

Some of Vito Volterra's Legacy

飛田 武幸

§ 0. 序

Vito Volterra (1860–1940) について。

その生涯は、ちょうど19世紀と20世紀とに折半される。

1860年5月3日 Ancona で生まれる。

1882年 Pisa, の大学より物理学博士の学位を取得した。テーマは流体力学であった。

1883年 Pisa の大学の力学教授となった。

Chair of Mathematical Physics in Roma, 1900.

1940年 没

Volterra は、すでに 1883 に関数の関数を扱おうという考えにいたっている。19世紀の間は、関数解析のパイオニア的な仕事で独り我が道を進んだというのにふさわしい。

力学や生物学への貢献も大きいのに、彼の当初の研究の動機は全く数学的なものであった。彼は次のように述べている。(L. Accardi 氏の英訳による)

“.....to clarify some concepts which I believe necessary to introduce, for an extension of Riemann's theory of functions of complex variables, and which I believe might be profitable in various other reserches too ...”

Volterra は Pisa において L. Tonelli の薫陶を受け、またフランス学派の巨匠 J. Hadamard, P. Lévy, R. Fréchet 等と深い交流を持って、彼らともに20世紀前半の関数解析の黄金時代を築いた。その重厚な成果はそれ自身として偉大な成果であるばかりでなく、それらの多くは現在の確率解析の中に蘇って美しく開花している。

また、Volterra は Ernest Cesàro と親交があり、数学その他について書かれた多くの往復書簡が Napoli 大学図書館に残されている。なお、同図書館には、手書きの資料も含めて、Volterra の著書、論文の別刷り、遺稿など膨大な資料が大切に保管されている。それらを見せて頂き、本稿の参考とさせて頂いた。そして、彼の卓越したアイデアにいくらかでも触れることができた。同図書館のご好意に感謝したい。

§ 1. Volterra の著書等

ホワイトノイズ解析との関連が見られるものを [2] 以降に列挙する。その他の論文については全集 [1] 参照。

- [1] Opere Matematiche, di Vito Volterra vol. 1 – 5,
Accademia Nazionale del Lincei, Roma 1954 – 1962.
- [2] Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni.: Nota I, Rend. Lincei. Ser .4, vol.III (1887) 97-105; Nota II ibidem. 141-146; Nota III ibidem 153-158.
- [3] L'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. Gauthier-Villars. 1907.
- [4] Leçons sur les fonctions de lignes. With Pérès, Gauthier-Villars, 1911.
- [5] Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles. Hermann et Fils. 1912.
- [6] Leçons sur les équations intégrales et les équations intégral-différentielles. Gauthier-Villars, 1913.
- [7] Leçons sur les fonctions de lignes. Gauthier-Villars, 1913.
- [8] Drei Vorlesungen ueber neuere Fortschritte der Mathematischen Physik. Teubner, 1914.
- [9] The theory of permutable functions (1912 , Princeton Lecture Notes). Princeton University Press. 1915.
- [10] Leçons sur la composition et les fonctions permutables. with J. Pérès, Gauthier-Villars, 1924.
- [11] Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. Citta di Castello. 1926.
- [12] Theory of functionals. Blackie & Son Limited. 1930.
- [13] Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. Gauthier-Villars, 1931.
- [14] Le calcul des variations, son évolution et ses progrès, son rôle dans la Physique mathématique. Praha-Brno. 1932.
- [15] Les associations biologiques au point de vue mathématique. with Umberto D'Ancona. Hermann et Cie. 1935.
- [16] Théorie générale des fonctionnelles. (with Joseph Pérès)
Livre I. Generalites sur les fonctionnelles
Libre II Théorie des equations integrales. Gauthier-Villars. 1936.

- [17] Principes de biologie mathématique. Acta Biotheoretica (Leiden) III, 1937.
- [18] Operations infinitesimales linéaires applications aux équations différentielles et fonctionnelles. With B. Hostinsky, Gauthier-Villars, 1938.
- [19] Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. With Stoilow. Gauthier-Villars, 1938.
- [20] Sur les distorsions des corps élastiques (Théorie et Applications) with Enrico Volterra, Gauthier-Villars 1960.

Napoli 大学に残された手書きの書物

Prof. Volterra delle nelle R^a Università di Torino.

“Meccanica razionale” 485 pages. 1895. No Chapters, no Sections. Collected by A. Lautard. 他 一篇。

学術論文： 1881 – 1938 の間に 約 270 篇がある。(イタリア語で書かれたものが多く popularity を減らしている (?) のが残念である。)

「その他の参考資料」

1. The Scoula Normale Superiore Pisa. 同名の大学の最高学府としての歴史を綴った記念誌である。この大学は 1813 年に Napoleon によって創設されたが、その 150 周年記念の諸講演記録や資料などを集めた印刷物である。特に Volterra のことを 19 世紀最大の数学者として称え、さらに Scoula Normale Superiore の伝統として数学者であり且つ物理学者であったとして、その業績を簡単に紹介している。なお、Volterra は Betti の学生であったこと、また物理学者 Fermi もここで研究成果をあげたこと等、その学問の伝統と輝かしい成果とを紹介している。極めて興味深い資料である。

2. E.T. Whittaker “Bibliography of Vito Volterra”. 文献 [12] の 巻頭で Volterra の業績を要領よくまとめている。

3. Peres のエッセイ 全集 vol.1. の Cenni Biografici として。

4. L. Accardi, Convegno internazionale in memoria di Vito Volterra. Roma, Accad. Nazionale dei Lincei. 1992. “Vito Volterra and the development of functional analysis”.

§ 2. Volterra の業績について。

大きく五つの時代に分けられる。

(1) 1886 以前

1881 年の力学についての研究論文から始まり、複素解析、数理物理学など、この時期に十指に余る論文を発表している。この頃すでに関数解析への指向がうかがえる。

(2) 1887 – 1903

この時期において、本格的に関数の関数 (汎関数) の理論が展開される。1887 年には線形微分方程式についての 107 ページにおよぶ労作をはじめ 5 篇の論文を書いている。そこでは関数空間の位相に強い関心のあったことが伺われる。

1890年には Jacobi-Hamilton 理論の拡張から変分法にも及び、電気力学、Huyghens の原理など種々の応用も論じている。

(3) 1903 – 1912

研究内容について、20 世紀のはじめに登場した Lebesgue 積分の影響が強く感じられる。

数理物理の微分方程式についての大作、弾性体の数理、関数解析の特論などの大論文がある。当時の著書からもこの頃の傾向がうかがわれる。彼の名を冠して呼ばれる積分作用素の話も 1910 年頃から始まっている。

Hadamard は関数解析における Volterra の業績を最も高く評価した数学者で、その弟子である Fréchet, Lévy, Gâteaux 達に推奨している。当然のことながら、Volterra の仕事にはフランス (パリ) 学派の影響が大きい。

(4) 1913 – 1925

関数解析学形成にとって最も重要な時期であった。パリの研究者のみならず、N. Wiener も汎関数の解析を始めており(1920・), Volterra は関数解析学の流れを推進する主要な数学者であったし、また強力な協力者も何人かいたのは幸いであった。豊かな成果は 1922 年に Lévy の関数解析の成書となり、ついで 1924 年 Volterra-Pérès の名著 (前節文献[10]) が世に出て、ついで 1925 年の Volterra による Madrid 大学の講義録 (英訳は 1030 年刊行) Theory of Functionals が出版された。まさに関数解析学にとって黄金時代の幕明けとなったのである。

積分方程式の理論は有名であるが、電磁場における電流について 70 ページを超える大論文を発表して、物理への応用も大いに力を注いでいる。曲線の汎関数の解析学、したがって変分法を始めたのもこの時期であったことに注目したい。

(5) 1926 – 1940

変分法を中心とした無限次元解析学が論じられている。晩年の興味がこのあたりにあったようだ。現代数学、特に確率解析学の課題として再定式化したいことが多い。Lotka-Volterra 方程式や、ラプラシアンも論じられており大層興味深い。前者については 1931 年の著書（前節文献[13]）が有名である。Volterra が生物学の問題に興味をもったのは、親戚に生物学者がいたからだということである。

この時期は Volterra にとって円熟期で豊富な業績を短くまとめることは不可能である。次節で三つの話題のみをとりあげる。

§ 3. 三つのトピック。

Volterra の業績を語るとき是非取り上げたい話題を選んでみた。

1) Lotka-Volterra 方程式。

Son in law Umberto D'Ancona : The struggle for existence を扱う。

Volterra は 1927 年の論文で具体的な現象を考察し、1937 年の Acta Biotheoretica 誌に発表した長い論文（文献 [17]）で、いわゆる Lotka-Volterra 方程式を導いている。二つの種のとときは prey-predator の関係を表すもので、解法も含めて誰でも知っている有名な式である。それは次のように表される：

$$\begin{aligned} du/dt &= (b - av)u, \\ dv/dt &= (-\gamma + \beta u)v, \quad a, b, \gamma, \beta > 0. \end{aligned}$$

重要なことは、Volterra がこの式を変分法によって導いたことである。古典力学における最小作用の法則から力学系の運動をきめるのと類似の方法である。多くの種の場合の一般的な場合を扱うが、汎関数の変数にあたる関数には個体数の時間積分をとり、ラグランジュ関数には自由エネルギーとある種の 2 次形式とを採用している。生物学的な知識はここで活かされている。Lotka-Volterra 方程式は生物の現象以外にもよく登場し、その有意義さが知られる（例えば Prigogine の熱力学的分枝）。

なお 1938 年には logistic curve も変分法で導いているが、そこでは Lagrange 関数に、また自由エネルギーが登場するのは興味深い。

2) Variational calculus

Volterra や Hadamard, Lévy 達の論じた古典関数解析における変分法は、表現には工夫を要するが、確率論において、特にホワイトノイズ解析において極めて重要な手段となる。古典では特にパラメータを曲線にしたときによく研

究されていた。さらにパラメータを manifold にしたときの変分解析の結果は現在の確率場に対する研究に有効である。いわゆる温故知新の典型的な例として revisit することが望まれる。

3) Laplacian

無限次元においては、いくつかの Laplacian が必要となる。典型的なものを三つあげよう。

i) Laplace-Beltrami operator

有限次元球面上の関数に作用する Laplace-Beltrami operator の無限次元類似はごく自然に定義される。自然であり過ぎて古典では無視されてきたのか、あるいは筆者の不注意のせい、古いところではこれに気づかない。

ii) Volterra Laplacian (or Gross Laplacian),

汎関数の2階変分の正則な部分に着目し、その核関数のトレースによって定義される。これもまた自然なものであり、現代風にいろいろ特徴づけが行われている。

iii) Lévy Laplacian

無限次元であるので変数は無限個ある。各変数についての2階部分の Cesàro limit が Lévy Laplacian である。それは汎関数の2階変分の核関数の対角線上にある singular な部分の積分ということで Volterra Laplacian と比較することができる。

上の ii) と iii) は定義域を分け合っており両者が相携えて、無限次元での Laplacian の役割を果たしている。このように、それぞれの役割と特色を持っていて、詳しいことが知られているが、なお現時点でいつそう明らかにしたい事も多い。iii) は真に無限次元的であることが重要な認識である。他にも匹敵する作用素があるかもしれないが、とにかく古典関数解析の両碩学が並んでそれぞれの Laplacian を提唱したのは偶然ではなからう。

おわり