保型形式の哲学と群上の調和解析

佐野　茂

はじめに

半単純リー群の表現論や調和解析において Harich-Chandra は先駆的な仕事をしているが、論文は何百もの補題や命題が複雑に絡み合う大分なもので読みづらいものになっている。それがある時期を境にして、見通しが明確な論文へと変身して理論を完成させている。何故これだけ数学の質が劇的に変化したのか長年疑問に思っていたが、この機会に論文を読み直し、I.M.Gelfand の講演が契機となり、保型形式論より概念を入れて研究を進めることにより成功したことが分かったのでまとめてみる。

1962 年ストックホルムでのコングレスにおいて、I.M.Gelfand は 1 時間の基調講演を行っている。そこでは、有限次元表現論より無限次元表現論へと理論を飛躍させたリーダーとして本質的な哲学と今後の展望を自信をもって発表している ([G])。

$\mathbb{X}$ を等質空間とし、群 G が $\mathbb{X} \ni x \mapsto xg \in \mathbb{X},\ g \in G$ と作用しているとする。$\mathbb{X}$ 上の関数 $f(x)$ への作用素 T_g $(g \in G)$ を $T_g f(x) = f(xg)$ と定義すると、表現（関数方程式 $T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1g_2}$ を満足）となる。この表現を既約表現に分解する問題はコンパクトの場合 ($\mathbb{X}$ と G がコンパクト）は H.Weyl、E.Cartan、杉浦光夫らにより研究されてきた（回転群 $O(n)$ が作用し、不変な系列は球関数で与えられる)。このコンパクト条件を排除（reject）することにより無限次元表現にとどく。この問題の重要さと面白さは十分に理解できるでしょうと希望をもって語っている。G を非コンパクト半単純リー群として、色々な場合を考察している。

（1）Γ を G の離散部分群としその商空間を $\mathbb{X} = \Gamma\backslash G$ とおく。$\mathbb{X}$ がコンパクトのとき、$L_2(\mathbb{X})$ は既約ユニタリ表現の可算和に分解される。

（2）$g(t)$ を G の 1 パラメータ部分群とするとき

$$Z = \{z \in G : \lim_{t\to\infty} g(-t)zg(t) = 1\}$$

を horyspherical 部分群と呼び、その各軌道を horyshere ということにする。$G_0 = SL(2,\mathbb{R})$ のとき任意の horyspherical 部分群は $Z_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ に共役となる。正則な離散部分群 Γ をとると、商空間 $\mathbb{X} = \Gamma\backslash G$ は $vol(\mathbb{X}) < \infty$ となる。$L_2^0(\mathbb{X})$ をコンパクトな horyshere で積分して 0 となる関数からなる $L_2(\mathbb{X})$ の部分空間とすると。$L_2(\mathbb{X})$ は離散的に分解される $L_2^0(\mathbb{X})$ と各 horyshere に対応する連続系列とで与えられる。

（3）Γ として連続部分群をとろう。極大コンパクト部分群 $\Gamma = K$ のとき、$\mathbb{X} = K\backslash G$ は対称空間になる。漸近挙動を調べると、$L_2(\mathbb{X})$ にはクラス 1 の表現が現れることが分かる。

（4）$SO(3,1)$ が半単純対称空間 $\mathbb{X} = SO(2,1)\backslash SO(3,1)$ に作用している場合にも、horyshere による方法で $L_2(\mathbb{X})$ の分解を M.I.Graev と調べている。

（5）$\mathbb{X} = G$ が実半単純リー群の場合には Naimark と構成した表現だけでは $L_2(\mathbb{X})$ を分解することはできない。また有限シェバリー群の表現の構成法も与えられる。

Harish-Chandra はこの講演の重要性をその時には理解できなかったが、プリンストン大に戻り講義などをしながら保型形式の哲学を理解していったと回顧している ([H])。

職業能力開発総合大学校, 神奈川県相模原市, e-mail address: ssano@uitec.ac.jp

§1. 保型形式論

理論の基本的な内容を具体例を通してまとめよう。$G=SL(2,\mathbb{R})$、$K=SO(2)$ とし上半平面を $\mathbb{X}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z=y>0\}$ $(i=\sqrt{-1})$ とおく。群 G の $\mathbb{X}$ への作用は

$$\mathbb{X}\ni z\mapsto gz=\frac{az+b}{cz+d}\in\mathbb{X},\qquad g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G$$

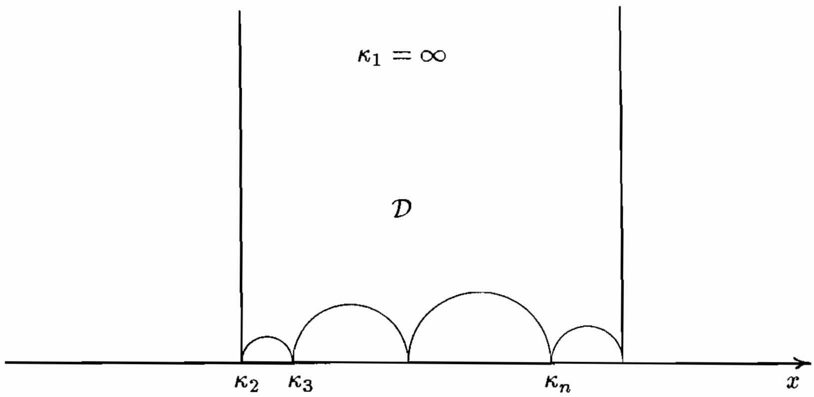
で与えられる。$\mathbb{X}$ は対応 $G/K\ni gK\mapsto g\sqrt{-1}\in\mathbb{X}$ により対称空間 G/K と同一視される。$\mathbb{X}$ 上のリーマン構造 $ds^2=\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$ に付随する $\mathbb{X}$ 上の G 不変測度は $dz=\frac{1}{y^2}dxdy$ となる。ラプラシアンは

$$\Delta=y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

である。

Γ を $vol(\Gamma\backslash\mathbb{X})<\infty$ を満足する G の離散部分群とする。$\mathbb{X}$ の境界の点 $\kappa\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ に対し固定部分群 $\Gamma_\kappa=\{g\in\Gamma:g\kappa=\kappa\}$ が放物元で生成されるとき尖点という。$\Gamma\backslash\mathbb{X}$ の基本領域を $\mathcal{D}$ とすると、仮定より $vol(\mathcal{D})<\infty$ である。$\mathcal{D}$ が非コンパクトの場合が興味深い。

$\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_n$ を Γ により互いに移りあわない $\mathcal{D}$ の境界にある尖点とする。κ_i に対応する固定部分群を Γ_i $(i=1,2,\dots,n)$ とする。$\kappa_1=\infty$ と仮定しよう。$\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}:a\in\mathbb{Z}\right\}$ になる。各尖点 κ_j に対して $g_j\in G$ を (1) $g_j\infty=\kappa_j$、(2) $g_j^{-1}\Gamma_j g_j=\Gamma_\infty$ を満足するようにとる。



各 κ_j に対応して Eisenstein 級数が

$$E_j(z,s)=\sum_{\sigma\in\Gamma_j\backslash\Gamma}y(g_j^{-1}\sigma z)^s$$

で定義される。$\mathrm{Re}s>1$ で絶対収束し、$\Delta E_j(z,s)=s(s-1)E_j(z,s)$ を満足する。この各 $E_j(z,s)$ $(j=1,2,\dots,n)$ により主系列表現がとらえられ、全体で n 重の重複度をもつ。岩沢分解 $G=NAK$ における N 方向すなわち、変数 x に関して、$E_i(z,s)$ は周期 1 の周期性をもつのでフーリエ展開

$$E_j(z,s)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m(y)e^{2\pi mix}$$

したとき、係数 a_0 は不変項 (constant term) と呼ばれ重要である。ラプラシアンの固有解で不変項が 0 となる級数で尖点形式は与えられる。尖点形式は $L_2(\mathbb{X})$ に属して、離散系列を特徴づける。また Eisenstein 級数の不変項は連続系列のプランシュレル測度を求めるときにも大切である。

§2. 群上の調和解析一保型形式より概念の導入一

この節では Harish-Chandra がどういう構想に基づいて保型形式論の概念を利用したかを扱う。G をH-C クラスの簡約リー群とし、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする。$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{g}$ の包絡環をとし、その中心を $\mathfrak{z}$ とする。$\mathfrak{G}^{(2)} = \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{G}$ とおく。θ を $\mathfrak{g}$ のカルタン対合とし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を対応するカルタン分解とする。$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_n$ を互いに共役にならない θ 不変な $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環の極大系とする ([S])。H_j を $\mathfrak{h}_j$ に対応するカルタン部分群とする。このカルタン部分群 H_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を Harish-Chandra は尖点に対応するものと考えて保型形式論から概念を導入している。このことは論文には明記されていないが、用語の使い方や理論展開より分かる。各 H_j に対応する尖点的放物部分群 $P_j = M_j A_j N_j$ をとる。K を $\mathfrak{k}$ に対応する極大コンパクト部分群とする。

各放物部分群 P_j に対して主系列表現が考えられるが、まず一般の放物部分群 $P = MAN$ に対して、Eisenstein 積分を定義しよう。$\{\tau, V\}$ を K のダブル表現とし、$M \cap K$ における制限表現を $\tau_M = \tau|_{M\cap K}$ とする。τ 球関数

$$\phi \in C^\infty(M, V) \ \ \text{s.t.}\ \phi(m_1 x m_2) = \tau_M(m_1)\phi(x)\tau_M(m_2) \ (x \in M, m_1, m_2 \in M \cap K)$$

をとり、G の関数に $\phi(kman) = \tau(k)\phi(m)$ $(k \in K, m \in M, a \in A, n \in N)$ により拡張する。$\mathfrak{a}$ を A のリー環とし、$\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対空間とする。$\nu \in \mathfrak{a}^*$ に対して Eisenstein 積分を

$$E(P:\phi:\nu:x) = \int_K \phi(xk)\tau(k^{-1})\exp\{i\nu - \rho)H_P(xk)\}dk$$

で定義する、ただし $x \in G$ に対し $H_P(x) \in \mathfrak{a}$ を $x \in KM\exp\{H_P(x)\}N$ で与え、$\rho(X) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)|_{\mathfrak{n}})$ $(X \in \mathfrak{a})$. とする。

この Eisenstein 積分と主系列表現との関係について考えよう。ここでは尖点的放物部分群 $P = P_j$ をとる。ラグランジュ分解 $P = MAN$ において M の離散系列表現を ω、A の表現を $\nu(\in i\mathfrak{a}^*)$ とするとき誘導表現

$$\pi_{\omega,\nu} = \mathrm{Ind}_{P\uparrow G}\, \omega \otimes \nu \otimes 1$$

により主系列表現は定義される。この G の表現の指標を $\Theta_{\omega,\nu}$ とし、 M の離散系列表現の指標を θ_ω とすると

$$\begin{aligned}&(\Theta_{\omega,\nu}, l(x^{-1})f)\\ &= \int_{K\times M\times A\times N} \mathrm{conj}\ \theta_\omega(m)\cdot f(xkmank^{-1})\exp\{-(i\nu-\rho)(\log a)\}dkdmdadn\end{aligned}$$

で与えられる。この指標は Eisenstein 積分により次のように表される。

$$(\Theta_{\omega,\nu}, l(x^{-1})f) = E(P:\psi_f(\omega:\nu):\nu:x)$$

ただし

$$\psi_f(\omega:\nu:m) = (\theta_\omega, t(m)g_f(\nu))$$

$$g_f(\nu:m) = \int_{A\times N} f(man)\exp\{-(i\nu-\rho)(\log a)\}dadn \ (m \in M)$$

である。指標により表現が代表されるが、これを Eisenstein 積分でとらえている。$C^\infty(G,\tau)$ を $C^\infty(G,V)$ の τ 球関数からなる空間とする。$\mathcal{S}(V)$ を V 上の連続セミノルム全体の集合とする。G での関数の増大度を次式でとらえていく。

弱不等式：

$$\forall s \in \mathcal{S}(V), \exists r \geq 0, \forall D \in \mathfrak{G}^{(2)}, S_{D,r}(f) = \sup_G |Df|_s \Xi(x)^{-1}(1+\sigma(x))^{-r} < \infty$$

強不等式：

$$\forall s \in \mathcal{S}(V), \forall r \in \mathbb{R}, \forall D \in \mathfrak{G}^{(2)}, S_{D,r}(f) = \sup_G |Df|_s \Xi(x)^{-1}(1+\sigma(x))^{-r} < \infty$$

さらに不変項の概念を保型形式論より導入するために関数空間

$$\mathcal{A}(G,\tau) = \{f \in C^\infty(G,\tau) : (1) f \text{ は } \mathfrak{z} - \text{有限 } (2) f \text{ は弱不等式を満足 }\}$$

をとる。

定理 2.1. $f \in \mathcal{A}(G,\tau)$ に対し次の関係式

$$\lim_{a \to_P \infty} \{d_P(ma)f(ma) - f_P(ma)\} = 0 \ (m \in MA)$$

を満足する $f_P \in \mathcal{A}(MA, \tau_M)$ が存在する。この f_P を f の P に沿っての不変項という。

この不変項は N 方向に関して不変な項である。また M にはいくつかのカルタン部分群 $H_j, H_k, ..., H_l$ がはいる。

§3. 群上の調和解析ー離散系列とプランシュレル公式ー

離散系列表現の特徴づけのため、まず空間

$$\mathcal{C}(G,\tau) = \{f \in C^\infty(G,\tau) : f \text{ は強不等式を満足 }\}$$

をとる。さらに空間

$${}^0\mathcal{C}(G,\tau) = \left\{ f \in \mathcal{C}(G,\tau) : prk\ P \geq 1 \text{ なる放物部分群 } P = MAN \text{ に対し} \int_N f(xn)dn = 0 \right\}$$

の元を尖点形式と呼ぶ。この概念により離散系列表現の行列成分が特徴づけられる。

補題 3.1. $f \in \mathcal{A}(G,\tau)$ が任意の放物部分群 P $(prk\ P \geq 1)$ に対し $f_P = 0$ のとき $f \in {}^0\mathcal{C}(G,\tau)$。

これは不変項が 0 のとき尖点形式となることを示している。τ により K タイプが決まっているが、この尖点形式により離散系列をとらえている。

定理 3.2. *(1)* $f \in \mathcal{C}(G,V)$ が $\mathfrak{z}$ 有限のとき

$$f \in {}^0\mathcal{C}(G,V)$$

(2)

$${}^0\mathcal{C}(G,V) \neq \{0\} \Longleftrightarrow rank\ G = rank\ K$$

これは離散系列が存在するためのランク条件を述べている。この条件を満足するとき、コンパクトなカルタン部分群 B が存在するが、その既約な指標全体を B^* とする。$\mathfrak{b}$ を B のリー環とし、$(\mathfrak{g},\mathfrak{b})$ の正のルート全体を動かして $\varpi = \Pi_{\alpha>0}H_\alpha$ を定義する。尖点形式に対するプランシュレル公式は次のようになる。

定理 3.3. $f \in {}^0\mathcal{C}(G)$ に対し次が成立

$$f(x) = c_G \sum_{b^* \in B^*} (-1)^q d(b^*)\varpi(b^*)(\Theta_{b^*}, r(x)f)$$

ただし、$q = \frac{1}{2}\dim G/K$ とし、$d(b^*)$ は b^* の形式次元を表す。

G の離散系列表現の同値類の全体からなる集合を $\mathcal{E}_2(G)$ とする。B^* の $\varpi(b^*) = 0$ となる元全体を $(B^*)'$ とすると、$W(G/B)\backslash(B^*)'$ と $\mathcal{E}_2(G)$ とは 1 対 1 に対応する。

放物部分群 $P = MAN$ において M がこの離散系列をもつことが大切で、尖点的放物部分群はこの条件を満たす。$L = {}^0\mathcal{C}(M,\tau_M)$ とする。$\omega \in \mathcal{E}_2(M)$ に対し ω の行列成分を含む $L_2(M)$ の最小の閉集合を $\mathfrak{h}_\omega$ とし

$$L(\omega) = L \cap (h_\omega \otimes V)$$

とおくと $L = \sum_\omega L(\omega)$ となる。

$\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ を $A = \exp\mathfrak{a}$ をスプリットパートにもつ放物部分群の集合とする。

補題 3.4. $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}), \psi \in L, \nu \in \mathfrak{a}^*, P' = M'A'N'$ は K で A' は A に共役とならない放物部分群とすると

$$E_{P'}(P : \psi : \nu) \sim 0$$

これは任意の $\phi(m) \in \mathcal{C}(M, \tau_M)$ と $E_{P'}(P : \psi : \nu : ma)$ $(a \in A)$ とは M 上で直交することを意味している。

定理 3.5. $\nu \in (\mathfrak{a}^*)', P_1, P_2 \in \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ に対し次式を満足する $C_{P_2|P_1}(s : \nu) \in End(L), s \in W(\mathfrak{a})$ が存在する。

$$E_{P_2}(P_1 : \psi : \nu : ma) = \sum_{s \in W(\mathfrak{a})} (C_{P_2|P_1}(s : \nu)\psi)(m)e^{is\nu(\log a)}, \psi \in L, m \in M, a \in A$$

この $C_{P_2|P_1}$ を用いてプランシュレル測度がきまるが、これを $\mu(\omega, \nu)$ とする。

定理 3.6. $f \in \mathcal{C}(G, \tau)$ に対し

$$f(e) = \sum_{j=1}^{n} c(A_j) \sum_{\omega \in \mathcal{E}_2(M_j)} d(\omega) \int_{(\mathfrak{a}_j^*)'} (\Theta_{\omega,\nu}, f)\mu(\omega, \nu)d\nu$$

によりプランシュレル公式は与えられる。

§4. 今後の課題

群上の調和解析の歴史を振り返ってきたが、その延長線上にどのような問題があるか考えてみよう。半単純リー群 G が非コンパクトのとき、離散部分群として $\Gamma = \{e\}$ をとると、$vol(\Gamma\backslash G) = \infty$ となる。保型形式論では $vol(\Gamma\backslash G) < \infty$ は必ずつける条件であるが、群上の調和解析はこの条件を必要としない重要な例になっていることが分かる。このことから $vol(\Gamma\backslash G) = \infty$ の場合を研究する価値は十分あるものと考えられる。そこで空間 $SL(2, \mathbb{Z})\backslash SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$ における Eisenstein 級数を調べてみた ([SI])。さらに議論を $L_2(SL(2, \mathbb{Z})\backslash SL(2, \mathbb{C}))$ の既約分解を求める問題へと進めると、半単純対称空間上の調和解析の新しい成果が必要になってくる ([O])。このことからも、この研究の方向は自然な流れのように思われる。

References

[G] Gelfand I.M., *Automorphic forms and the theory of representations*, Proc. Intern. Congr. Math. (1962), 74–85.

[H] Harish-Chandra., *Eisenstein Series over Finite Fields*, Proceedings of a Conference in honor of Professor Marshall Stone at the University of Chicago (1968), 76–88.

[O] 大島利雄., 半単純対称空間上の調和解析, 数学 **37** (1985), 97–112.

[SI] Sano, S., Iida, M., *Eisenstein Series on the space* $SL(2, \mathbb{Z})\backslash SL(2, \mathbb{C})/SU(K)$, Bull. Polytechnic University **30-A** (2001), 187–193.

[S] Sugiura, M., *Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **11** (1959), 374–434.