畸径を求める開方式は、既に求められている角径を求める開方式、

$$R^6t^2 + a^6 + 20a^2R^4 = 8a^4R^2 + 16R^6$$

に $4R^2 = a^2t^2 + 4\rho^2$ を代入して式変形をすることによって得られる。

ところが、ここで巻十一は、

$$64(R^6t^2 + a^6 + 20a^2R^4) = 64(8a^4R^2 + 16R^6)$$

のように式全体を 64 倍すべき所を、

$$64\cdot R^6t^2 + a^6 + 4\cdot 20a^2R^4 = 4\cdot 8a^4R^2 + 4\cdot 16R^6$$

として計算している。すなわち、各項の R を消去して ρ に変換するために必要なだけの数係数が、各項に別々に掛け合わされているのである。

さらにこの左辺には、t の次数にも計算間違いがある。これは、次のような操作に由来する誤りであろう。

$$64R^6t^2 = (4\rho^2+a^2t^2)^3t^2 = a^6t^8 + 12a^4\rho^2t^6 + 48a^2t^4\rho^4 + 64\rho^6t^2 .$$

正しくは、このように処理すべき式を、三乗の展開式の最後の項"$64\rho^6$"に正しく"t^2"を掛けた以外は、すべて"t"を掛けてしまったのである。そのために、t の次数は正しい式よりも一つだけ少ないものとなっている[13]。

これらが、四角有余の誤った開方式が導かれた原因に関する推測である。ところで、巻十一の編者は、なぜ最初の操作において、式の各項に別々の数係数を掛けたまま、次の操作でそれらの和を両辺で等しいとおいてしまったのであろうか。その理由は、和算の式変形の仕方から説明されるであろう。

我々は上で見たような式を解釈するための表現方法として、加法の記号、等号、括弧などを用いたが、和算家はこれらの記号を持っていなかったということを再確認しなければならない。すなわち、彼らの眼前には、上で見た等式の各項が、記号によって結ばれることなく、単に並置されているだけだったのである。このような式表現に基づき、彼らは最初の操作として、各項の文字 R を消去して ρ の式に変換しようとする。そのためには各項を何倍かしなければならない。ここまでは正しい操作が行われている。しかし、巻十一の編者は次に行うべき操作を失念してしまったのである。すなわち、各項に掛けるべき数が等しくなるよう、調整をする操作である。この種の間違いは括弧という便利な記号を有する我々ですら犯しやすい誤りである。ましてやそれらを用いていなかった和算家が、頻繁に間違っていたとしても不思議ではあるまい。

さて、この開方式構成の誤りから、我々は巻十一に関連する何か新しい事実を引き出すことができるであろうか。

重要なことは、巻十一を継承した和算家たちは、この部分に何も訂正、頭注の類を記していないことである。これはすなわち、彼らが「帯不尽」についてあらためて考察を加えることなく、単純に巻十一の記述を書写していただけであったという可能性を示唆するものである。『大成算経』が関流において重視された書であったことは事実であろうが、そのすべての内容が完全に理解され、かつ尊重されていたわけではなかったことが、この一事によって明らかになるのである。

(ii)帯不尽の開方式への書き込みについて

既に分類した巻十一の写本群のうち、II系とIII系の写本群には、帯不尽の開方式の部分にかなりの数の書き込みが加えられている。しかし、それらを子細に分析すると、ある原則に基づいた書き込みであることが了解される。それらの書き込みの特徴は、以下のように整理することができる。

・奇角有余、偶角有余、いずれの場合も、角径の開方式の構成を述べた部分にのみ書き込みが為されている。(ただし両角有余については、式そのものが単純なためか、平径、畸径の開方式にも書き込みが加えられている。)
・書き込みの対象は、開方式の次数(乗数)に関わるもので、その内容は、開方式の各項の乗数を等しくするような調整である。

以上の点を実例によって紹介する。例として、八角有余の角径の開方式を挙げる。Ⅰ系の記述と、Ⅱ系、Ⅲ系の記述を併記する。

[Ⅰ系] $R^{14}t^2 + a^{14} + 104a^{10}R^4 + 660a^6R^8 + 336a^2R^{12}$
$= 16a^{12}R^2 + 352a^8R^6 + 672a^4R^{10} + 64R^{14}$.
[Ⅱ系、Ⅲ系] $R^{14}t^2 + a^{16} + 104a^{12}R^4 + 660a^8R^8 + 336a^4R^{12}$
$= 16a^{14}R^2 + 352a^{10}R^6 + 672a^6R^{10} + 64a^2R^{14}$.

Ⅰ系の記述は、正しい開方式が構成されている。Ⅱ系、Ⅲ系には書き込みに基づく改変が為されており、Ⅰ系の式と比較すると a の次数に変更が加えられている。この a の次数の変更は、方程式の各項がすべて 16 次になるように調整されている。では、なぜこのような書き込みが為されたのであろうか。

その理由は、通常の正多角形の開方式の構造と、帯不尽の開方式の構造とを比較した結果、そこから導かれた誤解によってであろうと説明される。すなわち、通常の正多角形の開方式では、各項の次数は、すべて同一の数となる。(例えば、正七角形の角径の開方式は、$7R^6 - 14a^2R^4 + 7a^4R^2 - a^6 = 0$ であり、すべての項は 6 次である。)ところが、帯不尽の開方式には、物理量としては単位を持たない無名数、すなわち「畸零数」t が含まれている。この文字 t を含む項の次数の合計は、これを含まない項の次数の合計とは異なってしまう。(t は無名数、すなわち畸面と辺の長さの比であるから、通常の定数と同じ扱いをしなければならない。)このことを了解することなく、書き込みを加えた和算家は、すべての項においてその次数の合計が等しくなるよう、辺の次数に機械的な処理を加えたと想定される。

畸零数が用いられているというのであれば、この書き込みによる変更は、平径、並びに畸面の径の開方式の記述についても為されねばならないはずである。しかし、この書き込みが加えられているのは、角径の開方式だけである。角径の開

方式は、他の二つの径の開方式に比べて、項数も少なく、式の構造が単純である。従って、書き込みを加えることも容易だったのであろう。

このように、これらの写本群の書き込みは、角径の開方式のみを対象とし、きわめて不完全な形式のままである。この不完全さはそのまま写本の文面に保存されて流伝している。つまり、最初に何者かが書き加えた角径の開方式の次数の変更を、平径、畸面の径の開方式へ適用することを以後の世代は、誰も行わなかったのである。たまたま最初に加えられた文面の変更が保存され、一字一句変わることなく、次代へと引き継がれていったことになる。

この誤った解釈が和算家の間で継承されていった事実から、我々はどのような数学史に関わる結論を導くことができるであろうか。

まず、巻十一の「帯不尽」に関する知識は、和算家の間で正しく継承されることはなかったという証拠が、史料に基づいて得られたことになる。このことは、既に見たとおり、『大成算経』という算書が、その内容を完全に理解した上で継承されていったとは限らないということを我々に再確認させる。

また、この帯不尽に対して生じた一連の誤解から、彼らの持っていた数学的な知識の実態をも知ることができる。すなわち、彼らは無名数を示す文字と、単位(ここでは「長さ」)を伴った文字を区別すること無く、ひとしなみに開方式の中で扱う傾向があったということである。この事実から我々は、書き込みを加えた和算家と、その内容を継承した和算家たちの、「数」に対する認識を垣間見ることができよう。

別の観点を採るならば、関孝和が確立した式の表記法の陥穽を、この事実は明瞭にしてくれるのである。和算家が日常的に扱っていた具体的な数値を指示する「数」と、ここで見た畸零数が決定的に異なる点は、我々の用語を用いるならば、畸零数は「変量」であったということである。帯不尽は正多角形とは異なり、畸面が不定であるためにその形状を一意的には決定できない。その具体的な形状を決定するために導入されたものが、辺と畸面の長さの比としての畸零数である。本来、無名数としての畸零数は、実際の問題においては"0.5"や"1/3"のような特定の数値として与えられるべき性格のものである。しかし、巻十一の巻末(49 ウ)でも述べられていたとおり、帯不尽の一般的な開方式の構成法を述べることがその目的であるが故に、この畸零数は具体的な数値によってではなく、「若干」と表現されている。そして、重要なことであるが、この畸零数は開方式を構成する式表現の中では、「畸零数」という表記で式の中に現れているのである。

ここで、関によって確立された式表記法の原則を再確認しておこう。彼の式表

現は、二つの範疇によって構成されていた。すなわち、数係数と文字係数である。関が創始した傍書法において、数係数は算木数字によって示され、文字係数はその算木数字の右脇に記される。また、傍書法によらず、式を漢文体に書き下す場合、数係数は「n 段」、あるいは「n 個」と記され、文字係数とは別の形で表現されていた。例えば一例を挙げよう。

> 「角径四自乗者、為因第一中闊、因第二中闊、因第三中闊、因第四中闊、三十二箇平径」（解釈：$R^5 = 32 r_{k(1)} r_{k(2)} r_{k(3)} r_{k(4)} r.$）

この文は正十一角形の「先数」の式を述べた箇所(10 ウ - 11 オ)の抄出であるが、その中で数係数は「三十二個」と表現されている。

このように関によって確立された式表現においては、数係数と文字係数は本来、厳密に区別されるべき対象であった。しかし、ここで問題としている「畸零数」は、その例外であった。すなわち、実際の問題における畸零数は、具体的な数値として与えられるはずのもので、通常の式表現においては「t 段」、あるいは「t 個」と表現される性格の数である。そのような数が巻十一においては、文字係数に類似のものとして扱われている。むしろ、そのような形でしか記述できなかった、と言うべきであろう。

この例外的事項は、巻十一の編者らにとっては当然のこととして理解されていたはずである。しかしながら、その写本を継承した人々のすべてがこの例外的事項について理解していなかったことは、写本群Ⅱ系とⅢ系の存在から明らかである。すなわち、Ⅱ系とⅢ系に関わった写字生らは、帯不尽の開方式に記されている「畸零数」という文字を数係数としてではなく、文字係数と見なしてしまったのである。しかも彼らは、正多角形の開方式において、各項で掛け合わされる文字係数の個数が等しいことに着目し、その原則を、本来は考慮する必要のない帯不尽の畸零数の場合にも応用したのである。畸零数が単純な数係数であるという認識を彼らが持っていたならば、このような誤りは生じなかったはずなのである。

関の確立した式の表現法は、数係数と文字係数の表記の仕方を厳密に区別したが故に、畸零数のごとき例外的事項には対処できなかったと言える。彼が立てた式表記の原則は、早くも帯不尽の開方式において例外的事項が現れたことによって破綻し、そのことを理解し得なかった次世代の間に誤解を招く結果となったのである。

結語

以上『大成算経』巻十一に述べられている帯不尽に関して考察を行ってきた。帯不尽に関しては巻十一において緻密な計算が展開されながらも、一方では純粋な正多角形の計算の結果がそのまま「円理」の計算にも利用されたのとは異なり、この帯不尽の場合はその有用性が曖昧であったが為に、後続する研究者の興味を惹くことなく終わってしまった。しかしこの数学史の対象は、『大成算経』の中にのみ孤立して現れ、しかも誤解に基づく誤った写本が発生したということによって、非常に逆説的であるが、『大成算経』の写本そのものの伝来史の指標になるという結果を生みだしたのである。

本稿では帯不尽が関わる歴史的問題に的を絞った論を進めてきたが、今後の展望としては、これらの準備のもとにさらに視野を広げ、『大成算経』全巻の校訂に着手することが求められよう。その作業が完了した時点で初めて、我々は関孝和や建部兄弟の数学について何か新しいことを語ることが許されるのである。

注

(1)帯不尽について言及した、啓蒙書以外の先行研究は、管見に入ったところでは、日本学士院編『明治前日本数学史』第 2 巻、岩波書店、1983 年補訂版、pp. 406, 415 - 417. のみである。

(2)以下の拙論において、『大成算経』巻十一の正多角形に関する議論の概要を紹介した。K. SATO, "On the Theory of Regular Polygons in Traditional Japanese Mathematics: Reconstruction of the Process for the Calculation of the Degree of *Kaihoshiki* Appearing in the *Taisei Sankei* by SEKI and TAKEBE Brothers," *Historia Scientiarum*, 1998, Vol. 8, No. 1, pp. 71 - 86.

(3)角術に天元術を適用する関の試みは、断片的ではあるものの、建部賢弘著『研幾算法』(1683 年刊)において、既に公表されていた。このことから、『大成算経』の成立以前に、角術の解法の基本的なアイディアは確立されていたものと考えられる。尚、関以前の角術の解法は、直径を与えた円周上に正 n 角形を作り、近似的な弧・矢・弦の関係式によって平径を求めるというものであった。容易に予想されるとおり、円周率と近似式の精度に応じて、得られる平径の精度

が左右される。『明治前日本数学史』第一巻、pp. 119 - 120. を参照。曲線図形を用いずに直線図形のみで処理することが、関の解法の画期的な点であったと言える。

(4)開方式とは Ruffini - Horner 法に酷似した数値解法を実行するための計算式である。この開方式を「高次代数方程式」と翻訳することには一定の留保が必要であるが、本論では便宜的にこの「開方式」という用語や、「未知数」といった語を用いて説明を進める。

(5)議論の詳細、諸公式の証明等については前掲の拙論、pp. 72 - 77.を参照。本稿では、帯不尽に関連する補助線の名称と、用いられる諸公式を列挙するに留める。

(6)正 11 角形を例にして、その R についての開方式を構成する。まず[公式Ⅱ]を繰り返し用い、以下の式①を、また、汎数の定義を①に適用して式②を得る。

$R^5 = 32r_5r_4r_3r_2r$ ....①　　　$\alpha_3R^2 = 8r_4r_2r$ ....②

これら①と②から次の式(A)を導き、開方式の構成を始める。

$$R^5 = 4r_5r_3\cdot\alpha_3R^2 \quad ....(\mathrm{A})$$

(A)式を見ると、R 以外に三つの文字(r_5, r_3, α_3)が含まれている。これらの文字を、諸公式を用いて消去し、R のみの式とする。まず、[公式Ⅵ]より、

$R^5 = 4r_5r_3\cdot\alpha_3R^2 = 4r^2\cdot b_5b_3\cdot\alpha_3 = (4R^2 - a^2)\cdot b_5b_3\cdot\alpha_3$ ....(B)　を得る。

次いで、b_5 と b_3 を消去する。すなわち、以下の(C)と(D)を導く。

$$\begin{aligned} b_5R^3 &= (2r_4 - b_3)R^3 = 2r_4R^3 - b_3R^3 = (2R^2 - a_2^2)R^2 - (R^2 - a^2)R^2 \\ &= 2R^4 - (a_2R)^2 - R^2(R^2 - a^2) = 2R^4 - (2ar)^2 - R^2(R^2 - a^2) \\ &= 2R^4 - a^2(4R^2 - a^2) - R^2(R^2 - a^2) \quad ....(\mathrm{C}) \end{aligned}$$

$b_3R = R^2 - a^2$ ....(D)

次に α_3 を消去する。そのために、次の(E)式を導く。

$\alpha_3R = (2R + b_3)R = 2R^2 + R^2 - a^2 = 3R^2 - a^2$ ....(E)

これら(C)、(D)、(E)を用いることにより、三つの文字が消去される。その消去を行うために、(B)に R^5 を掛ける。すなわち、

$$\begin{aligned} R^{10} &= (4R^2 - a^2)\cdot b_5R^3\cdot b_3R\cdot\alpha_3R \\ &= (4R^2 - a^2)\cdot\{2R^4 - a^2(4R^2 - a^2) - R^2(R^2 - a^2)\}\cdot(R^2 - a^2)\cdot(3R^2 - a^2). \end{aligned}$$

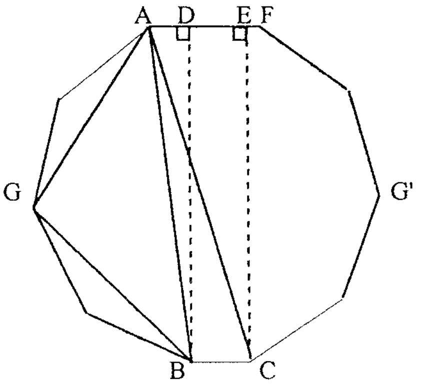
ここで三つの文字はすべて消去され、R のみの 10 次の開方式が得られる。

(7)贅言を付すならば、この対称軸は、不等な辺の垂直二等分線である。ここで述べたような条件を欠くならば帯不尽に関する巻十一の記述は意味を為さない。

(8)定乗数についての紹介は、『明治前日本数学史』第二巻、pp. 403 - 410 、ならびに、前掲拙論の pp. 78 - 84.を参照。拙論では帯不尽以外の正多角形の定乗数の構成法についての仮説を提示しておいた。併せて参照いただければ幸いである。

(9)$k(1)$が奇数の場合は、次の段落で言及されることとなる式、$(a+a')R = 2a_{k(1)}\ r_{k(2)}$ の中の $a_{k(1)}$ について、汎数による直接の式変形が可能となり、それ以後の開方式の構成や定乗数の算出は容易となる。一方、$k(1)$が偶数の場合は、$a_{k(1)}$を消去するためには[公式Ⅱ]を繰り返し用いる必要がある。第 i 係面数が奇数になった時点で操作を終える理由は、この[公式Ⅱ]を用いることができなくなることである。奇角有余の係奇数面斜の上には、係面斜を辺とする二等辺三角形が描けないからである。九角有余を実例としてみよう。

[九角有余の図]

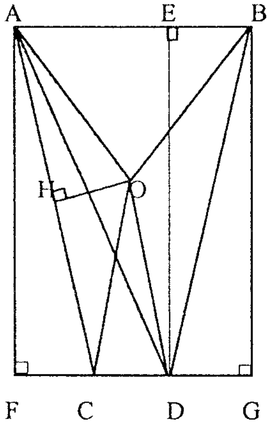


$AB = a_4$, $AC = a_5$,
$BD \perp AF$, $CE \perp AF$,
$BC = a'$, $AG = GB = a_2$.
($a' = at$ とおく。)
AC を用いて、[公式Ⅱ]を構成することはできない。なぜなら、G の側、G'の側共に、係面斜を辺とする二等辺三角形は描けないからである。一方、偶数面にまたがる AB 上には、G を頂点とする二等辺三角形が描ける。すなわち、$k(3) = 2$ の場合は、[公式Ⅱ]が適用できる。

(10)この式に関して、『明治前日本数学史』第二巻、p. 416 は、その導出法を不明としている。以下、この式の筆者による証明を与え、これがどのような経路で導出されたものであるかを予想する。平面幾何学による証明も構成可能であるが、和算家が取り扱うことをしなかった角度の加減という概念が不可避的に伴うので、数学史的に見た場合不適当であろう。そこで、和算家にとっても実行可能であろうと思われる、三平方の定理を用いた代数式的な操作による証明を紹介する。

[証明]下図において、O : 帯不尽の中心、 $OA = OB = R$, $AB = a$, $CD = a'$, $AD = a_{m+1}$, $AC = BD = a_m$, $OH = r_m$ とする。畸径を ρ とすると、$DE = r+\rho$ と表せる。直角三角形 ADE と直角三角形 BDE に関して、三平方の定理より次の

式が成立する。



$a_{m+1}{}^2 = (a+a')^2/4+(r+\rho)^2$ ....①

$a_m{}^2=(a - a')^2/4+(r+\rho)^2$ ....②

①-②より、 $a_{m+1}{}^2 - a_m{}^2 = aa'$ ....③

$(a_{m+1} > a_m)$

また、係面斜、中闊、角径の間に三平方の定理による、次の式が成立する。

$a_m{}^2/4+r_m{}^2 = R^2$ ....④

$a_{m+1}{}^2/4+r_{m+1}{}^2 = R^2$.......⑤

④-⑤より、

$r_m{}^2 - r_{m+1}{}^2 = (a_{m+1}{}^2 - a_m{}^2)/4 = aa'/4$ ....⑥

$(r_m > r_{m-1})$

△ADB =△AOB+△ADO+△ODB より、

$a(\rho+r)/2 = ar/2 + a_{m+1}r_{m+1}/2 + a_mr_m/2$. $\therefore a\rho = a_{m+1}r_{m+1}+a_mr_m$ ....⑦

△ACD = △OAC+△OCD - △OAD より、

$a'(\rho+r)/2 = a'\rho/2 + a_{m+1}r_{m+1}/2 - a_mr_m/2$. $\therefore a'r = a_{m+1}r_{m+1} - a_mr_m$ ....⑧

a, r, R の間と a', ρ, R の間に、三平方の定理より次の関係式が成り立つ。

$r^2 +a^2/4 = R^2$ ....⑨

$\rho^2 +a'^2/4 = R^2$ ....⑩

⑦を自乗して、 $a^2\rho^2 =(a_{m+1}r_{m+1}+a_mr_m)^2$ (∵⑩)

$= a^2(R^2 - a'^2/4)$.

$\therefore a^2R^2 - (a_{m+1}{}^2 - a_m{}^2)(r_m{}^2 - r_{m+1}{}^2)=(a_{m+1}r_{m+1}+a_mr_m)^2$. (∵③、⑥)

$\therefore aR = a_{m+1}r_m + a_mr_{m+1}$ ....⑪

⑧を自乗して、 $a'^2r^2 = (a_{m+1}r_{m+1} - a_mr_m)^2$ (∵⑨)

$= a'^2(R^2 - a^2/4)$.

$\therefore a'^2R^2 -(a_{m+1}{}^2 - a_m{}^2)(r_m{}^2 - r_{m+1}{}^2)=(a_{m+1}r_{m+1} - a_mr_m)^2$. (∵③、⑥)

$\therefore a'R = a_{m+1}r_m - a_mr_{m+1}$ ....⑫

⑪+⑫より、 $(a+a')R = 2a_{m+1}r_m$. [証終]

(11)何故Ⅱ系の写本の元となる書き込みを加えた人物が一人であったと断定できるのかについては、Ⅱ系、Ⅲ系ともに書き込みの内容と形式がほぼ同一で、それらは単一の起源に遡れると仮定できることによる。顕著な例を挙げるならば、原文の開方式には平径、角径、畸径の三種類が示されているのに、書き込

みが加えられているのは、形式的に簡単な角径の開方式についてのみである。写字生の皆が皆、独立にそのような書き込みのある写本を作ったとは考えにくい。そして、前章でも指摘した四角有余に関する誤記は、全ての写本に共通して見られ、どの写本もそれが誤りであることは指摘していない。すなわち、帯不尽の開方式に関する書き込みは、内容の細部にまで立ち入って検討されたものではなく、開方式のある一面のみに着目し、簡単な思いつき程度のものが書き込まれ、それが代々機械的に、つまりII系の写本の後継者はさらに立ち入った検討を加えることなく、伝写を重ねたであろうと考えるのが自然である。他にも、細部に渡る証拠は挙げられるが、巻十一の全本文を校訂する作業とその結果をまとめた別稿を現在準備中であり、そちらで詳細な議論を展開したい。

(12)三人の編者の内、『大成算経』の最終稿を決定したのは建部賢明であったことが、彼の手になる『建部氏伝記』の下巻に述べられている。関は老衰の上に病を得、建部賢弘は公務で多忙の身となっていたからである。

(13)ここで述べたような次数の誤りの原因について、その推測に根拠が無いわけではない。これと同様の間違いを、既に関孝和は『発微算法』の初版で犯しているからである。その誤りの内容については、拙論「関孝和『発微算法』の研究　異版の存在について」、『科学史研究』、No. 199, 1996, pp. 183 - 184.を参照。このような式の次数に関する誤りは、関の傍書法、あるいはそれを漢文形式に書き下した式が、次数を表現するための明晰な方法を欠いていたことから誘発されたものである。