古典変分から確率場の変分へ

Euler, Hadamard, Lévyの確率場へのインパクト

飛田　武幸

名城大学　理工学部

§０。<u>はじめに</u>

Euler によって体系化された変分法や、Hadamard, Voilterra, Lévy などによって展開された古典関数解析が、現在の確率場の研究に大きなインパクトを与えている。ヨーロッパにおいて栄えたそれら関数解析の成果をあらためて訪ねて、現代の確率解析の研究の糧としたい。

そのような歴史を訪ねるにあたって、数理物理学との関連は当然であるが、その他どうしても確率論の歴史に立ち入らざるをえなかった。その歴史とは、通説とは違って、解析学に隣接した分野としての確率論、しかもあえて言えば、純粋数学の一分野としての、確率論のことである。

関数や図形を変数とする関数、すなわち汎関数、の解析を扱うのが変分法である。その歴史は古いが、これまで汎関数の極値を求めることに大きなウエイトが置かれていたようである。　この理論は、一面１変数あるいは多変数（有限個の変数）の関数の解析を取り扱う初等微積分の拡張と考えられるかもしれないが、実はそのような視点を遥かに超えて深く、豊富な内容をもつものでる。さらに、幅広い応用のあることも特徴である。

変分法の発展の方向は多岐にわたっているが、中でも伝統的な方向として、評価関数をきめて、その最適値を求めるのに Euler 方程式に持ち込む方法がある。また極小曲面を求める Plateau の問題も幾何学的方法を取り入れて大いに議論さ

れてきた。もう一つの流れは、曲線あるいはより一般の多様体を変数とする汎関数の解析がある。特に、境界が変形したときのグリーン関数の変分に対する興味深い Hadamard 方程式を得て人々の注目を集めた。

一方、物理学、特に場の量子論においては Dirac の提言があった。それは確率場への展開についての示唆に富むものである。また一方で、朝永方程式は、確率解析たいして新しい角度からのインパクトを与えた。このアイディアは是非参考にしたいところである。

§1。古典関数解析の視点

現時点で前世紀末から今世紀前半に隆盛を極めた関数解析には著しい特徴をみることができる。

1）数理物理のみならず生物の諸現象からの問題提起に熱心であった、

2）関数空間に最適な測度を導入するにあたって、有限次元の場合とは事情が違う困難さがあることを十分認識していた、換言すれば決して安易な無限次元化ではなかった、

3）調和解析の要素が重視されていた（間接的なことが多かったが）、

等を注意したいところである。

この事実をふまえて、確率解析への我々の観点は確率場の重要性である。確率過程 $X(t)$ の場合には、それは時刻 t の変化に応じた偶然量の変化を表している。t の動きは1次元的でしかありえない。ところが環境（領域）によって変化する偶然量とか、ループをパラメータにもつ確率変数のシステムのような、いわゆる確率場を扱おうとすれば、新しい手法を開拓しなければならない。そこで、領域やループなどのパラメータの微小変化に応じた確率場の変分を考えることが重要となる。

このアイディアを解析的に活かして行くためにこそ、古典関数解析の英知が必要である。

これを意識しながら、もっと古いところを調べてみよう。すぐに思いつくものでも次のような資料が見つかる。

C.F. Gauss.円錐曲線で太陽の回りをまわる天体の運動論。1809 年.ガウス分布の特徴づけは解析的である。

P.S. Laplace, Théorie analytique des probabilités. 1812.

分布の Laplace 変換、ガウス分布の導入など、この立場から見直してみたいものである。

ついで

H. Poincaré, Réflexions sur le calcul des probaqbilités. 1899

La science et l'hypothese. 1902.

Le hasard. Revue du Mois 3, 1907.

など確率と解析を論じた著書論文がある。

等々、一々数えあげてみればきりがない。しかし今、注目したいのはイタリアでの研究の流れである。

「イタリア学派」

特に Pisa の Scuola Normale Superiore における研究は今あらためて評価したいところである。それは Dini, Volterra, Tonelli と続く学派である。

Ulisse Dini (1845 - 1918)

関数列の収束定理は有名であるが、また Dini の曲面でも知られているように幅の広い数学者であった。また、Scuola Normale Superiore の資料では、この大学では数理物理の伝統があったが、Dini はさらに関数論や微分方程式など広い範囲の数学の研究を奨めた人であった。続く Volterra, Tonelli は Dini の薫陶をうけた人たちである。

Vito Volterra (1860 - 1940)

1882 Pisa 大学　物理学博士　（流体力学）, 1883 Pisa 大学　力学教授

「付記」関連した話題が豊富な

P.A.M.Dirac (1902 - 1984)

朝永 振一郎 (1906 - 1979)

E.Hopf (1902 - 1983)

達の業績との関連も述べたいが、それは別な機会にしたい。

§3。複雑系への発展

よく知られているように、複雑系の中でもランダムな系は扱いが困難である。中でも確率場として記述されるときは、そのような場の変分理論が有効に適用される。特に Wiener の意味での innovation を構成するときには大いに効力を発揮する。そこにはブラウン運動が登場し、ホワイトノイズ解析に訴えることになろう。それが最も基本的だからである。

このような状況の下で、我々の方針は次のように述べることができる。

「基本的な random な系を予めきめておき、それを基にして、与えられた複雑な random 系を表現する。

複雑系の解析 (確率論的アプローチ)

ブラウン運動を基本にして、時間進行を考慮しながら (cf.Causality) その汎関数を扱う。多くは情報理論的な議論になる。

1) まず、線形汎関数として、ゆらぐガウス系が表現される。

複雑性の程度を表す多重マルコフ性なども表現の核関数の言葉で示すことができる。

2) 非線形関数

複雑系における”ゆらぎ”の作用を、時間的・空間的に目に見える形に

表すのに好都合な確率素子を変数にとり、その関数としてゆらぐ系を記述する。この際、くりこみを必要とすることが多い。

そのような関数の素子（変数）による微分や積分が可能になる。

無限次元回転で不変な分布を使うので、フーリエ解析の一般化である無限次元調和解析が実行できる。これも標題にあげた数学者達によるインパクトに他ならない。

情報理論的な立場から、それらの方法の重要な応用をみよう。それは時系列に対するものである。項目を列挙すれば

時系列の変調

AM (amplitude modulation)

FM (frequence modulation)

両者は物理、工学において有用な応用が多い。後者は指数型の汎関数が登場するので、その特性は比較的容易に見つけることができる。

Subordination.

与えられた時系列をランダムな時間で観測（送信）する。自然界に現れる。

変分解析

複雑系の話題でしばしば確率変分が役だっていることを注意したい。

謝辞とお詫び　第9回数学史シンポジウムで報告する機会を与えてくださった杉浦光夫先生・笠原乾吉先生にお礼申し上げます。また、思いがけず脱稿が遅れてしまい、御迷惑をおかけしたことをお詫びいたします。

以上