Radon変換の歴史

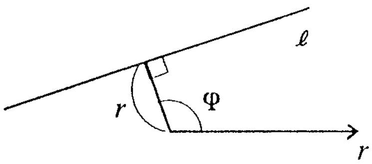
吉沢尚明

§0. 序論

(1) 1995年11月に津田塾大学において開催された「20世紀数学シンポジウム」で報告した小論「Radon変換」(文献表[0])は，数学史としての内容が不充分なものになった．それを補うことがこの報告の目的の一つである．

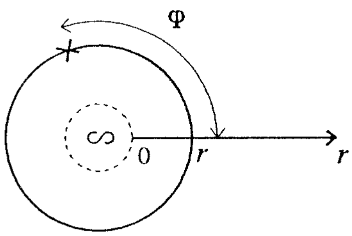
本報告で“Radon変換”と称するのは，1917年のJ.Radon[1]を端緒と見る立場に従っている．しかしこの概念の初出は少なくとも17世紀のNewtonに遡ると見るべきなので，本稿での名称としては適当ではないが，今のところ適切な名称が思いつかない．95年のsymposiumの口頭報告では，初出などに言及したが，出版の際には全て割愛した．

(2) 2次元“Radon変換”の定義の要点を，文献[0]に従って便宜上以下に記しておく．



$P=\{p\}=\{(x,y)\}$

(図1)



$\Lambda=\{\ell\}=\{(\varphi,r)\}$

(図2)

Euclid平面Pの，(向きをつけない)直線 ℓ の極座標を(φ,r)とする(図

1). このとき, ℓ の全体 Λ は, (半円筒 $(0 \leqq r < \infty)$ から作られる) 非Euclid曲面になる(図2). (図の ∞ はMöbius曲面に用いられる記号.)

次に $f(p)$ を P 面上の連続・コンパクトな函数とする. (以下は, X線CT (=computer tomography)の説明と見れば, 自然な定義であろう.)即ち, $f(p)$ は例えば人体を輪切りにした一枚の各点におけるX線の吸収係数で, これは未知函数である. 函数 $f(x)$ の各直線 ℓ 上の積分値は Λ 上の函数である:

$$(\mathrm{R}\, f)(\ell) = \tilde{f}(\ell) = \int_{\ell} f(p)dp \ .$$

これを f の Radon変換と称する. 従って各 ℓ について $\tilde{f}(\lambda)$ は (X線CTの場合は) 測定される数値であり, $\tilde{f}(\lambda)$ は Λ 上の既知函数である. 変換Rの逆変換を求める方法は, 現在, 応用における重点で, 多くの結果が得られているが, 本項では立ち入らない(文献[0]に簡単な解説がある).

(3) 本稿の内容の概略は, 次のとおりである.

(§ 1)複素単純群のGauss分解の歴史—— Gauss分解は, Gelfandが用いた表現論における有効な方法で, この分解はGaussの eliminatio(消去法)に発すると見られる.

(§ 2)Newtonの "Principia"にあるRadon変換の萌芽—— この孤高の著述の中に, 2行程で述べられていたアイディア. V.I.Arnoldの指摘を紹介する.

(§ 3)視覚の脳内機構とRadon変換との類似性(付記)—— 前者は分子生物学におけるHubel/Wieselの画期的な理論であり, これとRadon変換とが関連するという予想を述べる.

§ 1. 群SL(2, ℂ)のGauss分解とその歴史

(A) 概略—— Gelfandは1960年の論文[2]で, 複素単純群の表現論に, (彼が"積分幾何"と名付けた) 有効な方法を用いている. これは, 非

Euclid空間(特に任意次元のLobachevsky空間)の場合にも，(E_2の直線の代わりに)適当な部分多様体を用いて，Radon変換の概念を拡張すれば，逆変換も(本来のRadon変換の場合と同様に)構成できることを示したものである．([0]のp.67に[2]の要約がある．)この方法の基礎となるのは，G=SL(2，ℂ)の場合に即して書くと，“Gauss分解” $G=Z_-DZ_+$である．ここでDは対角行列群，Z_+とZ_-は，いずれも対角要素が1に等しい上(下)三角行列群を表す．(この研究[2]を契機として，Radon変換論は，種々の場合に構築された．)

この分解の根底にある概念と方法は，Gaussによって(eliminatioの名称で)誤差解析に用いられた([3]，[3.英訳]等)．ただし数学のこの方面で行列の分解が屡々使われるようになったのは，20世紀中葉以来のようである．表現論では，[4(独訳)]の中で"Zerlegung von Gauss"と呼ばれているから，Gelfandの積分幾何はGaussの方法を伝承していると見ることは妥当であろう．以下，Gauss分解の成立の歴史と表現論におけるその役割との概要を述べる．

(B) 非Euclid空間上のRadon変換——

(1) Euclid平面E_2上のRadon変換と，それをLobachevsky平面L_2上に移した変換とは，次の様に対応が付けられる．

[Euclid平面(本稿の§0)]	[Lobachevsky平面L_2(文献[0])]
$X=E_2$	$X=\mathbb{R}^3$の中の双曲面
運動群$\mathcal{M}$	3次元Lorentz群SL(2,ℝ)
直線ℓ	放物線π
Radon変換 $Rf=\tilde{f}(\ell)=\int_\ell f(p)dp$	Radon変換 $\tilde{f}(\pi)=\int_\pi f(x)dx$

(2) この表を，更に3次元Lobachevsky空間に移し，同時に(計算に乗せ易い様に)変換群を複素unimodular群SL(2,ℂ)で表示すると，次の様に対

応することになる．

$$
\begin{aligned}
&(\text{空間}E_2) &&\longleftrightarrow\ 3\text{次元双曲空間}\\
&(\text{直線}\ \ell) &&\longleftrightarrow\ 2\text{次元放物面}\ \pi\\
&(\text{Radon変換}) &&\longleftrightarrow\ \tilde{f}(\pi)=\int_{\pi} f(x)dx
\end{aligned}
$$

(C) Gelfandの積分幾何学——

一般次元のRadon変換とその逆変換を求める問題（文献[0],[1],[2]），及び更にその拡張については，(これらは現代数学の問題であるから)ここではその詳細や証明は述べないこととするが，主要な方法は，群$G=SL(n,\mathbb{C})$の"Gauss分解"に代表されている．即ち$SL(n,\mathbb{C})=Z_-DZ_+$，ここで

$$
Z_-=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ \zeta_{ij} & & & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
Z_+=\begin{pmatrix} 1 & & & z_{ij} \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
D=\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}.
$$

(D) Gauss分解の歴史の要約—— 以下の項(1)と(2)については，主としてC.H.Davisの文献[3(英訳)]による．

(1) Gaussのeliminatio(消去法)

Gaussは"Theoria Motus"[3]の中で，消去法を導入した．その目的は彼自身の"最適値"のウェイトが（"common elimination"によって計算される行列）

Cの対角要素に逆比例することを示す理論的手段として用いることであった．そして，この計算のアルゴリズムを2次形式の形で記述した．

(2) 19世紀の多くの数学者達は，このGaussの方法を引き継いで，(標準行列分解に当たるものを)双1次形式及び2次形式の変換として発展させた．なお，行列そのものの分解は，20世紀になって(1950，60年代に)漸く出現した．

(付記)上述(2)のGaussの課題は，19世紀の重要な一群の理論として発展した．この歴史については，稿を改めて考察したい．

§ 2. Newtonの "Principia"（V.I.Arnoldの指摘）

Arnoldは次のように指摘している([5.英訳]のpp.83-94及びpp.101-105)：“Abel積分の超越性”(と現代の用語で表現されること)を，Newtonが"Principia"[6]の中で証明しており，その中にRadon変換の“萌芽”がある．しかしNewtonが何をねらって，Radon変換を考え出したのかは明瞭でない．

指摘されたLemmaXXVIIIは，例えば[6.邦訳]のp.142～p.144にあり，問題の箇所は，このLemmaの証明の最後から四分の一程のところにある．主旨は次のとおりである：卵形線(例えば楕円)を截る各直線に中心から垂線を下ろすと，直線が回転するとき，面積が無限多価になることが明示される．(このことから，この卵形線の積分函数は代数函数では表せないことが結論される．)

§ 3. 視覚の脳内機構とRadon変換との類似性(付記)

(1) 自然の中に —— 実はわれわれの視覚の脳内機構に —— Radon変換に類似のいくつかの機能がある様に思われる．この機能はD.H.HubelとT.N.Wieselによって，1960年代初期以来，次々と発見された．特に基本的

なことは，一次視覚野(脳内視覚領域の入口)の或る種の細胞系が，視野にはいった線分の傾斜角(及び長さ)に応じて反応することである([7]，[8(邦訳)])．

この発見は，脳内の情報処理機構を見出すための生理学的研究一般の指導原理とされて来たと言われている．筆者は(岡崎国立共同研究機構の)生理学研究所の1987年の国際シンポジウムでHubelに会う機会があり，(この発見の持つ一般性として)聴覚について尋ねたところ，「視覚と同種の問題だと考えてよいと思う」ということであった．

一方数学の観点からは，この発見から生じる課題として，網膜で受けた図形は，それより内側の脳では，Radon変換の形で処理されているのではないか，等とも考えられるであろう．

一般の意味のRadon変換と視覚は，ともに形を調べる機構であるが，両者を比べると，視覚が圧倒的に複雑である．それでも両者それぞれのevolutionの解明が，互いに他方を理解するための手掛かりになるのではないかと，筆者は夢想し，期待している．

(2) 本§は，表記のテーマ(Radon変換と視覚機構)を併記した予想に過ぎず，従って視覚の機構についての分子生物学的研究の記述を加えることは，その量及び性格ともに，適当でないと思う．ただ，数学史を書くべき本稿に，この種のテーマを付け加えたことの理由(或いは“弁明”)の一つを以下に付記しておきたい．

かつてH.Weylは，symmetryという幾何学の基本的な概念について，歴史的展開に基づくmonumentalな書"symmetry"[9]を著した．その中で(特にpp.41-80)，脱稿と関係する時期(1950年頃)までに生物に関して発見されていたsymmetryについて，見事な図(HaeckelのKunstformen der NaturとChallenger Monographなど)と(数学及び生物学からの)発生学的な記述がある．即ち，古典数学と古典生物学という二つの科学に，symmetryという概念の意味を顕現する対象が見られる．

その具体例として，ここでWeylと当時の生物学者との論議の一片を，(Weylの記述に沿って)簡単に引用する([9]のp.60)．Ophiodea綱の棘皮

動物の外観は回転対称(“正多角形”型)であるが，生物学者は，“それらの幼虫は左右対称の原理によって形成され，成虫の回転対称は表面的なものである”と注意した．しかし生物のうちには，この様な注意が適用できないものがある．例えばDiscomedusa(くらげ，8軸対称)を考察すれば，この腔腸動物は，系統発生のevolutionにおいて，回転対称から左右対称に移行するより以前の位置にあるものであり，先の棘皮動物の場合とは異なる，云々．

Weylは1930年頃からこのような問題について具体例を調べ，思索していたと思われる．ここで重要なのは，動物の現在の形状についての論議よりも，evolutionの過程の考察を基礎にすることであろう．

symmetryは一つの概念であり，Radon変換はそれより複雑多岐な理論ではあるであろう．しかし(Weylの発想になぞらえば)Radon変換も，現代数学と現代生物学の両方の中に，(それぞれの領域に存在する或る個体の)機能として存在している様に思われる．symmetryが生物の発生とevolutionの考察において意味を持つと述べられているのと同様に，Radon変換も両者(即ち数学と生物学)の対象(個体)のevolutionについての考察に資するかもしれないと，筆者は考えた次第である．

文献

以下の文献のうち，大部のものであって，かつ本稿と関連するのが一部分であるものについては，その部分を本文の中で示しておいた．

[0] 吉沢　尚明：Radon変換　（笠原乾吉,杉原光夫編『20世紀の数学』，日本評論社（1998），pp61-71）

[1] J.Radon : Über die Bestimmung von Funktionen druch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten — Berichten der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig , 69(1917), 262-277.

[2] I.Gelfand : 「積分幾何学及びその表現論との関係」(ロシア語) — Uspekhi Mat. Nauk , 15(1960).

[3] C.F.Gauss :Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionilus Conicis Solem Ambientium , Perthes-Besser,Hamburg ,(1809).

[3(英訳)] C.F.Gauss :Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections. (C.H.Davis 訳) — Little-Brown & C ,(1857). (Reprint by Dover , New York (1963).)

[4(独訳)] I.M.Gelfand , M.A.Neumark : Unitäre Darstellungen der Klassischen Gruppen — Akad. Verlag , Berlin (1957) [原著(1950)はロシア語]

[5(英訳)] V.I.Arnold : Huygens and Barrow, Newton and Hooke , (Eric J.F. Primros による英訳) Birkhäusen , 1990. [原著はロシア語(1989)]

[6] I. Newton , Philosophia Naturalis Principia Mathematica , 第3版 (1726).

[6(邦訳)] ニュートン『プリンシピア』(第3版[6]の英訳から邦語への中野猿人による重訳) 講談社(1977)

[7] D.H.Hubel and T.N.Wiesel : Functional architecture of macaque monkey visual cortex (Ferrier Lecture) — Proc. Royal Soc. London , B.198 (1977), 1-59.

[8(邦訳)] D.H.ヒューベル/T.N.ウィーゼル : 視覚の脳内機構 — 日経サイエンス, (1979年11月号). [原著はScientific American所収]

[9] H.Weyl : Symmetry — Princeton University Press (1952)