# リー群の極大コンパクト部分群の共軛性

杉浦　光夫

## §0　はじめに

任意の連結リー群$G$は、極大コンパクト部分群$K$を持つ。これは自明な事実ではなく、$K$の存在は証明を要する。その証明は$G$内に$G/K$の断面を構成することでなされる。例えば$G$が連結線型半単純リー群ならば、$K$の存在は次のようにして示される。$G$のリー環を$\mathfrak{g}$とし、その複素化$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$における$\mathfrak{g}$に関する複素共軛をとる写像を$\sigma$とする。このとき$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$のコンパクト実形$\mathfrak{g}_u$で、それに関する複素共軛写像$\tau$が、$\sigma$と可換（$\sigma\tau = \tau\sigma$）となるものが存在する。([7] III. Th. 7.1)

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_u, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g}_u$$

とおくと、

(1)　$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$$

をみたす。(1)の分解を、$\mathfrak{g}$の<u>カルタン分解</u>という。$\mathfrak{k}$は$\mathfrak{g}$の部分リー環であり、$\mathfrak{k}$をリー環とする$G$の連結リー部分群を$K$とする。カルタンは、$K$を$G$の<u>特性部分群</u>（sous-groupe caractéristique）と呼んでいる。$G$が実$n$次元ベクトル空間$V$上の一次変換群とするとき、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(V^{\mathbb{C}})$と考えることができる。そしてワイルの基本定理によりコンパクトリー環$\mathfrak{g}_u$をリー環とする$GL(V^{\mathbb{C}})$の連結リー部分群$G_u$はコンパク

トである。一方半単純リー環$\mathfrak{g}$は代数的リー環(シュヴァレー[5][6])だから、$G$は$GL(V)$のある実代数部分群の連結成分であり、従って$GL(V)$の閉部分群である。そこで$G \cap G_u$はコンパクトであり、その連結成分$K$もコンパクトである。一方連結線型半単純リー群は、岩澤分解できる。すなわち、$G$の単連結可解リー部分群$L$が存在して、

(2) $\qquad G = K \cdot L \quad , \quad K \cap L = \{1\}$

となる。$L$は単連結可解リー群だから、そのコンパクト部分群は$\{1\}$のみである。今、$K \subset K' \subset G$となるコンパクト部分群$K'$があれば、(2)により

(3) $\qquad K' = K \cdot (K' \cap L)$

となる。このとき$K' \cap L$は$L$のコンパクト部分群だから、$K' \cap L = \{1\}$であり、従って(3)から$K = K'$となる。これは$K$が$G$の極大コンパクト部分群であることを示している。

岩澤[10]とマリツェフ[12]は、これを一般化して任意の連結リー群$G$に対し、次の定理A, Bを証明した。(マリツェフでは、極大連結コンパクト部分群が共軛という形になっている)。

定理 A. 任意の連結リー群$G$は、極大コンパクト部分群$K$を持ち、$G$は$K$とユークリッド空間の直積と同相になる。

定理 B. 連結リー群$G$の任意の二つの極大コンパクト部分群は$G$内で共軛である。$G$の任意のコンパクト部分群は、ある極大コンパクト部分群に含まれる。

本稿は、定理Bの証明で、最も本質的な半単純リー群の場合の証明を解説することを目標にしている。定理Bを証明した岩澤の論文[10]では、半単純リー群の随伴群の場合は、E.カルタンの論文[2]を引用してすませて居り、それを仮定して定理Bの証明を与えているのである。ここでは、本質的に同じであるが随伴群でなく、一般の線型連結半単純リー群に対する定理Bを、定理B'として§1で証明する。この証明はカルタンのアイディアに基づくもので、対称リーマン空間の理論を用いている。これに対し、シュヴァレーは、対称空間や微分幾何を全く用いない定理B'の証明を与えた。この結果は公刊されなかったためあまり知られていないと思われるので、岩堀[9]に従って§2で紹介する。

定理Bは、一般の連結リー群Gについて成立つが、いくつかの典型群の場合には、極大コンパクト群の共軛性は、簡単な初等幾何的事実から導かれる。

そのことを§3と§4で示した。§3では、$G=GL(n,\mathbb{R})$の場合を扱う。$GL(n,\mathbb{R})$の極大コンパクト部分群は、$\mathbb{R}^n$上の任意の定符号二次形式の直交群であり、その共軛性は、弥永・安倍[11]の自由可動性の公理と同値である。また§4では、不定符号の二次形式，エルミット形式の直交群，ユニタリ群を扱う。この場合，極大コンパクト部分群の共軛性はシルヴェスターの慣性律の系である。

## §1 カルタンの証明

E.カルタンは[2]16節(p.19)で次のように述べている(原文イタリック)。
「開(非コンパクト)単純リー群Gの任意の閉(コンパクト)部分群$K'$はGのある特性部分群Kの部分群$K_1$と共軛である」(記号を変更した)。
すなわちGのある元$g$により $gK'g^{-1}=K_1\subset K$ となるというのである。
つまりこれはGがコンパクトでない単純リー群の場合の定理B(§1)である。

カルタンは等質空間$G/K$が、後の彼の用語を用いるとき、対称リーマン空間であって、G不変なリーマン計量を持ちその断面曲率は非正≦0であることを用いる。カルタンは次のように述べている。「有限な距離の所には特異点のないリーマン空間Mが単連結で(断面)曲率が≦0とする。Mの上の有限個の点を与えたとき、それらを全体として不変にし、その有限の点の置換を引起すMのすべての等距離変換の共通の不動点Aが存在する。この点Aは、与えられた有限個の点への距離の自乗の和が最小になるような点である(2)。この性質は有限個の点の代りに、Mの閉(コンパクト)部分多様体を作る無限個の点に対しても成立つ。従ってGの任意の閉(コンパクト)部分群$K'$は、Mの閉(コンパクト)部分多様体V [$p$を$G\to G/K$の射影とするとき$p(K')=V$]を不変にするから、$K'$はMの中に不動点Aを持つ。」ここで(2)の示す脚註は次のようなものである:「(2) E. Cartan, *Leçon sur* la Géométrie des espaces de Riemann. p. 267 (Paris, Gauthiers-Villars, 1928」

そこで書架から、この本を取出して見ると、p.267 には上述のようなことは全く書いてないではないか。その近くのページも調べて見たが引用してあるような内容の文章を見つけることができなかった。その内に気付いたのは、私の本は1946年刊の第二版であるが、上に引用されているのは、1928年刊の初版だという点である。そこで東大の図書室に行くと、そこも第二版だけだったが、カードで初版もあることがわかったので、別置してあった初版を借りることができた。比較して見ると、初版の9章が第2版では13章に増え、巻末のノートも三つから五つになり、総ページ数も273ページが378ページに増えている。さて、初版のp.267を見るとそこには、確かに引用された内容があった（第2版ではp.354）。これはノートⅢの「リーマンの曲率（断面曲率）が負または0の空間について」において、単連結なこのような空間は、ユークリッド空間と同相であり、そこで余弦不等式 $c^2 \geq a^2+b^2-2ab\cos C$ が成立つことなどが述べられている。（ここで実は完備性の仮定が必要なのであるが、リーマン空間の完備性は、H.ホップ・リノウの論文［8］（1931年）で初めて注目されたのである。）　そしてこのノートⅢの最後に、リーマンの曲率が $\leqq 0$ のリーマン空間 $\mathcal{E}$ で、単連結でないものが考察されて居り、$\mathcal{E}$ の単連結被覆リーマン空間 $\mathcal{E}'$ を考えるとき、$\mathcal{E}'$ の被覆変換群 $g$ は無限群であることが証明されてい

る。それを帰謬法で証明するために、$g$が有限群であるとするとどうなるかが調べられている。この文脈の中で、引用された内容が証明されているのである。それを若干パラフレーズして記すと、次のようになる。

定理C(E.カルタン) 断面曲率が常に $\leqq 0$ であるような単連結(完備)リーマン空間$M$において、有限個の点 $O_i$ $(1\leqq i\leqq k)$ が与えられたとき、動点$P$と$O_i$の距離を$r_i$とし、$f(P)=\sum_{i=1}^{k} r_i^2$ とおく。このとき$f$が最小となる点$A$(有限集合$B=\{O_1, O_2, \cdots, O_k\}$の重心)が唯一つ存在する。$\varphi$が$M$の等距離変換で、$\varphi B=B$をみたすとき、点$A$は$\varphi$の不動点である；$\varphi(A)=A$.

証明　リーマン計量による$M$の二点$p, q$の距離($p, q$を結ぶすべての区分的$C^1$級曲線の弧長の下限)を$d(p, q)$とする。今定点$O\in M$を一つとるとき

(1) $$d(p, O)\to+\infty \Rightarrow r_i(p)=d(p, O_i)\geqq d(p, O)-d(O_i, O)\to+\infty \quad (1\leqq i\leqq k)$$

である。従って任意の $N>0$ に対し、$R>0$を十分大きくとるとき

(2) $$d(p, O) > R \Rightarrow f(p) > N$$

が成立つ。今、$N=f(O)$に対して、(2)をみたす $R>0$ を一つとり、$K=\{p\in M \mid d(p, O)\leqq R\}$ とおく。$K$は有界閉集合だから、$M$の完備性によりコンパクトである。従って連続函数$f$は、$K$のある点$A$で、$K$上の$f$の最小値 $\alpha>0$ に達する。

点$O$は$K$に属するから

(3) $$\alpha\leqq f(O)=N$$

である。 (2)(3)から，$a$は$M$上における$f$の最小値でもある。

動点$P\neq A$と$A$を結ぶ測地線$(AP)$の弧$\gamma$が，弧長$t$をパラメタとして $t\mapsto g_t$ $(0\leqq t\leqq L)$, $g_0=A$ と表わされるとする。そして$\gamma$が$O_i$と交わらないとする$(1\leqq i\leqq k)$.

測地線$(AO_i)$と$(AP)$が$A$でなす角の大きさを$\alpha_i$とするとき，

(4) $$\left[\frac{d}{dt}d(g_t, A)\right]_{t=0} = \cos\alpha_i$$

となる(後に述べるヘルガソン[7]の第1章 Lemma 13.6を見よ)。そこで点$A$が函数$f$の極小点であるから，$\left[\frac{d}{dt}f(g_t)\right]_{t=0}=0$ となるので，(4)から

(5) $$\sum_{i=1}^{k} r_i(A)\cos\alpha_i = 0$$

を得る。一方$M$の断面曲率が常に$\leqq 0$であることから，$d=d(A,P)$とおくとき，余弦不等式

(6) $$r_i(P)^2 \geqq r_i(A)^2 + d^2 - 2d\,r_i(A)\cos\alpha_i,\quad 1\leqq i\leqq k$$

が成立つ。 (6)を$i$について加え合せて，(5)を用いると，不等式

(7) $$f(P)=\sum_{i=1}^{k} r_i(P)^2 \geqq f(A)+kd > f(A) = a \quad (P\neq A)$$

が得られる。即ち$A$は$f$の唯一つの最小点であり，$f$は$A$においてのみの最小値$a$に達する。

$B=\{O_i \mid 1\leqq i\leqq k\}$とし，$M$の等距離変換$\varphi$が$\varphi(B)=B$をみたすとき

(8) $$f(\varphi(A)) = \sum_{i=1}^{k} d(\varphi(A), O_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} d(A, \varphi^{-1}(O_i))^2 = f(A)$$

となるから，$\varphi(A)$も$f$の最小点であり，前半より$\varphi(A)=A$である。 ∎

Lemma 13.6（ヘルガソン[7]，オI章．p.77）　Mは完備単連結リーマン空間で，その断面曲率は常に $\leqq 0$ とする。今 $\gamma: t \mapsto g_t\ (0 \leqq t \leqq L)$ は，点 $p$ を通らない微分可能曲線で $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ $({}^{\forall}t \in [0, L])$ となるものとする。このとき曲線 $\gamma$ と測地線 $(p g_0)$ が $g_0$ でなす角の大きさを $\alpha$ とするとき，次の等式が成立つ：　$\left[\frac{d}{dt} d(g_t, p)\right]_{t=0} = \cos\alpha$

証明は[7]を参照されたい。

さてカルタンは上の定理が，有限集合Bでなく，このリーマン空間Mの等距離変換群 $I(M)$ のコンパクト部分群Kの軌跡 $K \cdot p$ に対しても成立つと主張しているが，その詳しい証明は述べていない。カルタンのアイディアに沿ったこの定理の証明は，A．ボレル[1]，G.D.モストウ[13]，ヘルガソン[7]等によって与えられた。モストウ[13]の証明は，リーマン幾何学の知識をできるだけ用いないで，行列の計算によって初等的に証明している点で興味がある。ヘルガソン[7]は逆に必要なリーマン幾何の知識をすべて準備した上で，証明を行っている。その証明は，Kが有限群の場合の上述のカルタンの証明と平行して居り，カルタンのアイディアに最も忠実であると思われるので，その要点を紹介しよう。

定理D（ヘルガソン[7]オ1章定理13.5）．Mを単連結完備リーマン空間で，その断面曲率は常に $\leqq 0$ とする。KがMのコンパクトなリー変換群で，Kの各元はMの等距離変換であるとき，Kの元の共通の不動点が存在する。

証明　$dk$ を，コンパクト群Kの $\int_K dk = 1$ と正規化されたハール測度とする。リーマン計量によるMの二点 $p, g$ の距離を $d(p, g)$ とし，一点 $p$ を固定して，M上の函数

(1) $$J(q)=\int_K d(q,k\cdot p)^2\,dk$$

とおく。$J$ は $M$ 上の連続函数 $\geqq 0$ である。$p$ を通る $K$ の軌跡 $K\cdot p$ はコンパクトであるから、有界であり、ある $R>0$ が存在して

(2) $$d(p,k\cdot p)\leqq R \qquad (\forall k\in K)$$

となる。任意の $q\in M$ に対して、$d(q,p)\leqq d(q,k\cdot p)+d(k\cdot p,p)$ であるから，(2)により

(3) $$d(q,k\cdot p)\geqq d(q,p)-d(k\cdot p,p)\geqq d(q,p)-R$$

となる。(3)の両辺の2乗を $K$ 上で積分して

(4) $$J(q)=\int_K d(q,k\cdot p)^2\,dk\geqq\int_K(d(q,p)-R)^2\,dk=(d(q,p)-R)^2$$

となるから

(5) $$d(q,p)\longrightarrow+\infty\ \Rightarrow\ J(q)\longrightarrow+\infty$$

である。特に次の(6)が成立つ：

(6) $$(\exists r>0)(d(q,p)>r\ \Rightarrow\ J(q)>J(p))$$

今 $B_r(p)=\{q\in M\mid d(q,p)\leqq r\}$ とおくと，$B_r(p)$はコンパクトだから、実数値連続函数 $J(q)$は，$B_r(p)$ 上の最小値 $a$ を，ある点 $q_0\in B_r(p)$ でとる。このとき

(7) $$J(q_0)\leqq J(q)\qquad(\forall q\in B_r(p)),\qquad 特に\ J(q_0)\leqq J(p).$$

である。(6)(7)により，$q_0$はM上におけるJの最小点である。即ち

(8) $$J(q_0)\leqq J(q)\qquad(\forall q\in M)$$

となる。そこで今，

(9) $$J(q_0)<J(q)\qquad(\forall q\neq q_0)$$

が言えたとすれば、任意の$k\in K$に対し

(10) $$J(kg_0)=\int_K d(kg_0,k_1\cdot p)^2dk_1=\int_K d(g_0,k^{-1}k_1\cdot p)^2dk_1=J(g_0)$$

だから，(9)により

(11) $$k\cdot g_0=g_0 \qquad (\forall k\in K)$$

となり、定理Dは証明された。以下(9)を証明しよう。

Mが完備な単連結リーマン空間で断面曲率が常に$\leqq 0$ということから，Mの任意の二点$p,g$ $(p\neq g)$に対して，$p$と$g$を結ぶ測地線の弧が唯一つ存在し、その弧長は距離$d(p,g)$に等しい([7]定理13.3による)。また負曲率空間M上の任意の測地三角形において，三辺の長さが$a,b,c$で，その対角の大きさが$A,B,C$であるものに対して，余弦不等式

(12) $$a^2+b^2-2ab\cos C\leqq c^2$$

が成立つ(系13.2)。

今，$g\neq g_0$とし，写像$t\longrightarrow g_t$ $(0\leqq t\leqq d(g_0,g))$が，$g_0$と$g$を結ぶ測地線の弧を定義するとしよう。任意の$k\in K$に対し，$k\cdot p\neq g_t$とし，二つの測地線$(g_t,g)$と$(k\cdot p,g_t)$が点$g_t$でなす角を$\alpha_t(k)$とする。このとき上述のLemma 13.6により

(13) $$\frac{d}{dt}d(g_t,k\cdot p)^2=\begin{cases}2d(g_t,k\cdot p)\cos\alpha_t(k), & k\cdot p\neq g_t \text{のとき}\\ 0, & k\cdot p=g_t \text{のとき}\end{cases}$$

となる。

次に

(14) 函数$F(t,k)=\dfrac{d}{dt}d(g_t,k\cdot p)^2$は各$(0,k_0)$ $(k_0\in K)$で連続である。

ことを証明しよう。 $K$を分割して

(15) $$K_1=\{k\in K \mid k\cdot p=g_0\},\qquad K_2=\{k\in K \mid k\cdot p\neq g_0\}$$

とおく。

$k_0\in K_2$のとき, 写像 $(t,k)\longmapsto \cos\alpha_t(k)$は, 点$(0,k_0)$で連続であり、従って$F$も連続である。

$k_0\in K_1$ すなわち $k_0\cdot p=g_0$ のとき. $(t_n,k_n)\to(0,k_0)$ $(n\to\infty)$とすると、(13)により

(16) $$|F(t_n,k_n)|\leqq 2d(g_{t_n},k_n\cdot p)$$

であり, かつ

(17) $$d(g_{t_n},k_n\cdot p)\to d(g_0,k_0\cdot p)=d(g_0,g_0)=0\quad(n\to\infty)$$

であるから

(18) $$\lim_{n\to\infty}F(t_n,k_n)=0=F(0,k_0)$$

であり. $F$は$(0,k_0)$で連続である. これで(14)は証明された。そこで $F(t,k)=\frac{d}{dt}d(g_t,k\cdot p)^2$ は $[0,d(g_0,g)]\times K$上の連続函数である。従って径数を含む積分に関する周知の定理から, 函数$t\longmapsto J(g_t)$は微分可能で

(19) $$\frac{d}{dt}J(g_t)=\int_K\frac{d}{dt}d(g_t,k\cdot p)^2dk$$

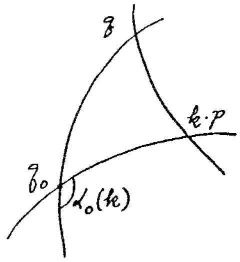
となる。 $g_0$が$J$の最小点だから, 函数$t\longmapsto J(g_t)$は$t=0$で極小となるから $\left[\frac{d}{dt}J(g_t)\right]_{t=0}=0$である。従って(13)(19)から

(20) $$\int_{K_2}d(g_0,k\cdot p)\cos\alpha_0(k)\,dk=0$$

となる。余弦不等式 (12)により. $k\in K_2$ に対して

(21) $$d(g,k\cdot p)^2\geqq d(g,g_0)^2+d(g_0,k\cdot p)^2-2d(g_0,g)d(g_0,k\cdot p)\cos(\pi-\alpha_0(k))$$

が成立つ。この不等式の両辺を$k$について，$K_2$上で積分すると(20)により，右辺オ三項の積分は0で





$$(22)\qquad \int_{K_2} d(g, k\cdot p)^2 dk \geqq d(g, g_0)^2 \int_{K_2} dk + \int_{K_2} d(g_0, k\cdot p)^2 dk$$

を得る。残りの$K_1$上でも(21)の両辺を積分すると

$$(23)\qquad \int_{K_1} d(g, k\cdot p)^2 dk \geqq d(g, g_0)^2 \int_{K_1} dk + \int_{K_1} d(g_0, k\cdot p)^2 dk$$

となる。(22)(23)を辺々相加えて

$$(24)\qquad J(g) \geqq d(g, g_0)^2 + J(g_0)$$

を得る。従って(24)から

$$(25)\qquad g \neq g_0 \Rightarrow d(g, g_0) > 0 \Rightarrow J(g) > J(g_0)$$

が得られ，$g_0$が$J$の唯一つの最小点であること，すなわち(9)が証明された。

以上で定理Dは証明された ∎

定理Cと定理Dの証明が完全に平行しているので，上の証明はカルタンのアイディアに沿ったものと言えよう。

さて定理Dから，$G$が線型連結リー群である場合の定理Bが証明できる。その証明のためには、対称リーマン空間に関する二・三の基本的結果が必要である。ここでは、ヘルガソンの教科書[7]から、これらの結果を引用することにする。

定理B′　$G$を線型連結半単純リー群とし，$K$をその特性部分群(§0の冒頭を見よ)とするとき，次のことが成立つ。

1)　$K$は$G$の極大コンパクト部分群である。

2)　$G$の任意のコンパクト部分群$K'$に対し，$G$の元$g$が存在して，$g^{-1}K'g \subset K$となる。

3) 特に $G$ の任意の極大コンパクト部分群 $K'$ は、$K$ と $G$ 内で共軛である。

証明 1) §0で証明されている。

2) このとき $M = G/K$ は、$G$ 不変なリーマン計量により、対称リーマン空間となり、かつ $M$ は $\mathbb{R}^n$ と同相である（[7] Ch. VI. Th. 1.1）。そして $M$ の断面曲率は常に $\leqq 0$ である（[7] Ch. V. Th. 3.1）。そこで定理Dが $M$ に対して適用される。今 $K'$ を $G$ の任意のコンパクト部分群とするとき、各 $k \in K'$ は、$M$ 上の等距離変換 $\tau(k) : gK \longrightarrow kgK$ を引起す。従って定理Dにより、$M$ において $K'$ の不動点 $g_0$ が存在する：$k \cdot g_0 = \tau(k) g_0 = g_0$ $(\forall k \in K')$。今 $G$ のリー環 $\mathfrak{g}$ のカルタン分解（§0を見よ）$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ から、$G = \exp \mathfrak{p} \cdot K$ となる（[7] Ch. VI, Th. 1.1）そこである $X \in \mathfrak{p}$ により、$g_0 = (\exp X)K$ となる。そこで $g = \exp X$ とおくと、$g \in G$ で $kgK = gK$，$g^{-1}kgK = K$ となる。従って $g^{-1}kg \in K$ $(\forall k \in K')$ であり、

$$(1) \qquad g^{-1}K'g \subset K$$

が成立つ。

3) 特に 2) の $K'$ が $G$ の極大コンパクト部分群であるとき、$g^{-1}K'g$ も極大コンパクト部分群であり、(1) において等式が成立つ：従って $g^{-1}K'g = K$ であり、$K'$ は $K$ と $G$ 内で共軛である。∎

## §2 シュヴァレーの証明

この節ではシュヴァレーによる定理 $B'$ の証明を紹介する。この証明は、解析

と線型代数の初歩しか用いない点に特色がある。

最初に、後で必要となる解析に関する Lemma 3 を証明しておこう。

Lemma 1. $\mathbb{R}^n$ の点列 $(a_n)_{n\in N}$ が収束部分列を持ち、すべての収束部分列の極限が一定値 $a$ に等しいとき、数列 $(a_n)$ は $a$ に収束する。

証明 実数列 $(a_n)$ の収束部分列の極限の最大値(最小値)が、$(a_n)$ の上極限(下極限)であるから、この場合には、仮定より $(a_n)$ の上極限と下極限は共に $a$ に等しい。従って数列 $(a_n)$ は収束して、極限は $a$ に等しい。$\mathbb{R}^n$ の点列の場合は成分をとることにより、実数列の場合に帰着する。

Lemma 2. $(a_n)$ が $b\in\mathbb{R}^n$ に収束しない、$\mathbb{R}^n$ の有界点列ならば、$(a_n)$ の部分列 $(a_{n_k})_{k\in N}$ であって、ある $a(\neq b)$ に収束するものが存在する。

証明 $(a_n)$ は有界数列だから収束部分列を持つ(ボルツァーノ・ワイヤストラスの定理)。$(a_n)$ の収束部分列の極限がすべて $b$ に等しければ、Lemma 1 により、$(a_n)$ は $b$ に収束する。従ってこの場合には、$(a_n)$ の収束部分列 $(a_{n_k})_{k\in N}$ であって、その極限が $a(\neq b)$ となるものが存在する。

Lemma 3. $A\subset\mathbb{R}^m$、$B\subset\mathbb{R}^n$ で、$A.B$ は共にコンパクトとする。今函数 $f: A\times B\to\mathbb{R}$ は連続であるとし、各 $y\in B$ に対し、$g(y)=\max_{x\in A} f(x,y)$ とおく。このとき函数 $g$ は、$B$ 上連続である。

証明 今帰謬法で証明するために、函数 $g$ は、ある点 $y^*\in B$ で不連続であると仮定して矛盾を導く。そこで今次の(1)および(2)をみたす $B$ の点列 $(y_n)_{n\in N}$ が存在すると仮定して、矛盾を導く。

(1) $$\lim_{n\to\infty} y_n = y^*$$

(2) 数列$(g(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$は，$g(y^*)$に収束しない。

このとき，Lemma 2 により，

(3) $(g(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$の部分列$(g(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$であって，$\lim_{k\to\infty} g(y_{n_k}) = a \neq g(y^*)$

となるものが存在する。

このとき，

(4) 各$n\in\mathbb{N}$に対し，$g(y_n)=f(x_n, y_n)$となる$x_n \in A$が存在する。$x_n$は一つとは限らないが，各$n\in\mathbb{N}$に対し一つづつ選んでおく（選択公理）。

このとき$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$は，コンパクトな$A$の点列だから，収束部分列$(x_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$が存在する。

今この収束部分列の極限を

(5) $$\lim_{\ell\to\infty} x_{n_{k_\ell}} = x^* \in A$$

とする。このとき，$(y_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$は，$y^*$に収束する点列$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$の部分列だから，

(6) $$\lim_{\ell\to\infty} y_{n_{k_\ell}} = y^* \in B$$

となる。このとき函数$f$は連続だから

(7) $$a \underset{(3)}{=} \lim_{\ell\to\infty} g(y_{n_{k_\ell}}) \underset{(4)}{=} \lim_{\ell\to\infty} f(x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}}) \underset{(5)(6)}{=} f(x^*, y^*)$$

となる。また$g$の定義から，$y^* \in B$に対し

(8) $g(y^*) = f(x^{**}, y^*)$となる$x^{**} \in A$が存在する。

(3)および(7)(8)により，

(9) $$f(x^{**}, y^*) = g(y^*) \neq a = f(x^*, y^*)$$

である。特$x^{**} \neq x^*$である。一方

(10) $$f(x^{**}, y^*) = g(y^*) = \max_{x\in A} f(x, y^*) \geqq f(x^*, y^*)$$

だから

$$(11)\qquad f(x^{**}, y^*) - f(x^*, y^*) = \varepsilon > 0$$

となる。今 $A\times B$ の点 $(x^*, y^*)$, $(x^{**}, y^*)$ で $f$ は連続であるから (11) の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ が存在して，次の (12) (13) が成立つ：

$$(12)\qquad |x-x^*|<\delta,\ |y-y^*|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x^*, y^*)|<\varepsilon/2.$$

$$(13)\qquad |x-x^{**}|<\delta,\ |y-y^*|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x^{**}, y^*)|<\varepsilon/2$$

今 (5) (6) により，この $\delta>0$ に対し，$l_0\in\mathbb{N}$ が存在して，

$$(14)\qquad {}^\forall l \geqq l_0 \text{ に対し，} |x_{n_{k_l}}-x^*|<\delta,\ |y_{n_{k_l}}-y^*|<\delta$$

となる。(12) と (14) から

$$(15)\qquad {}^\forall l \geqq l_0 \text{ に対し，} |f(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})-f(x^*, y^*)|<\varepsilon/2$$

となる。また (13)(14) から

$$(16)\qquad {}^\forall l \geqq l_0 \text{ に対し，} |f(x^{**}, y_{n_{k_l}})-f(x^{**}, y^*)|<\varepsilon/2$$

となる。また (4) により

$$(17)\qquad g(y_n)=\max_{x\in A} f(x, y_n) \geqq f(x^{**}, y_n) \qquad ({}^\forall n\in\mathbb{N})$$

が成立つ。以上により，すべての $l\geqq l_0$ に対して次の不等式が成立つ。ここで次の(18)の各等式の下に，その成立つ根拠となる式の番号を記しておいた。

$$(18)\qquad g(y_{n_{k_l}}) \underset{(14)}{=} f(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \underset{(15)}{<} f(x^*, y^*)+\frac{\varepsilon}{2} \underset{(11)}{=} f(x^{**}, y^*)-\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\underset{(16)}{<} f(x^{**}, y_{n_{k_l}}) \underset{(17)}{\leqq} g(y_{n_{k_l}})$$

が成立つが，これは明らかに矛盾である。これで Lemma 3 は証明された。

このLemma 3 の証明は，笠原乾吉氏によるものである。御教示下さった笠原氏に感謝する。

さてシュヴァレーの証明した定理は、定理B'と若干仮定がずれている。すなわち、定理B'では、$G$は線型連結半単純リー群であるが、シュヴァレーは、線型連結自己随伴群に対し、定理B'と同じ結論が成立つことを証明したのである。以下自己随伴群について若干基礎的なことを述べておこう。

体$F$を実数体$\mathbb{R}$または複素数体$\mathbb{C}$に応じ、$V\times V$上の対称双一次形式またはエルミート形式$(x,y)$で正値なもの、すなわち次の(19)が成立つものである：

(19) $\quad {}^\forall x\in V$に対し，$(x,x)\geqq 0$で，等号は$x=0$のときのみ．

このような内積が一つ与えられたとき、$V$上の各一次変換$A$に対しもう一つの一次変換$A^*$で

(20) $$(Ax,y)=(x,A^*y), \quad ({}^\forall x,{}^\forall y\in V)$$

が成立つものが唯一つ定まる。$A^*$を$A$の<u>随伴</u>一次変換という。写像$A\longrightarrow A^*$は

(21) $$(A+B)^*=A^*+B^*,\quad (\alpha A)^*=\bar{\alpha}A^*,\quad (AB)^*=B^*A^*,\quad A^{**}=A$$

をみたす。$V$上の一次変換の作るある集合$G$は、

(22) $$G^*=G \quad (\text{すなわち } A\in G \Leftrightarrow A^*\in G)$$

をみたすとき、<u>自己随伴</u>であるという。

$V$の部分空間$W$が、$G$で不変であるとき、$W$の直交補空間$W^\perp$は$G^*$で不変である。従って$G$が自己随伴のとき、$V$は$G$に関し完全可約である。$G$が$GL(V)$のリー部分群で自己随伴であるとき、$G$のリー環$\mathfrak{g}$も自己随伴であり、従って$V$は$\mathfrak{g}$に関し完全可約である。従って$\mathfrak{g}$は完約（reductive）リー環であり、半単純リー環$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$と中心$\mathfrak{z}$の直和となる。

一方 実半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の随伴群 $G = \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ は、連結な自己随伴線型リー群である。$F = \mathbb{R}$ のとき、$\mathfrak{g}$ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の複素共軛を $\sigma$ とすると、$\mathfrak{g}$ は $\sigma$ の不動点の全体 $\mathfrak{g}_\sigma$ と一致する。§0で述べたように、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 $\mathfrak{g}_\tau$ で、$\mathfrak{g}_\tau$ に関する複素共軛 $\tau$ が $\sigma$ と可換なもの $(\sigma\tau = \tau\sigma)$ が存在する。今 $X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に対し

(23) $$H(X, Y) = B(X, \tau Y).$$

とおく。($B$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のキリング形式 $B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y)$)。このとき $H$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上の正値エミート形式(内積)で、$H_0 = H \mid \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ とすれば $H_0$ は $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 上の内積である。

$\tau\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ だから、$\tau \mid \mathfrak{g} = \tau_0$ とすると、$\tau_0 \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ で、$\tau_0^{-1} \circ \mathrm{ad}X \circ \tau_0 = \mathrm{ad}(\tau_0 X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ となるので、$H_0((\exp \mathrm{ad}X)Y, Z) = H_0(Y, (\exp \mathrm{ad}\,\tau_0 X)Z)$ $(\forall Y, \forall Z \in \mathfrak{g})$ となるから

(24) $$(\exp \mathrm{ad}X)^* = \exp \mathrm{ad}(\tau_0 X), \quad X \in \mathfrak{g}$$

である。$\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ の各元は、$\exp \mathrm{ad}X$ $(X \in \mathfrak{g})$ の形の元の有限個の積だから、$\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ は、内積 $H_0$ に関し、自己随伴である。

前にも述べたように、一般の連結リー群 $G$ に対する定理Bの証明は、$G$ が実半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の随伴群 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ のときに帰着される(岩澤[10])。そこで、上述のことから、一般の $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上の連結自己随伴線型群 $G$ に対し定理Bを証明すれば、岩澤の結果により、一般の連結リー群 $G$ に対し定理Bが証明される。

一方モストウ[13]によれば、「任意の実または複素ベクトル空間 $V$ 上の線型

代数群$G$が$V$上で完全可約ならば：$V$のある内積に関して、$G$は自己随伴となる」。従って特に、$G$が半単純代数群ならば、完全可約性の仮定をみたすから、$G$は自己随伴となる。

さて$V$の内積を一つ固定し、次のように定義する

$U(V)=\{u\in GL(V)\mid u^*u=1\}$, $H(V)=\{X\in gl(V)\mid X^*=X\}$, $P(V)=\{p\in H(V)\mid p\gg 0\}$.

ただし$p\gg 0$は、$p$が正値であること（$(px,x)>0$ ($^\forall x\in V-\{0\}$)）を意味する。

さて次の命題1はよく知られている（シュヴァレー[4]，I章§V命題1，命題3，§IV命題5）．

命題1．1) 任意の$g\in GL(V)$は．$g=u.p$, $u\in U(V)$, $p\in P(V)$と一意的に表わされる。

2) 1)の記号で写像$g\longmapsto(u,p)$は．$GL(V)$から$U(V)\times P(V)$の上への同相写像である。

3) $X\longmapsto \exp X$は，$H(V)$から$P(V)$の上への同相写像である。

4) $GL(V)\approx U(V)\times H(V)$.

命題2．（シュヴァレー[4] VI章 §IX Lemma 2）．$V$は$F=\mathbb{R}$の$\mathbb{C}$上の有限次元ベクトル空間，$G$は$V$上の線型代数群で：$V$の一つの内積$(x,y)$に関し自己随伴であるとする。このとき，次のことが成立つ。$\mathfrak{g}$を$G$のリー環とする。

1) $g\in G\cap P(V)$ならば：$g=\exp X$, $X\in\mathfrak{g}\cap H(V)$と表わされる。それに任意の$t\in\mathbb{R}$に対し

$$g^t=\exp tX\in G\cap P(V)\quad となる。$$

2) 任意の$g\in G$は．$g=u\cdot p$．$u\in G\cap U(V)$, $p\in G\cap P(V)$と一意的に表わさ

れる。

3) $f:(u,p)\to u\cdot p=g$ は、$(G\cap U(V))\times(G\cap P(V))$ から $G$ の上への同相写像である。

4) $X\mapsto \exp X$ は、$\mathfrak{g}\cap H(V)$ から $G\cap P(V)$ の上への同相写像である。

5) $K=G\cap U(V)$ は、$G$ の極大コンパクト部分群である。

証明. 1) 今、$g\in G\cap P(V)$ は、命題 1, 3) により、$g=\exp X$, $X\in H(V)$ とかける。$X\in H(V)$ は、$V$ のある正規直交基底 $(x_i)_{1\leqq i\leqq n}$ によって、対角行列で表わされる;

$$(25)\qquad Xx_i=h_ix_i,\quad h_i\in\mathbb{R},\quad gx_i=e^{h_i}x_i,\quad 1\leqq i\leqq n$$

となる。以下 $g\in GL(V)$ を、基底 $(x_i)$ に関する $g$ の行列 $(g_{ij})$ と同一視する。$G$ は代数群だから、$n^2$ 個の変数 $x_{ij}$ $(1\leqq i,j\leqq n)$ に関する $F$ 係数多項式の集合 $\Phi$ が存在して、次の (26) が成立つ。

$$(26)\qquad g=(g_{ij})\in GL(V) \text{ に対し、} g\in G \Leftrightarrow \varphi(\cdots,g_{ij},\cdots)=0\ (\forall\varphi\in\Phi)$$

今、$x_{ij}$ $(1\leqq i,j\leqq n)$ に関する多項式 $\varphi(\cdots,x_{ij},\cdots)$ において

$$(27)\qquad x_{ij}\to 0\ (i\neq j),\qquad x_{ii}\longrightarrow x_i\qquad (1\leqq i,j\leqq n)$$

という置き換えを行って得られる多項式を $\varphi_1(x_1,\ldots,x_n)$ とする。このとき上の $g\in G\cap P(V)$ は、任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対し、$g^k\in G$ だから

$$(28)\qquad \varphi_1(e^{kh_1},\ldots,e^{kh_n})=0,\qquad (\forall k\in\mathbb{Z},\ \forall\varphi\in\Phi)$$

となる。(28) から次の (29) が導かれる:

$$(29)\qquad \varphi_1(e^{th_1},\ldots,e^{th_n})=0\qquad (\forall t\in\mathbb{R},\ \forall\varphi\in\Phi)$$

(29) を帰謬法で証明しよう。今 (29) が成立たないと仮定すると、(29) の左辺は

もに関し恒等的に0ではない。$\varphi_1$は多項式だから、このとき

(30) $$\varphi_1(e^{th_1}, \dots, e^{th_n}) = \sum_m b_m e^{ta_m},\ a_m \in \mathbb{R},\ \exists b_m \neq 0$$

となる。今必要があれば添字を書き換えて、(30)において

(31) $$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots,\quad \forall b_m \neq 0$$

としてよい。このとき$|k|$が十分大きなすべての$k \in \mathbb{Z}$に対して

(32) $$|b_1 e^{ka_1}| > |\sum_{m>1} b_m e^{ka_m}|$$

となる。(32)は(28)と矛盾する。これで(29)が証明された。(29)は$g^t = \exp tX \in G\ (\forall t \in \mathbb{R})$を意味する。従ってこのとき$X \in \mathfrak{g} \cap H(V)$である。

2) 命題1により、任意の$g \in G$は、$g = u \cdot p$, $u \in U(V)$, $p \in P(V)$と一意的に分解される。このとき$p^2 = (u \cdot p)^*(up) = g^* g \in G$である。そこで$g = p^2$とすると、$g \in G \cap P(V)$であるから、$g = \exp X$, $X \in H(V)$とするとき、1)により$X \in \mathfrak{g} \cap H(V)$で、任意の$t \in \mathbb{R}$に対し、$g^t = \exp tX \in G \cap P(V)$である。そこで特に$p = g^{\frac{1}{2}} \in G \cap P(V)$で、$u = g \cdot p^{-1} \in G \cap U(V)$である。実際$u^* u = p^{-1} \cdot g^* g \cdot p^{-1} = p^{-1} \cdot p^2 \cdot p^{-1} = 1$だから$u \in G \cap U(V)$となる。分解の一意性は命題1, 1)による。

3) $f(u, p) \longmapsto u \cdot p$は、2)により、$(G \cap U(V)) \times (G \cap P(V))$から$G$への全単写である。行列の乗法の定義により、$f$は連続で命題1, 2)により$f^{-1}$も連続である。

4) $\exp$は$\mathfrak{g} \cap H(V)$から$G \cap P(V)$への連続写像である。そこで任意の$p \in G \cap P(V)$に対し、命題1, 3)により、$p = \exp X$となる$X \in H(V)$が存在する。そして1)により、任意の$t \in \mathbb{R}$に対し、$p^t = \exp tX \in G$だから、$X \in \mathfrak{g} \cap H(V)$である。従って$\exp$は$\mathfrak{g} \cap H(V)$から$G \cap P(V)$の上への写像である。そして

命題1, 3)によりこの写像は単写でもあり、逆写像は連続である。従って $\exp$ は $\mathfrak{g}\cap H(V)$ から $G\cap P(V)$ の上への同相写像を引起す。

5) $U(V)$ は $GL(V)$ のコンパクト部分群であり、代数群 $G$ は $GL(V)$ の閉部分群であるから、$K=G\cap U(V)$ は、$G$ のコンパクト部分群である。$K\subset K'$ となる $G$ の任意のコンパクト部分群 $K'$ をとる。$K$ の任意の元 $k$ を、2)により、$k=u.p$, $u\in G\cap U(V)=K$, $p\in G\cap P(V)$ と分解するとき、$p=u^{-1}k\in K'\cap P(V)$ となる。$K'$ はコンパクトだから、$p$ のすべての固有値の絶対値は1であり、一方で $p\in P(V)$ の固有値はすべて $>0$ である。従って $p$ はすべての固有値が1の対角型一次変換だから、$p=1$, $k=u\in K$ となる。$k$ は $K'$ の任意の元だから、$K'\subset K$ 従って $K'=K$ となる。これで $K$ は $G$ の極大コンパクト部分群であることが示された。

命題2系　命題2の自己随伴代数群 $G$ の（リー群としての）単位元連結成分を $G_0$ とするとき、次のことが成立つ。

1) 任意の $g\in G_0$ は、$g=u.p$, $u\in G_0\cap U(V)$, $p\in G_0\cap P(V)$ と一意的に表わされる。

2) $f:(u,p)\longmapsto u.p$ は $(G_0\cap U(V))\times(G_0\cap P(V))$ から $G_0$ の上への同相写像である。

3) $G_0\cap P(V)=G\cap P(V)=\exp(\mathfrak{g}\cap H(V))$ である。

4) $G_0\cap U(V)$ は、$G_0$ の極大コンパクト部分群であり、$G\cap U(V)$ の単位元連結成分に等しい。

証明　1)　命題2, 2)により、$g\in G_0$ は $g=u.p$, $u\in G\cap U(V)$, $p\in G\cap P(V)$ と一意的に分解される。そして命題2, 1)により、任意の $t\in \mathbb{R}$ に対し

$p^t \in G$ だから，$p \in G_0$ であり、従って $u = g \cdot p^{-1} \in G_0$ でもある。

2)　1) により $f$ は全写で，1) の一意性から単写でもある。命題2, 3) により $f$ は同相写像である。

3)　1) の証明から $G \cap P(V) = G_0 \cap P(V)$ であり，$p = \exp X$, $X \in H(V)$ とかくとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し，$p^t = \exp tX \in G$ だから，$X \in \mathfrak{g} \cap H(V)$ である。そこで $\exp(\mathfrak{g} \cap H(V)) = G \cap P(V) = G_0 \cap P(V)$ である。

4)　$K_0 = G_0 \cap U(V)$ が $G_0$ の極大コンパクト群であることの証明は，命題2, 5) の証明と同じでよい。

後半を示すために，一般にリー群 $H$ のリー環を $L(H)$ と記すとき，$L(G_0) = L(G)$ だから，$L(G_0 \cap U(V)) = L(G_0) \cap L(U(V)) = L(G) \cap L(U(V)) = L(G \cap U(V))$ である。(杉浦[17] 命題3.5.5, 3))。$G_0 \cap U(V)$ は $G \cap U(V)$ の連結リー部分群でリー環が一致するから，開部分群である。従って $G_0 \cap U(V)$ は $G \cap U(V)$ の単位元成分である。∎

さて本節の目標は，次のシュヴァレーの定理の証明を紹介することにある。

定理 D′（シュヴァレー）　$F$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，$F$ 上の有限次元ベクトル空間 $V$ に対し $GL(V)$ の代数部分群 $G$ が，$V$ のある内積 $(x, y)$ に関し自己随伴であるとする。さらに $G$ は次の仮定(A)をみたすものとする：(A)　$\det g = 1$　($\forall g \in G$).

1)　今までの記号を用いて，$K = G \cap U(V)$ とするとき，$G$ の任意のコンパクト部分群 $K'$ は，等質空間 $G/K = M$ 上に不動点 $p_0$ を持つ：すなわち $k \cdot p_0 = p_0$ ($\forall k \in K'$) となる。

2)　$G$ の任意のコンパクト部分群 $K'$ は，$K$ の共軛部分群に含まれる。特に $G$ の任意の極大コンパクト部分群は，$K$ と共軛である。

証明　$\varphi : G \to G/K = M$ を，$\varphi(g) = gK$ で定義される標準写像とするとき．

(33)　$$f(t) = \varphi(a \exp tX),\ a \in G,\ X \in \mathfrak{z} = \mathfrak{g} \cap H(V),\ t \in \mathbb{R}.$$

の形の，M内の曲線を，簡単のために<u>測地線</u>と呼び，tを測地パラメタという(これは便宜上名前をつけただけで，微分幾何学における測地線の概念を前提としているわけではない)。

1)　1°　Mの任意の二点 $p_0, p_1$ に対し，Mの測地線 $f(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ であって，$f(0) = p_0$，$f(1) = p_1$ となるものが唯一つ存在する。

∵)　GはM $= G/K$ 上に推移的に作用するから，Gのある元gに対して $gp_0 = \varphi(e)$ となる。$g \cdot p_0$ と $g \cdot p_1$ を結ぶ測地線 $f_1(t) = \varphi(a \exp tX)$，$(0 \leqq t \leqq 1)$ であって，$f_1(0) = g \cdot p_0$，$f_1(1) = g \cdot p_1$ となるものが存在すれば

$$f(t) = \varphi(g^{-1} a \exp tX), \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

とおけば，$f(0) = g^{-1} \cdot f_1(0) = p_0$，　$f(1) = g^{-1} f_1(1) = p_1$　となる。そこで以下 $p_0 = \varphi(e)$ として1°を証明すればよい。$X \longmapsto \varphi(\exp X)$ が $\mathfrak{z} = \mathfrak{g} \cap H(V)$ からMへの全単写である(命題2)から，Mの点 $p_1$ に対し，$p_1 = \varphi(\exp X)$ となる $X \in \mathfrak{z}$ が唯一つ存在する。このとき，$f(t) = \varphi(\exp tX)$ とすれば，fはMの測地線で，$f(0) = p_0 = \varphi(e)$，$f(1) = p_1$ となる。

規約　全単写 $\exp X \longmapsto \varphi(\exp X)$ により，　$\exp \mathfrak{z}$ とMを同一視する。

定義　写像 $Q : M \times M \to \mathbb{R}$ を，

$$Q(p, q) = Tr(p^{-2} q^2) = Tr(q^2 p^{-2}),\ p, q \in M = \exp \mathfrak{z}$$

によって定義する。

2° $Q$は連続で、かつ$G$不変（$Q(g\cdot p, g\cdot q)=Q(p, q)$, $\forall g\in G$, $\forall p$, $\forall q\in M$）である。

∵）$(p, q)\longmapsto p^{-2}q^2$ および $a\longmapsto \mathrm{Tr}\, a$ が連続だから、$Q$も連続。次に$Q$の$G$不変性は三つの場合に分けて証明する。イ）$g=k\in K$のとき、$(\mathrm{Ad}\, k)\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ だから、$p=\exp X\ (X\in\mathfrak{p})$ のとき、$p_1=kpk^{-1}=k(\exp X)k^{-1}=\exp((\mathrm{Ad}\, k)X)\in\exp\mathfrak{p}=M$ であるから、$\tau_k : aK\longrightarrow kaK$ とするとき、$k\cdot pK=kpk^{-1}K=p_1K$ だから、$\tau_k p=p_1=kpk^{-1}$ である。同様に $\tau_k q=kqk^{-1}$ だから $Q(kp, k\cdot q)=\mathrm{Tr}((kpk^{-1})^{-2}\cdot(kqk^{-1})^2)=\mathrm{Tr}(kp^{-2}q^2k^{-1})=\mathrm{Tr}(p^{-2}q^2)=Q(p, q)$ となる。ロ）$g=\exp X$, $X\in\mathfrak{p}$のとき、$g\,p=p_1\cdot u$, $p_1\in\exp\mathfrak{p}$, $u\in K$ とすると、$M=\exp\mathfrak{p}$ と考えるとき、$g\cdot p=\tau_g p=p_1$ である。また $g^*=g$, $p^*=p$ だから、$pg=(gp)^*=(p_1u)^*=u^{-1}p_1$ となり、$gp^2g=(gp)(pg)=p_1u\cdot u^{-1}p_1=p_1^2=(g\cdot p)^2$ である。同様にして $(g\cdot q)^2=gq^2g$ である。

従って、$Q(gp\cdot gq)=\mathrm{Tr}((gp^2g)^{-1}\cdot(gq^2g))=\mathrm{Tr}(g^{-1}p^{-2}g^{-1}\cdot gq^2g)=\mathrm{Tr}(g^{-1}p^{-2}q^2g)=\mathrm{Tr}(p^{-2}q^2)=Q(p, q)$である。ハ）$g$が$G$の任意の元のとき、命題2により $G=K\exp\mathfrak{p}$ だから $G$の任意の元$g$は、$g=k\exp X$, $k\in K$, $X\in\mathfrak{p}$ とかける。そこでイ）ロ）の場合から、$Q(gp\cdot gq)=Q(k\exp Xp, k\exp Xq)=Q(\exp Xp, \exp Xq)=Q(p, q)$となる。

3° 任意の$p, q\in M$に対し、$Q(p, q)\geqq n\ (=\dim V)$であり、ここで等号の成立つのは、$p=q$のときのみである。

∵）$\tau_{p^{-1}}\cdot q=q_1$ とおくと、2°により

(34) $Q(p, q)=Q(\tau_{p^{-1}}p, \tau_{p^{-1}}q)=Q(e, q_1)=\mathrm{Tr}\, q_1^2$

となる。今$q_1^2$の固有値を$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$とおくと、$q_1^2\in\exp\mathfrak{p}\subset P(V)$だから、$\lambda_i>0$, $(1\leqq i\leqq n)$であり、また仮定（A）により

(35) $$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det g_1^2 = 1$$

である。従って 算術平均 ≧ 幾何平均の関係から

(36) $$\frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \geqq \sqrt[n]{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1$$

であるから，(34) により

(37) $$Q(p, g) = \mathrm{Tr}\, g_1^2 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \geqq n$$

となる。ここで等号が成立つのは，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ の場合だけである。$g_1^2 \in P(V)$ は対角型一次変換だから，これは $g_1^2 = 1$，$1 = g_1 = p^{-1}g$ すなわち $p = g$ の場合だけに起る。

$4°$ $p(t), g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ が $M$ の測地線であるとき，実変数 $t$ の実数値函数

(37) $$F(t) = Q(p(t), g(t)), \qquad t \in \mathbb{R}$$

は，凸函数である。すなわち

(38) $$F''(t) \geqq 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

が成立つ。

∵) 最初に測地線 $p(t)$ に対して，半正値な $A_1, \cdots, A_m \in H(V)$ と実数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ が存在して

(39) $$p(t)^2 = \sum_{i=1}^{m} A_i e^{2\lambda_i t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

と表わされることを示そう。測地線 $p(t)$ は，(33)の形であるとし，さらに $a \in G$ を $a = p_1 u$，$p_1 \in \exp \mathfrak{f}$，$u \in K$ と表わす。このとき，$2°$の証明から

(40) $$p(t) = \tau_{p_1} \tau_u (\exp tX) = \tau_{p_1} u (\exp tX) u^{-1} = \tau_{p_1}(\exp(tuXu^{-1}))$$

となるから $Y = uXu^{-1} = (\mathrm{Ad}\,u)X \in (\mathrm{Ad}\,u)\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ とすると，また$2°$の証明から

(41) $$P(t)=p_1(\exp Y)^2 p_1 = p_1(\exp 2tY)p_1$$

となる。今 $Y$ の相異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j))$ とする。またVからYの固有空間 $V(\lambda_i)=\{x \in V \mid Yx = \lambda_i x\}$ への直交射影を $E_i$ とするとき

(42) $$\sum_{i=1}^m E_i = 1, \quad E_i E_j = 0\ (i \neq j), \quad E_i^2 = E_i = E_i^*$$

であって，$\exp(2tY) = \sum_{i=1}^m e^{2\lambda_i t} E_i$，$(t \in \mathbb{R})$ となる。従って (41) から

(43) $$p(t)^2 = p_1\left(\sum_{i=1}^m e^{2\lambda_i t} E_i\right)p_1 = \sum_{i=1}^m A_i e^{2\lambda_i t}, \quad A_i = p_1 E_i p_1\ (1 \leqq i \leqq m)$$

となる。

(44) $$A_i^* = p_1^* E_i^* p_1^* = p_1 E_i p_1 = A_i, \qquad 1 \leqq i \leqq m$$

だから $A_i \in H(V)$ である。そして任意の $x \in V$ に対して

(45) $$(A_i x, x) = (p_1 E_i p_1 x, x) = (E_i^2 p_1 x, p_1 x) = \| E_i p(x) \|^2 \geqq 0$$

だから $A_i$ は半正値である。同様にして半正値な $B_j \in H(V)$ と実数 $\mu_j\ (1 \leqq j \leqq \ell)$ により

(46) $$g(t)^2 = \sum_{j=1}^{\ell} B_j e^{2\mu_j t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

と表わされる。$Q$ の $G$ 不変性 $(2°)$ により，必要があれば，$(p(t), g(t))$ の代りに，$(g \cdot p(t), g \cdot g(t))$ をとることにより，$p(0)=1$ と仮定してよい。このとき $p(t) = \exp tX\ (X \in \mathfrak{g})$ だから，$p(-t)^2 = (\exp(-tX))^2 = \exp(-2tX) = p(t)^{-2}$ である。従って

(47) $$F(t) = Tr(p(-t)^2 g(t)^2) = Tr\left(\left(\sum_{i=1}^m A_i e^{-2\lambda_i t}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\ell} B_j e^{2\mu_j t}\right)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\ell} Tr\left(A_i B_j\, e^{2(\mu_j - \lambda_i)t}\right)$$

となる。従って，$t$ について微分して

(48) $$F'(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}2(\mu_j-\lambda_i)\,\mathrm{Tr}(A_iB_j)\,e^{2(\mu_j-\lambda_i)t}$$

(49) $$F''(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}4(\mu_j-\lambda_i)^2\,\mathrm{Tr}(A_iB_j)\,e^{2(\mu_j-\lambda_i)t}$$

となる。今 $V$ の正規直交基底 $(x_k)_{1\leqq k\leqq n}$ を適当にとって，$A_i$ が $(x_k)$ に関し対角行列（対角要素 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$）で表わされるとする。$A_i$ は半正値だから，$^\forall\alpha_i\geqq 0$ である。$B_j$ の $(x_k)$ に関する行列を $(\beta_{pq})$ とすると，$\beta_{pq}=(B_jx_q,x_p)$ であるから，特に $B_j$ の半正値であることから $\beta_{pp}=(B_jx_p,x_p)\geqq 0$ となる。従って

(50) $$\mathrm{Tr}(A_iB_j)=\sum_{p=1}^{n}\alpha_p\beta_{pp}\geqq 0$$

となる。(49)(50) から，$F''(t)\geqq 0$ $(^\forall t\in\mathbb{R})$ で，$F$ は凸函数である。

5° 4°の函数 $F(t)=Q(p(t),q(t))$ に対して，次の二つの条件 (a)(b) は同値である：

(a) $F(t)$ は $\mathbb{R}$ 上定数である。 b) ある $t_0\in\mathbb{R}$ に対して，$F''(t_0)=0$ である。

∵) (a)⇒(b) は明らか。(a) ならばすべての $t\in\mathbb{R}$ に対し，$F''(t)=0$.

(b)⇒(a) 4 の (49) 式により，(b) が成立つとき

(51) $$(\mu_j-\lambda_i)^2\,\mathrm{Tr}(A_iB_j)=0,\quad 1\leqq{}^\forall i\leqq m,\quad 1\leqq{}^\forall j\leqq l$$

となる。(51) は $\mu_j-\lambda_i=0$ または，$\mathrm{Tr}(A_iB_j)=0$ $(^\forall i\ ^\forall j)$ と同値だから，結局 (b) は

(52) $$(\mu_j-\lambda_i)\,\mathrm{Tr}(A_iB_j)=0,\quad 1\leqq{}^\forall i\leqq m,\ 1\leqq{}^\forall j\leqq l$$

と同値である。4°の (48) 式により，(52) は

(53) $$F'(t)=0\qquad(^\forall t\in\mathbb{R})$$

と同値であり，結局 (a) と同値になる。

6° $p(t)$，$q(t)$ が共に $M$ の測地線で，4°の函数 $F(t)=Q(p(t),q(t))$ は定数で，$p(0)=1$ であるとすれば，$V$ の適当な正規直交系 $(v_i)_{1\leqq i\leqq n}$ に関して，$p(t)^2$ と

$g(t)^2$ は次の(54)の形に同時に対角行列で表わされ、その際 次の(55)が成立つ：

(54) $$p(t)^2=\begin{pmatrix} e^{2\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{2\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \ e^{2\lambda_n t}\end{pmatrix},\quad g(t)^2=\begin{pmatrix} a_1e^{2\lambda_1 t} & & 0 \\ & a_2e^{2\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \ a_ne^{2\lambda_n t}\end{pmatrix}$$

(55) $$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R};\quad a_1>0,\cdots,a_n>0.$$

∵) $p(0)=1$ だから、$p(t)=\exp tX$ $(X\in\mathfrak{p})$ の形である。$X\in\mathfrak{p}\subset H(V)$ は、$V$ のある正規直交基底 $(x_i)$ に関して対角化される。以下一次変換と $(x_i)$ に関するその行列を同一視する。このとき、

(56) $$X=\begin{pmatrix}\lambda_1 \lambda_2 & 0 \\ 0 \ \ddots & \lambda_n\end{pmatrix},\quad \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$$

であるから、

(57) $$p(t)^2=\exp(2tX)=\begin{pmatrix} e^{2\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{2\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \ e^{2\lambda_n t}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}E_{ii}e^{2\lambda_i t}$$

となる。一方 $g(t)^2$ は $4^\circ$ (46)により

(46) $$g(t)^2=\sum_{j=1}^{\ell}B_j e^{2\mu_j t},\quad t\in\mathbb{R},\quad B_j^*=B_j \text{ は半正値 } (1\leqq j\leqq \ell).$$

となる。今 $B_j$ の基底 $(x_i)$ に関する行列を $(b_{j,k\ell})$ と置くとき、

(58) $$\begin{aligned}F(t)&=Q(p(t),g(t))=T_r\,(p(t)^{-2}\cdot g(t)^2)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}T_r(E_{ii}B_j)\,e^{2(\mu_j-\lambda_i)t}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}e^{2(\mu_j-\lambda_i)t}b_{j,ii}\end{aligned}$$

ここで $B_j=(b_{j,k\ell})$ は半正値だから

(59) $$b_{j,ii}\geqq 0,\quad 1\leqq j\leqq \ell,\quad 1\leqq i\leqq n$$

である。今 $X$ の固有値 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$ において、等しいものはまとめて

(60) $$\lambda_1=\cdots=\lambda_{r_1}\neq\lambda_{r_1+1}=\cdots=\lambda_{r_1+r_2}\neq\cdots\neq\lambda_{r_1+\cdots+\lambda_{r_{s-1}}+1}=\cdots=\lambda_n,$$
$$n=r_1+r_2+\cdots+r_s$$

とする。このとき次の

(61) $$\lambda_k \neq \lambda_r \Rightarrow b_{j,kr}=0 \qquad (1\leq j\leq l)$$

が成立つ。今$\mu_j$は$\lambda_k, \lambda_r$の少なくとも一方とは等しくないから、$\mu_j \neq \lambda_k$としよう。このとき5°の証明と$F(t)=$定数という仮定により、$(\mu_j-\lambda_k)\mathrm{Tr}(E_{kk}B_j)=0$だから、次の(6)が成立つ。

(62) $$\mathrm{Tr}(E_{kk}B_j)=0$$

$E_{kk}=(x_{pq})_{1\leq p,q\leq n}$とすると、$x_{pq}=\delta_{pk}\delta_{qk}$だから、$0=\mathrm{Tr}(E_{kk}B_j)=\sum_{p,q=1}^{n}\delta_{pk}\delta_{qk}b_{j,qp}=b_{j,kk}$である。これで

(63) $$\mu_j\neq\lambda_k \Rightarrow b_{j,kk}=0$$

が証明された。同様にして

(64) $$\mu_j\neq\lambda_r \Rightarrow b_{j,rr}=0$$

が成立つ。従って次の(65)が成立つ。

(65) $$\lambda_k\neq\lambda_r \Rightarrow b_{j,kk}=0 \text{ または } b_{j,rr}=0 \quad (1\leq j\leq l)$$

今、$V_{k,r}=Fv_k+Fv_r$なる2次元部分空間上で、$B_j$は半正値だから、(64)により

$$0\leq \begin{vmatrix} b_{j,kk} & b_{j,kr}\\ b_{j,rk} & b_{j,rr}\end{vmatrix} = b_{j,kk}b_{j,rr}-\left|b_{j,kr}\right|^2=-\left|b_{j,kr}\right|^2$$

となる。従ってこのとき$b_{j,kr}=0$であり、(61)が証明された。

そこで$X$の固有値が、(60)のような$s$個のブロックに分れるとき、$g(t)^2$も大きさが$r_1, r_2, \ldots, r_s$のブロックに分解し、しかも(61)により対角ブロック以外は0となり

(66) $$g(t)^2=\begin{array}{cccc|c} r_1 & r_2 & \cdots & r_s & \\ \hline * & 0 & 0 & 0 & r_1\\ 0 & * & 0 & 0 & r_2\\ 0 & 0 & * & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & * & r_s \end{array}$$

の形になる。すなわち$V$を$X$の固有空間に直和分解したものを

(67) $$V = V(\lambda_{r_1}) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_{r_s})$$

とするとき，$g(t)^2$は，各固有空間$V(\lambda_{r_i})$を不変にする。正値エルミート変換$g(t)^2 \in P(V)$は，各$V(\lambda_{r_i})$上で対角化できる。このときの$V(\lambda_{r_i})$の正規直交基底を合わせたものを$(v_i)_{1\leq i\leq n}$とすれば，$(v_i)$は$V$の正規直交基底で，これに関し$p(t)^2$と$g(t)^2$は同時に対角化される。今$(v_i)$に関し，$p(t)^2$は(56)の形とし，$g(t)^2$は正値だから

(68) $$g(t)^2 = \begin{pmatrix} a_1 e^{2\mu_1 t} & & 0 \\ & a_2 e^{2\mu_2 t} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n e^{2\mu_n t} \end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R},\ a_i>0\ (1\leq i\leq n)$$

の形になる。このとき

(69) $$F(t) = \mathrm{Tr}(p(t)^{-2}g(t)^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{2(\mu_i-\lambda_i)t}, \quad t\in\mathbb{R}$$

である。今$F(t)=$定数と仮定しているから，

$$0 = F''(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 4(\mu_i-\lambda_i)^2 e^{2(\mu_i-\lambda_i)t}, \quad t\in\mathbb{R}$$

ここで$a_i>0$だから，$\mu_i-\lambda_i=0 \quad (1\leq i\leq n)$となる。これで(54)(55)が証明された。

7° $M$の二つの測地線$p(t)$, $g(t)$に対し，$F(t)=Q(p(t),g(t))$が定数ならば，次の(a)(b)の内の一方が成立つ：

(a) $p(t)=g(t)$. $(\forall t\in\mathbb{R})$

(b) $2Q(p(0),p(1)) < Q(p(0),g(1)) + Q(g(0),p(1))$

∵) $Q$の$G$不変性により，必要があれば$(p(t),g(t))$を$(gp(t),g(g(t)))$で置き換えることにより，始めから$p(0)=1$であるとしてよい。6°の記号を用いるとき，もし(a)が成立たなければ，ある$i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$に対し，$0<a_{i_0}\neq 1$となる。このとき

$$\frac{1}{2}(a_{i_0}+a_{i_0}^{-1}) > \sqrt{a_{i_0}a_{i_0}^{-1}} = 1,\ \frac{1}{2}(a_j+a_j^{-1}) \geqq \sqrt{a_j \cdot a_j^{-1}} = 1 \quad (j \neq i_0)$$

となるから

$$2Q(p(0),p(1)) = 2\,\mathrm{Tr}(p(1)^2) = 2\sum_{i=1}^{n} e^{2\lambda_i} < \sum_{i=1}^{n}(a_i+a_i^{-1})e^{2\lambda_i}$$
$$= Q(p(0), g(1)) + Q(g(0), p(1))$$

となり，(b)が成立つ。

8° $G$の任意のコンパクト部分群$K'$に対して，$\alpha = \max_{k\in K'} Q(1, \tau_k 1)$とおく。このとき $B_\alpha = \{p \in M \mid Q(1,p) \leqq \alpha\}$とすれば，次の 1) 2) が成立つ： 1) $B_\alpha$はコンパクトである。 2) $B_\alpha$は「凸」集合である。すなわち $B_\alpha$ の任意の2点$p, g$に対し，$p$と$g$を結ぶ測地線$p(t) \in B_\alpha$ ($0 \leqq {}^\forall t \leqq 1$, $p(0)=p$, $p(1)=g$) となる。

∵) $Q$は$M \times M$上の連続実数値函数である.(1°)。従って$Q(1, \tau_k 1)$はコンパクトな $K'$上で最大値$\alpha \in \mathbb{R}$に達する。

1) $h(p) = Q(1,p)$は$p$の連続函数であるから，$\mathbb{R}$の閉集合$(-\infty, \alpha]$の$h$による逆像である$B_\alpha$は$M$の閉集合である。$\exp: \mathfrak{f} \to \exp \mathfrak{f} = M$は，$\mathfrak{f}$からMの上への同相写像である。$p = \exp X$, $X \in \mathfrak{f}$とし，$X$の固有値を$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$とするとき

$$Q(1, p) = \mathrm{Tr}(p^2) = \mathrm{Tr}(\exp 2X) = \sum_{i=1}^{n} e^{2\lambda_i} \geqq e^{2\lambda_i} \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

である。そこで今 $0 < p_i \leqq \alpha^{1/2}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ をみたす $p_1, \cdots, p_n$ を対角要素とする対角行列全体の集合を$A$とする。$A$は$M_n(\mathbb{C})$の有界集合である。$U(n)$を$n$次ユニタリ群とし，$B = \{upu^{-1} \mid p \in A,\ u \in U(n)\}$とおくとき，$B$も$M_n(\mathbb{C})$の有界集合である。そして$B_\alpha \subset B$であるから，$B_\alpha$も有界である。従って$B_\alpha$は有界閉集合だからコンパクトである。

2)　$B_\alpha$が「凸」集合であることは、4°により $F(t)=Q(1,p(t))$ が凸函数であることから直ちに導かれる。すなわち $p(0)=p,\ p(1)=q\in B_\alpha$ であるとき任意の $t\in(0,1)$ に対して

$$Q(1,p(t))=F(t)=F((1-t)\cdot 0+t\cdot 1)\leqq(1-t)F(0)+tF(1)$$
$$=(1-t)Q(1,p)+tQ(1,q)\leqq(1-t)\alpha+t\alpha=\alpha$$

となるから、$p(t)\in B_\alpha\ (0\leqq{}^\forall t\leqq 1)$ となる。

9°　8°の記号を用いて、$E=\bigcap_{k\in K'}\tau_k B_\alpha$ とおく。ただし $K'$ は $G$ のコンパクト部分群である。

1)　このとき、$1\in E$ で、$kE=E\ ({}^\forall k\in K')$ である。また $E$ はコンパクトな「凸集合」である。

2)　$E$ 上の実数値函数 $f(p)=\max Q(p,\tau_k p)$ は、$E$ 上連続である。

∵)　1)　$Q(1,1)\leqq\max_{k\in K},\ Q(1,\tau_k 1)=\alpha$ だから $1\in B_\alpha$ である。従って任意の $k\in K'$ に対し、$\tau_k 1\in\tau_k B_\alpha$ となる。一方2°の証明から $\tau_k 1=k\cdot 1\cdot k^{-1}=1$ だから $1\in\tau_k B_\alpha\ ({}^\forall k\in K')$, $1\in\bigcap_{k\in K'}\tau_k B_\alpha=E$ となる。また任意の $k_0\in K'$ に対して

$$k_0E=\bigcap_{k\in K'}k_0 k B_\alpha=\bigcap_{k'\in K'}k' B_\alpha=E,\quad ({}^\forall k_0\in K')$$

となる。一方 $B_\alpha$ が「凸」集合だから、任意の $k\in K'$ に対して $\tau_k B_\alpha$ も「凸」集合となることは、「凸」集合の定義から直ちに導かれる。そして「凸」集合の交わりとして、$E=\bigcap_k\tau_k B_\alpha$ もまた「凸」集合である。

2)　$\varphi(k,p)=Q(p\cdot\tau_k p)$ は $K'\times E$ 上で連続であり $K',\ E$ は $M_n(\mathbb{C})$ のコンパクト部分集合である。そこで前に述べた Lemma 3 により $f(p)=\max_{k\in K'}\varphi(k,p)$ は $E$ 上連続である。

$10°$ コンパクトなE上の実数値連続函数 $f(p)=\max_{k\in K'} Q(p,\tau_k p)$ は，ある点 $p_0\in E$ でE上の最小値に達する。このとき $p_0$ は $K'$ の不動点である。すなわち $k\cdot p_0=p_0\ (\forall k\in K')$.

$\because)$ $p_0=1$ としてよいことを先ず示す。$K_1=p_0^{-1}K'p_0$, $E_1=\tau_{p_0^{-1}}E$ とおくと $E_1$ は $K_1$ で不変なコンパクト「凸」集合である。そして任意の $p_1=\tau_{p_0^{-1}}p\in E_1$ に対して

$$f_1(p_1)=\max_{a\in K_1} Q(p_1,\tau_a p_1)=\max_{k\in K'} Q(p,\tau_k p)\geqq\max_{a\in K'} Q(p_0,\tau_k p_0)$$

$$=\max_{k\in K'} Q(\tau_{p_0^{-1}}\cdot p_0,\ \tau_{p_0^{-1}kp_0}\cdot p_0^{-1}\cdot p_0)=\max_{a\in K_1} Q(1,\tau_a 1)=f_1(1)$$

となる。すなわちコンパクト群 $K_1$ に対しては，函数 $f_1$ は1において最小値に達する。このとき，以下の証明により，1は $K_1$ の不動点となる。$p_0^{-1}K'p_0\cdot 1=1$ だから，$K'p_0=p_0$ となり，$p_0$ は $K'$ の不動点となる。

そこで以下1において $f(p)$ が最小値に達するとして，1が $K'$ の不動点となることを示す。今

(70) $$f(1)=\max_{k\in K'} Q(1,\tau_k 1)=Q(1,\tau_{k_0}1)\quad(=m\text{ とおく})$$

となる $k_0\in K$ が存在する。

次に1と $\tau_{k_0}\cdot 1$ を結ぶ測地線を $p(t)$ とし，

(71) $$p(0)=1,\qquad p(1)=\tau_{k_0}\cdot 1$$

とする。Eは「凸」集合だから，$\gamma=\{p(t)\mid 0\leqq t\leqq 1\}$ とおくと，$\gamma\in E$ である。今 $K'$ の任意の元 $k_1$ に対して $g(t)=\tau_{k_1}p(t)$ とおく。このとき

$$Q(p(0),\ g(0))=Q(1,\tau_{k_1}\cdot 1)\leqq m$$

(73) $$Q(p(1),g(1))=Q(\tau_{k_0}1,\ \tau_{k_1k_0}\cdot 1)=Q(1,\tau_{k_0^{-1}k_1k_0}\cdot 1)\leqq m$$

である。$4°$ により $F(t)=Q(p(t),g(t))$ は，$t$ の凸函数であるから，(72)(73) により

(74) $\quad Q(p(\tfrac{1}{2}),g(\tfrac{1}{2}))=F(\tfrac{1}{2})\leqq\tfrac{1}{2}(F(0)+F(1))=\tfrac{1}{2}\{Q(p(0),g(0))+Q(p(1),g(1))\}\leqq m$

となる。今、特に $k_1\in K'$ として

(75) $\quad Q(p(\tfrac{1}{2}),\tau_{k_1}p(\tfrac{1}{2}))=\max_{k\in K'}Q(p(\tfrac{1}{2}),\tau_k p(\tfrac{1}{2}))=f(p(\tfrac{1}{2}))$

となるものをとると、(74)により、(75)左辺 $\leqq m$ であり、他方では $m$ は $f(p)$ の $E$ 上の最小値であるから (75)右辺 $\geqq m=f(1)$ となるので、

(76) $$Q(p(\tfrac{1}{2}),g(\tfrac{1}{2}))=m$$

である。これは $F(t)=Q(p(t),g(t))$ の凸であることを示す不等式 (74) において、等号が成立つことを示す。従ってこの場合凸函数 $F(t)$ は狭義凸ではない。従って $F''(t)\geqq 0\quad(\forall t\in\mathbb{R})$ であるが、実は次の(77)が成立つ:

(77) あるt$t_0\in\mathbb{R}$ が存在して $F''(t_0)=0$ となる。

このとき、5°により

(78) $$F(t)=\text{定数}\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

が成立つ。(78)から、次の

(79) $$p(t)=g(t)\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

が導かれる。実際(79)が成立たないと仮定すると、7°により

(80) $$2Q(p(0),p(1))<Q(p(0),g(1))+Q(g(0),p(1))$$

となる。このとき (70)により

(81) $$(80)\text{左辺}=2Q(1,\tau_{k_0}1)=2m$$

である。一方 $m$ の定義 (70)により

(82) $$(80)\text{右辺}=Q(1,\tau_{k_1}\tau_{k_0}1)+Q(\tau_{k_1}1,\tau_{k_0}1)=Q(1,\tau_{k_1k_0}1)+Q(1,\tau_{k_1^{-1}k_0}1)$$
$$\leqq m+m=2m$$

となるから．(80)から $2m<2m$ なる矛盾を生ずる。従って(79)が成立たないという仮定は誤りであり．(79)が成立つ。

さて(79)で特に $t=\frac{1}{2}$ とすると $\tau_{k_1}p(t)=g(t)=p(t)$ だから

(83) $$p\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tau_{k_1}p\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

となる。従って3°により $n=\dim V$ とするとき

(84) $$Q\left(p\left(\tfrac{1}{2}\right),\ \tau_{k_1}p\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=n$$

となる。一方．$k_1$は(75)をみたすようにとったから

(85) $$f\left(p\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=\max_{k\in K'}Q\left(p\left(\tfrac{1}{2}\right),\tau_k p\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=Q\left(p\left(\tfrac{1}{2}\right),\tau_{k_1}p\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=n$$

である。そこで

(86) $$n\leqq\max_{k\in K'}Q(1,\tau_k 1)=f(1)=\min_{p\in E}f(p)\leqq f\left(p\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\underset{(85)}{=}n$$

となるから，任意の $k\in K'$ に対し

(87) $$n\underset{3°}{\leqq}Q(1,\tau_k 1)\leqq\max_{k_1\in K'}Q(1,\tau_{k_1}\cdot 1)\underset{(86)}{=}n$$

であるから

(88) $$Q(1,\tau_k 1)=n\quad(\forall k\in K')$$

となる。そこで3°の等号の成立つ場合だから

(89) $$\tau_k\cdot 1=1\quad(\forall k\in K')$$

となり．1は $K'$ の不動点となる。

2) $G$の任意のコンパクト部分群 $K'$ に対し．$M$の点$p_0$で$K'$の不動点となるものがある。$p_0\in\exp\mathfrak{p}=M=G/K$ は．剰余類 $p_0K\in G/K$ であるから．$K'\cdot p_0=p_0$ は$G/K$で言えば，$K'p_0K=p_0K$，$p_0^{-1}K'p_0K=K$ すなわち，$p_0^{-1}K'p_0\subset K$となる。特に$K'$が$G$の極大コンパクト部分群ならば．$p_0^{-1}K'p_0$もそうだから．$p_0^{-1}K'p_0=K$

となる。∎

定理D′系　$G$を実または複素自己共軛代数群，$K=G\cap U(V)$，$M=G\cap P(V)=\exp(\mathfrak{g}\cap H(V))$とし，$G$のリー群としての単位元連結成分を$G_0$とする。1) $K_0=G_0\cap U(V)$は$G_0$の極大コンパクト部分群である。2) $G_0$の任意のコンパクト部分群$K'$は，$M=G/K=G_0/K_0$上に不動点$p_0$を持つ。3) $G_0$の任意のコンパクト部分群$K'$は$G_0$における$K_0$の共軛$p_0^{-1}K_0p_0$に含まれる。特に$G_0$の任意の極大コンパクト部分群$K'$は，$K_0$と共軛である。

証明　定理D′で，$G$が自己共軛代数群であるという仮定は，命題2が$G$に対し成立つという所にしか用いていない。命題2系により，$(G, K)$に対するのと平行な結果が$(G_0, K_0)$に対しても成立つから，定理D′の証明と平行した論法によって定理D′系が証明された。∎

注意．岩堀[9]では，定理D′にあたる定理は，「$GL(V)$の，自己随伴な連結閉部分群$G$の任意のコンパクト部分群$K'$が$M=G/K$上に不動点を持つ」という形に述べられている。しかしそれの前提となる定理2において，$GL(V)$の自己随伴な連結リー部分群$G$は，$V$上完全可約だから，$G$のリー環$\mathfrak{g}$は完約(reductive)で，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{z}$，$\mathfrak{g}_1=\mathfrak{D}\mathfrak{g}$は半単純イデアルで$\mathfrak{z}$は中心となる。そして線型半単純リー環$\mathfrak{g}_1\subset\mathfrak{gl}(V)$は，代数的リー環で$GL(V)$のある代数部分群のリー環となることを用いている。ここでは代数群であるという性質が本質的であると考え，定理D′の形に結果を述べた。連結群を扱うときには，定理D′系で大低の場合間に合う。例えば半単純リー環の随伴群の場合は，定理D′系の特別な場合である。

## §3　$GL(n,\mathbb{R})$ の極大コンパクト群と自由可動性の公理

この節では、$G=GL(n,\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群の特徴付けと、その共軛性が、弥永・安倍[11]の自由可動性の公理と同値であることを示す。詳しい証明は杉浦[16]で与えたので、ここでは証明の方針のみを述べて置いた。

1°　$G=GL(n,\mathbb{R})$ の岩澤部分群 $T=\left\{t=\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_{ij} \\ 0 & \ddots & t_n \end{pmatrix} \middle| t_i>0,\ t_{ij}\in\mathbb{R}\ (i<j)\right\}$ のコンパクト部分群は $\{1\}$ のみである。

∵）　$t^n\ (n\in\mathbb{N})$ の $(i,j)$ 成分を計算して見ると、それが有界集合となるための条件は $t_i=1\ (1\leqq i\leqq n)$, $t_{ij}=0\ (i<j)$ となる。

2°　$K_0=O(n)=\{g\in G \mid {}^t gg=1\}$ とするとき、1) $G=K_0T$, $K_0\cap T=\{1\}$.

2)　$K_0$ は $G=GL(n,\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群である。

∵）　1)　シュミットの直交化法で $g\in G$ の列ベクトル $(x_1,\cdots,x_n)$ から $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $u_1,\cdots,u_n$ を作り、$k=(u_1,\cdots,u_n)$ とすると $k\in K_0$ で、$k=gs$, $s\in T$ とかけるから、$s^{-1}=t\in T$ で $g=kt$, $G=K_0T$ となる。$K_0\cap T=\{1\}$ は 1° による。

2)　$K_0$ は $G$ のコンパクト部分群である。今 $K_0\subset K$ となる $G$ の任意のコンパクト部分群 $K$ をとると、1) から $K=K_0(K\cap T)$ となるが、1° から $K\cap T=\{1\}$ だから、$K=K_0$ となる。これは $K_0$ が $G$ の極大コンパクト部分群であることを示す。

3°　$B$ を正値実対称行列とし、$B$ に関する直交群を $O(B)=\{g\in G \mid {}^t gBg=B\}$ とする。このとき $T$ の元 $t$ が存在して、$K_0=O(n)$ に対して、$O(B)=t^{-1}K_0t$ と

なる。

∵) $B=H^2$ となる正値実対称行列 $H$ が存在する。2°, 1) により、$H=k_0t$, $k_0\in K_0$, $t\in T$ と表わされる。このとき、$B=H^2={}^tH\cdot H={}^tt{}^tk_0\cdot k_0t={}^tt\cdot t$ となる。従って、

$$g\in O(B)\Longleftrightarrow {}^tgBg=B\Longleftrightarrow {}^tg{}^tttg={}^ttt\Longleftrightarrow {}^t(tgt^{-1})\cdot(tgt^{-1})=1$$

$$\Longleftrightarrow tgt^{-1}\in K_0\Longleftrightarrow g\in t^{-1}K_0t$$

となるから、$O(B)=t^{-1}K_0t$ である。

定義　$\mathbb{R}^+=\{t\in\mathbb{R}\mid t>0\}$ とし、$\mathbb{R}^n$ の $k$ 次元部分線型空間 $V_k$ の $k-1$ 次元部分線型空間 $V_{k-1}$ と、$x_k\in V_k$ で $x_k\notin V_{k-1}$ となるものに対し、集合

$$V_k'=V_{k-1}+\mathbb{R}^+x_k$$

を、$V_k$ の $k$ 次元半空間という。

$\mathbb{R}^n$ の $k$ 次元半空間 $(1\leqq k\leqq n)$ の単調増加列

(1)　$$V: V_1'\subset V_2'\subset\cdots\subset V_n'$$

を、$\mathbb{R}^n$ の旗という。$\mathbb{R}^n$ の旗全体の集合 $\mathcal{F}$ を、$\mathbb{R}^n$ の旗多様体という。

$\mathbb{R}^n$ の旗 $V$ が (1) で与えられるとき、$x_k\in V_k'$ かつ $x_k\notin V_{k-1}'$ となる元 $x_k$ $(1\leqq k\leqq n)$ を一つづつ取って得られる列 $(x_1,\cdots,x_n)$ は、$\mathbb{R}^n$ の基底である。この基底 $(x_i)$ を旗 $V$ に付随する基底という。逆に $\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $(x_1,\cdots,x_n)$ から、各 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ に対し、$k$ 次元半空間 $V_k'$ を

(2)　$$V_k'=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{R}x_i+\mathbb{R}^+x_k,\quad 1\leqq k\leqq n$$

によって定義すれば、旗 $V$ が (1) によって定義される。この旗 $V$ を、$\mathbb{R}^n$ の基底 $(x_i)$ に付随する旗という。

今, $e_1={}^t(1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $e_n={}^t(0,\cdots,0,1)$ を, $\mathbb{R}^n$の自然基底とする。この自然基底に付随する旗$E$を, $\mathbb{R}^n$の<u>自然な旗</u>という。

旗$V$が(1)で与えられるとき、$G=GL(n,\mathbb{R})$の任意の元$g$に対し新しい旗

(3) $$gV: gV_1' \subset gV_2' \subset \cdots \subset gV_n'$$

が生ずる。こうして$G$は旗多様体$\mathcal{F}$に左から作用する変換群となる。

4° 1) $G=GL(n,\mathbb{R})$は$\mathbb{R}^n$の旗多様体$\mathcal{F}$上に推移的に作用する。

2) $G$の岩澤部分群$T$は $\mathcal{F}$の変換群$G$の自然な旗$E$の固定部分群である。

3) $G$の部分群$K$は、自然に$\mathcal{F}$の変換群となる。このとき$K$に対する次の二つの条件(a)と(b)は互いに同値である:

(a) $K$は$\mathcal{F}$上に単純推移的に作用する。

(b) $G=KT$, かつ $K\cap T=\{1\}$.

∵) 1) $\mathcal{F}$の任意の二つの元$V$, $W$に対し、付随する$\mathbb{R}^n$の基底$(x_i)$,$(y_i)$を一つづつとる。このとき$gx_i=y_i\ (1\le i\le n)$となる正則一次変換$g$が定まり、$gV=W$となる。 2) 任意の$t\in T$は、$te_k=\sum_{i=1}^{k-1} t_{ik}e_i+t_{kk}e_k$, $t_{kk}>0$, $t_{ik}\in\mathbb{R}$ となるから、$tE_k'=E_k'\ (1\le k\le n)$ 即ち $tE=E$となる。逆に$tE=E$となる任意の$t\in G$は$T$に属する。

3) (4) (イ)$G=K\cdot T \Longleftrightarrow$(ロ)$K$は$\mathcal{F}$上に推移的に作用する。

実際 $G=KT$ ならば, $\mathcal{F}\underset{1)}{=}GE=KTE\underset{2)}{=}KE$ だから、$K$は$\mathcal{F}$に推移的に作用する。逆に(ロ)ならば、任意の$g\in G$に対し$gE=kE$となる$k\in K$が存在するから $k^{-1}gE=E$ であり、2)から $k^{-1}g=t\in T$. $g=kt$ となるから, $G=KT$である。また次の(5)が成立つ。

(5)　(ハ) $K \cap T = \{1\}$ $\Longleftrightarrow$ (ニ) $f: k \longmapsto kE$ は $K \longrightarrow \mathfrak{F}$ の単写である。

実際 (ハ) が成立つとき、$k, k' \in K$ に対し $kE = k'E$ ならば、$k'^{-1}kE = E$ だから、$k'^{-1}k \in K \cap T = \{1\}$ となり、$k = k'$ である。逆に (ニ) が成立つとき、$k = t \in K \cap T$ ならば $kE = tE \underset{2)}{=} E = 1 \cdot E$ となる。$k, 1 \in K$ だから仮定 (ニ) により $k = 1$ となるから $K \cap T = \{1\}$ である。

(4) (5) により (a) $\Longleftrightarrow$ (b) は証明された。

定理E　$G = GL(n, \mathbb{R})$ の閉部分群 $K$ に対する次の五つの条件 (1) (2) (3) (4) (5) は互いに同値である。

(1)　正値実対称行列 $B$ が存在して $K = O(B)$ である。

(2)　$K = t^{-1} K_0 t$ となる $t \in T$ が存在する。ただし $K_0 = O(n)$.

(3)　$G = KT$ かつ $K \cap T = \{1\}$　(岩澤分解)

(4)　$K$ は $G$ の極大コンパクト部分群である。

(5)　$K$ は $\mathbb{R}^n$ の標構多様体 $\mathfrak{F}$ 上に単純推移的に作用する (自由可動性の公理)

証明　(3) $\Longleftrightarrow$ (5)　　4°, 3) による。　(1) $\Longrightarrow$ (2) 3°

(2) $\Longrightarrow$ (3)　2° により

(6)　$$G = K_0 T, \quad K_0 \cap T = \{1\}$$

が成立つ。今仮定 (2) により、$K = t^{-1} K_0 t$ だから (6) の二式の両辺に $G$ の内部自己同型写像 $x \longmapsto t^{-1} x t$ を作用させれば (3) の二式が得られる。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　$f_0(k) = kT$ で定義される写像 $f_0: K_0 \longrightarrow G/T$ は、2° により全単写である。$f_0$ は連続、$K_0$ = コンパクト だから $G/T$ もコンパクトであり、$T$ = 閉集合故 $G/T$ はハウスドルフ空間である。

$K$ が $G$ の閉部分群とするとき、$K$ は局所コンパクト群で可算基を持つ。今、特に $K$ が条件 (3) をみたすとすれば、4°, 3) により $K$ は $G/T$ 上に単純推移的に作用する。$K$ がコンパクト・ハウスドルフ空間 $G/T$ に連続に作用するから、ベールの定理により、$f: K \to G/T$ ($f(k) = kT$) は開写像である (ヘルガソン[7] Ch. II Th. 3.2)。従って $f$ は同相写像で $K$ はコンパクトである。今 $K \subset K_1$ となる $G$ の任意のコンパクト部分群 $K_1$ をとると、条件 (3) から、$K_1 = K\cdot(K_1 \cap T)$ で 1° から $K_1 \cap T = \{1\}$, $K = K_1$ となるから $K$ は $G$ の極大コンパクト部分群である。

(4) ⟹ (1) 今 $K$ が条件 (4) をみたすとし、$dk$ を $K$ 上の正規化したハール測度とする。$(x, y)$ を $\mathbb{R}^n$ の自然な内積とし、$\langle x, y\rangle = \int_K (kx, ky)\,dk$ とすると、$\langle x, y\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の $K$ 不変な内積である。$\langle x, y\rangle = (Bx, y)$ ($\forall x, \forall y \in \mathbb{R}^n$) となる正値実対称行列 $B$ が存在する。内積 $\langle x, y\rangle$ が $K$ 不変だから、$K \subset O(B)$ となる。$O(B)$ は $G$ のコンパクト部分群，$K$ は $G$ の極大コンパクト部分群だから、$K = O(B)$ となる。 ∎

## §4 慣性律とユニタリ群・直交群の極大コンパクト部分群

$F$ を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (4元数体) の内の一つとし，$V$ を $F$ 上の $n$ 次元左ベクトル空間とし，$H$ を $V \times V$ 上の不定符号正則エルミート形式 ($F = \mathbb{R}$ のときは対称双一次形式) とする。$V$ 上の任意の一次変換 $g$ に対し、その $H$ に関する随伴変換を $g^*$ とする。

(1) $$H(gx, y) = H(x, g^* y). \quad (\forall x, \forall y \in V)$$

が成立つ。$G = U(H) = \{g \in GL(V) \mid g^* = g^{-1}\}$ を $H$ の <u>ユニタリ群</u>($F = \mathbb{R}$ のときは <u>直交群</u>)という。$Q(x) = H(x, x)$ とおく。

$V$ の部分空間 $W \neq 0$ は、$0 \neq \forall x \in W$ に対し $Q(x) > 0$ $(< 0)$ となるとき、<u>正値部分空間</u>(負値部分空間)という。

$W$ が $V$ の極大正値部分空間 $\Longleftrightarrow W^\perp = \{x \in V \mid H(x, W) = 0\}$ は極大負値部分空間。そしてこのとき、次の直和分解が成立つ。

(2) $$V = W \oplus W^\perp$$

今 $V$ の任意の二つの元 $x, v$ を分解(2)により

(3) $$x = y + z, \quad v = w + u, \quad y, w \in W, \quad z, u \in W^\perp$$

と表わすとき、$H_W : V \times V \to F$ を

(4) $$H_W(x, v) = H(y, w) - H(z, u)$$

によって定義するとき、$H_W$ はエルミート形式で、次の(5)(6)(7)が成立つ。

(5) $$H_W(W, W^\perp) = 0$$

(6) $H_W \mid W \times W = H \mid W \times W, \quad H_W \mid W^\perp \times W^\perp = -H \mid W^\perp \times W^\perp$ は共に正値

(7) $H_W$ は正値エルミート形式である。

命題 3. $W$ が $H$ に関する $V$ の極大正値部分空間で、$K(W) = \{k \in G = U(H) \mid kW = W\}$ とおくとき、$K(W) = G \cap U(H_W)$ であって、$K(W)$ は $G$ のコンパクト部分群である。

証明 $k \in K(W)$ とすると、$kW = W$, $kW^\perp = W^\perp$ だから、$x = y + z$, $y \in W$, $z \in W^\perp$ に対し、次の(8)(9)が成立つ。ここで $Q_W(x) = H_W(x, x)$ である:

(8) $$Q_W(kx)=Q_W(ky+kz)=Q(ky)-Q(kz)=Q(y)-Q(z)=Q_W(x).$$

∴(9) $$K(W)\subset G\cap U(H_W)$$

逆に任意の$k\in G\cap U(H_W)$と$y\in W$に対し $ky=w+v$, $w\in W$, $v\in W^{\perp}$とすると

$$Q(w)-Q(v)=Q_W(ky)=Q_W(y)=Q(y)=Q(ky)=Q(w)+Q(v)$$

となるから，$Q(v)=0$. $v=0$, $ky=w\in W$となり，$k\in K(W)$である。

∴(10) $$G\cap U(H_W)\subset K(W)$$

が成立つ。(9)(10)から $K(W)=G\cap U(H_W)$となる。$H_W$は正値だから$U(H_W)$はコンパクト，$G=U(H)$は$GL(V)$の閉部分群だから，$G\cap U(H_W)$はコンパクト部分群である。∎

命題 4. $W$を$H$の極大正値部分空間とするとき，$G=U(H)$は，内積$H_W$に関し，自己随伴である。

証明 正則エルミート形式$H$に対し，正則一次変換$A\in GL(V)$であって内積$H_W$に対し

(11) $$H(x,y)=H_W(Ax,y) \quad \forall x, \forall y \subset V$$

が成立つものが唯一つ存在する。$H$, $H_W$はエルミート形式だから

(12) $$A^*=A$$

である。$(W, W^{\perp})$の$H_W$に関する正規直交基底を$((u_i)_{1\leq i\leq p}, (u_j)_{p+1\leq j\leq n})$とするとき，基底$(u_i)_{1\leq i\leq n}$に関する$A$の行列は$\begin{pmatrix}1_p & 0\\ 0 & -1_q\end{pmatrix}$ $(p+q=n)$であるから

(13) $$A^2=1$$

である。$g\in GL(V)$に対し 次の(14)が成立つ：

(14) $$g\in G=U(H) \iff g^*Ag=A$$

今，等式 $g^*Ag=A$ に，左から $gA$，右から $g^{-1}A$ をかけると，(13) により

(15) $$gA\cdot g^*Ag\cdot g^{-1}A=gAg^*,\quad gA\cdot A\cdot g^{-1}A=gg^{-1}A=A$$

となる。従って

(16) $$g\in G=U(H)\Longleftrightarrow g^*Ag=A\Longleftrightarrow gAg^*=A\Leftrightarrow g^*\in G$$

となる。従って $G^*=G$ で，$G$ は自己随伴である。

定義　$W$ を $H$ に関する極大正値部分空間とし，$X^*$ を $H_W$ に関する $X$ の随伴一次変換とする。次のように定義する。ただし $p^*=p>>0$ は，$p$ が正値エルミート変換であることを表わす。

(17) $$H(W)=\{X\in gl(V)\mid X^*=X\},\ P(W)=\{p\in GL(V)\mid p^*=p>>0\}$$

(18) $$\mathfrak{g}=\{X\in gl(V)\mid X^*A+AX=0\},\ \mathfrak{F}(W)=\{X\in\mathfrak{g}\mid X^*=X\}=\mathfrak{g}\cap H(W)$$

命題 5　1) $\mathfrak{g}$ は $G=U(H)$ のリー環であり，自己随伴である。

2) $G\cap P(W)$ の任意の元 $p$ は，$p=\exp X$，$X\in\mathfrak{F}(W)=\mathfrak{g}\cap H(W)$ と一意的に表わされる。従って任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し，$p^t=\exp tX\in G\cap P(W)$ である。$X\mapsto\exp X$ は $\mathfrak{F}(W)=\mathfrak{g}\cap H(W)$ から $G\cap P(W)$ の上への同型写像である。

証明　1) $G=\{g\in GL(V)\mid g^*Ag=A\}$ だから $\mathfrak{g}=\{X\in gl(V)\mid(\forall t\in\mathbb{R})(\exp tX^*)A(\exp tX)=A\}$ である。この条件式の $t=0$ における導函数の値から，$X^*A+AX=0$ が導かれる。逆にこの条件を $X$ がみたせば，$\forall t\in\mathbb{R}$ に対し $\exp tX\in G$ となる。

2) 命題 4 の証明中の正規直交基底 $(u_j)$ をとり，$V$ 上の一次変換 $g$ と，$(u_i)$ に関するその行列 $(g_{ij})$ を同一視する。任意の $p\in P(W)$ をとるとき，$p$ は正値エルミート行列だから，あるユニタリ行列により，

(19) $$u^*pu = \begin{pmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{pmatrix}, \quad p_i > 0, \ 1 \leq i \leq n$$

と対角化される。今 $\log p_i = t_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq n)$ とし

(20) $$X = u \begin{pmatrix} t_1 & & & 0 \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t_n \end{pmatrix} u^*$$

とおくと、$X^* = X$, $\exp X = p$ となる. 今

(21) $$T = u^* X u, \qquad B = u^* A u$$

とおくとき.

(22) $$p^* A p = A \Longleftrightarrow (\exp T) B = B(\exp(-T))$$

となる。従って $X \in H(W)$ に対し次の同値関係が成立つ。

(23)
$$\begin{aligned}
p = \exp X \in G \cap P(W) &\Longleftrightarrow p^* A p = A \Longleftrightarrow (\exp T) B = B(\exp(-T)) \\
&\Longleftrightarrow (e^{t_i} - e^{-t_j}) b_{ij} = 0, \ 1 \leq i, j \leq n \Longleftrightarrow (e^{t_i + t_j} - 1) b_{ij} = 0, \ 1 \leq i, j \leq n \\
&\Longleftrightarrow t_i + t_j = 0 \text{ or } b_{ij} = 0, \ 1 \leq i, j \leq n \Longleftrightarrow (t_i + t_j) b_{ij} = 0, \ 1 \leq i, j \leq n \\
&\Longleftrightarrow TB + BT = 0 \Longleftrightarrow u^* X u u^* A u + u^* A u u^* X u = 0 \\
&\Longleftrightarrow XA + AX = 0 \Longleftrightarrow X^* A + AX = 0 \qquad (\because X^* = X) \\
&\Longleftrightarrow X \in \mathfrak{p}(W) = \mathfrak{g} \cap H(W)
\end{aligned}$$

(23) は $\exp \mathfrak{p}(W) = G \cap P(W)$ となることを示している。また任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $p^t = \exp tX \in G \cap P(W)$ である。 $p_1, \cdots, p_m$ を $p$ の相異なる固有値の全体とし、$V(p_i) = \{x \in V \mid px = p_i x\}$ とおくと、

(24) $$V = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_m)$$

である。$X \in H(W)$ で $\exp X = p$ となるものは、各 $V(p_i)$ を不変にする一次変換 $X$ で

$X|V(p_i) = (\log p_i) 1_{V(p_i)}$ となるものとして一意的に定まる。従って $\exp$ は $\mathfrak{P}(W)$ から $G \cap P(W)$ の上への全単写で、命題1により同相写像である。 ∎

命題 6　1) $G = U(H)$ の任意の元 $g$ は、一意的に次の (25) のように分解される。ただし $W$ は $H$ に関する極大正値部分空間である。

(25)　　$g = u \cdot p,\quad u \in K(W) = G \cap U(H_W),\quad p \in G \cap P(W)$

2)　$K'$ を $G$ の任意のコンパクト部分群とするとき、$K' \cap P(W) = \{1\}$ である。

3)　$K(W) = G \cap U(H_W)$ は、$G$ の極大コンパクト部分群である。

証明 1) $G$ は自己随伴だから、$g = g^* g \in G \cap P(W)$ となるので、命題5により $g^{\frac{1}{2}} = p \in G \cap P(W)$ である。$u = gp^{-1}$ とおくと、$u^* u = p^{-1} g^* g p^{-1} = p^{-1} p^2 p^{-1} = 1$ 故 $u \in G \cap U(H_W) = K(W)$ であり、(25) が成立つ。一意性は $g = u \cdot p = u_1 \cdot p_1$ とすると $p^2 = g^* g = p_1^2$ だから $p = p_1$ である。($p^2$ の相異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_m > 0$ とすると、$V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_m)$ となり、$p$ は固有空間 $V(\lambda_i)$ 上で $\sqrt{\lambda_i} 1_{V(\lambda_i)}$ となる一次変換として $p^2$ から一意的に定まる。

2)　任意の $g \in K' \cap P(W)$ をとると、一方から $K'$ は $V$ 上のある正値エルミート形式 $H_0$ を不変にするから、$g$ はユニタリ変換であり、$g$ の固有値はすべて絶対値 $= 1$ であり、一方 $g$ は正値エルミート変換だから固有値はすべて $> 0$ である。従って $g$ は固有値がすべて $1$ の対角型変換だから、$g = 1$ であり、$K' \cap P(W) = \{1\}$ が成立つ。

3)　$K(W)$ は命題3により、$G$ のコンパクト部分群である。$K(W) \subset K'$

となる $G$ の任意のコンパクト部分群 $K'$ をとると、1)により、

(26) $\quad K' = K(W)$、($K' \cap P(W)$ で $K' \cap P(W) = \{1\}$

だから、$K' = K(W)$ となる。これは $K(W)$ が $G$ の極大コンパクト部分群であることを示す。▮

命題 7. $K$ を $G = U(H)$ の部分群である正値エルミート形式 $H_0$ を不変にし、かつ $K$ は $V$ 上既約であるとする。このとき $0$ でない実数 $c_1$ が存在して、$H = c_1 H_0$ となる。

証明 $H(x, y) = H_0(Ax, y)$ ($\forall x, y \in V$) となる一次変換 $A$ が定まる。そして $H_0$ に関し $A^* = A$ となる。$A$ の相異なる固有値の全体を $c_1, \cdots, c_m$ とする。$H$ は正則(非退化)であるから、すべての $c_i \neq 0$ である。$c_i$ に対する $A$ の固有空間を $V(c_i)$ とするとき、

(27) $\quad V = V(c_1) \oplus \cdots \oplus V(c_m), \quad H_0(V(c_i), V(c_j)) = 0 \quad (i \neq j)$

となる。$H$ および $H_0$ は共に $K$ に不変であるから、$K$ の各元と $A$ は可換である。従って、$A$ の各固有空間 $V(c_i)$ は、$K$ で不変となる。今 $V$ は $K$ に関し既約と仮定しているから、(27) の直和因子は1個だけであり、$V = V(c_1)$, $A = c_1 1$ となるから $H = c_1 H_0$ である。▮

命題 8 (慣性律) $V$ のエルミート形式 $H$ の、任意の二つの極大正値部分空間 $W$ と $U$ の次元は一致する。

証明、$U^\perp$ は負値部分空間だから、$W \cap U^\perp = 0$ である。従って $n = \dim V$ とするとき、次の不等式が成立つ。

(27) $\quad \dim W + \dim W^\perp = n \geq \dim(W + U^\perp) = \dim W + \dim U^\perp$

従って、$\dim W^{\perp} \geqq \dim U^{\perp}$ となるから

$$\dim W \leqq \dim U \tag{28}$$

である。$W$ と $U$ を入れ換えて考えると、逆向きの不等式

$$\dim U \leqq \dim W \tag{29}$$

も成立つから、$\dim W = \dim U$ である。∎

定理 F　$F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$ とし、$F$ 上の有限次元ベクトル空間 $V$ 上の正則な不定符号エルミート形式を $H$ とする。このとき、次のことが成立つ：

1) $G = U(H)$ の任意のコンパクト部分群 $K$ に対し、$H$ の極大正値部分空間 $W$ が存在して、$K \subset K(W)$ となる。特に $K$ が $G$ の極大コンパクト部分群ならば $K = K(W)$ である。

2) $G = U(H)$ の任意の二つの極大コンパクト部分群 $K, K'$ は $G$ 内で共軛である。

証明 1) $dk$ を $K$ のハール測度とし、任意の $x \in V$ に対し

$$Q_0(x) = \int_K H(kx, kx)\, dk \tag{30}$$

とおき、$Q_0$ から polarization によって、エルミート形式 $H_0(x, y)$ を作るとき、$H_0$ は正値で、$K$ 不変である。$H(x, y) = H_0(Ax, y)$ $(\forall x, \forall y \in V)$ となる一次変換 $A = A^*$ をとるとき、$A$ は $K$ の各元と可換である。$A$ の固有値 $a$ は、すべて実数で固有空間 $V(a)$ は $K$ 不変である。$H, A$ は正則だから、$A$ の固有値 $a$ はすべて $\neq 0$ である。今 $K$ は正値な $H_0$ を不変にするから、$V$ は $K$ 加群として完全可約である。それが、$V$ は既約 $K$ 加群の直和となるので、それを

(31) $$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m, \quad K|V_i \text{ は既約 } (1 \leqq i \leqq m)$$

とする。命題7 により、各既約空間 $V_i$ に対し、実数 $c_i \neq 0$ が存在して、

(32) $$H|V_i \times V_i = c_i(H_0|V_i \times V_i), \quad 1 \leqq i \leqq m$$

となる。今

(33) $$W = \sum_{c_i > 0} V_i, \quad W' = \sum_{c_j < 0} V_j$$

とおくとき

(34) $$V = W \oplus W'$$

である。$i \neq j$ のとき $V_i$ と $V_j$ は、$H$ に関し直交する。従って $W, W'$ はそれぞれ $H$ に関する正値部分空間、負値部分空間となる。そこで (34) より $W$ は $H$ に関する極大正値部分空間である。$K$ は各 $V_i$ を不変にするから $KW \subset W$ となる。

従って、$K \subset K(W) = \{k \in G \mid kW = W\}$ である。命題6により $K(W)$ は $G$ の極大コンパクト部分群だから、特に $K$ が $G$ の極大コンパクト部分群ならば、$K = K(W)$ である。

2) 1) により、$K = K(W)$, $K' = K(U)$ となる、$H$ に関する極大正値部分空間 $W$ と $U$ が存在する。慣性律(命題8) により、$\dim W = \dim U = p$ だから、$\dim W^{\perp} = \dim U^{\perp} = q = n - p$ でもある。$W^{\perp}, U^{\perp}$ は $H$ に関する極大負値部分空間である。そこで $V$ の基底 $(w_i), (u_i)$ であって、

(35) $$\begin{aligned} H(w_i, w_j) &= \delta_{ij} = H(u_i, u_j), \quad 1 \leqq i, j \leqq p \\ H(w_k, w_l) &= -\delta_{kl} = H(u_k, u_l), \quad p+1 \leqq k, l \leqq n \\ H(w_i, w_k) &= 0 = H(u_i, u_k), \quad 1 \leqq i \leqq p, \ p+1 \leqq k \leqq n \end{aligned}$$

をみたすものが存在する。このとき、$gw_i = u_i (1 \leqq i \leqq n)$ をみたす正則一次

変換 $g$ が存在し任意の $l, m \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し $H(w_l, w_m) = H(u_l, u_m)$ となるから, $g \in G = U(H)$ となる。そして $gW = U$ であるから

$$K' = K(U) = K(gW) = gK(W)g^{-1} = gKg^{-1} \tag{36}$$

となり, $K$ と $K'$ は $G$ 内で共軛である。∎

注意 $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ のとき, $G = U(H)$ に対し $G_1 = \{g \in G \mid \det g = 1\}$ とし, $G_0$ を $G$ の単位元連結成分とする。このとき, $G_i$ $(i = 0, 1)$ の任意の極大コンパクト部分群は, ある $H$ の極大正値部分空間 $W$ に対する $K_i(W) = G_i \cap K(W)$ と一致する。そして $G_i$ の任意の二つの極大コンパクト部分群は $G_i$ 内で共軛である(杉浦 [15] Th.2)。

## References


[1]A.Borel, Sous-groupes compacts maximaux des groups de Lie, Séminaire Bourbaki, 1950, no. 33.

[2] E.Cartan, Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemanienne, J. Math. pures et appl. 8(1929), 1-33.

[3] E.Cartan, "Leçon sur la géométrie des espaces de Riemann", Gauthier-Villars, Paris, 1928. 2$^{e}$ed. 1946.

[4] C.Chevalley, "Theory of Lie groups I", Princeton Univ.Press, Princeton, 1946.

[5] C.Chevalley, " Théorie des groupes de Lie II, III", Hermann, Paris, 1951, 1955.

[6] C.Chevalley and Hsio-Fu Tuan,On algebraic Lie algebras, Proc.Nat.Acad. Sci. USA, 31(1945), 195-196.

[7] S.Helgason, "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces", Academic Press, New York, 1978.

[8] H.Hopf and W.Rinow, Über den Begriff der vollständigen differetial-geometrische Flächen, Comm. Math. Helv. 3(1931), 209-225.

[9] 岩堀長慶, 対称リーマン空間の不動点定理, "微分幾何学の基礎とその応用", 数学振興会 第I集, 1956. P. 40-60

[10] K.Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math.50(1949), 509-558.

[11] S.Iyanaga und M.Abe,Über das Helmholtzsche Raumproblem,I,II, Proc.Imp. Acad. (Tokyo), 19(1943), 174-180, 540-543.

[12] A.I.Malcev, On the theory of the Lie groups in the large, Mat. Sbornik, 16(1945), 163-190.

[13] G.D.Mostow, Some new decomposition theorems for semi-simple groups, Memoirs of AMS, 14(1955), 31-54.

[14] G.D.Mostow, Self-adjoint groups, Ann. of Math. 62(1955), 44-55.

[15] M.Sugiura, The conjugacy of maximal compact subgroups for orthogonal, unitary and unitary symplectic groups, Sci.Papers of Coll.Gen.Education, Univ. of Tokyo, 32(1982), 101-108.

[16] M.Sugiura, On the space problem of Helmholtz, "数学史の研究" 数理研講究録 1064, (1998), 6-14.

[17] 杉浦光夫, "リー群論", 共立出版,1999.