Banach-Tarski の逆理とその周辺，特に Tarski の円・正方化問題について

森本　明彦

§1 Banach-Tarski の逆理

表記の逆理とは

「辺の長さ 1 cm の立方体は，適当に有限個の細片にバラして，それら細片をうまく纏めなおすと，辺の長さ $\sqrt[3]{2}$ cm の（つまり体積が2倍の）立方体につくり直すことが出来る」

という，全くマジックのようなことが可能であるという，歴とした数学の定理のことである。　このことは，また次のようにも言えることがわかっている．

「半径 1 cm の球を，適当に有限個の細片に分割し，それら 細片をうまくまとめなおすと，半径６０億光年の球（つまり宇宙の大きさの球）にすることが出来る」．

もう少し数学的に表現するために，まずつぎの定義から始めよう．

R^k の isometry 全体からなる群を $\mathrm{Iso}(R^k)$ で表しておく．

$\mathrm{Iso}(R^k) := \{ \sigma : R \to R \,;\, d(\sigma(x), \sigma(y)) = d(x, y) \ (x, y \in R^k) \}$,

ただし，$d(x,y) = (\sum_i (xi - yi)^2)^{1/2}$ for $x = (x1, \ldots, xk)$, $y = (y1, \ldots, yk)$.

定義1

$A, B \subset R^k$ に対して，A と B が equidecomposable（分割同値）であるとは，

A の部分集合 $A1, \ldots, An$ と B の部分集合 $B1, \ldots, Bn$ が存在して，つぎの条件 (1),(2) をみたすときをいう．

(1) $A = A1 \cup \ldots \cup An$, $Ai \cap Aj = \phi$ $(i \neq j)$
$B = B1 \cup \ldots \cup Bn$, $Bi \cap Bj = \phi$ $(i \neq j)$

(2) 任意の $i \leqq n$ に対して，$\sigma i \in \mathrm{Iso}(R^k)$ が存在して，
$Bi = \sigma i(Ai)$.

このとき，$A \sim_n B$ で表す（$\sim_n$ を n・分割同値と呼ぶことにする．n を明記する必要のないときは，単に，$A \sim B$ で表す）．

更に，$\mathrm{Iso}(R^k)$ のある部分群 G を決めておいて，条件 (2) の σ_i が $\sigma_i \in G$ ($i = 1, \ldots, n$) にとれるとき，A と B とは G-equidecomposable であるといい，$A \overset{G}{\sim_n} B$ で表す．

以上の定義を用いると，
Banach-Tarski の逆理はつぎのように述べることができる．

定理 1 (Banach-Tarski の逆理)
R^k ($k \geqq 3$) の中の，辺の長さ 1 の立方体を A，辺の長さ $\sqrt[3]{2}$ の立方体を B で表せば，ある自然数 n が存在して，$A \sim_n B$ が成立つ．
またつぎのような言い方もできる．

R^k の中の半径 1 の球を A，半径 $R > 0$ (任意の大きさでよい) の球を B とすると，$A \sim_n B$ をみたす自然数 n が存在する．

$k \leqq 2$ にたいしては，このような逆理が成立しないことについては後で述べる(§ 3 定理 3)．

§ 2 Banach-Tarski の逆理はどのように受け止められたか．

Banach-Tarski は 1924年 Fund. Math. に上記の定理を発表した．
筆者がこの定理を知ったのは高々十数年前のことである． 志賀浩二さんが，

「最近 Banach-Tarski の逆理というのを知ったのだが，任意の球を適当に有限個の細片に分割してそれらをうまくまとめなおすと，同じ大きさの球が2つ出来るらしい」

ということをポツリと話して下さった． これを聞いて筆者が吃驚仰天したこと勿論であって，自分の耳を疑ったことをはっきり記憶している．所がよくよく聞いてみると，どうも数学的には何ら欠陥のあるものではないらしいことと，選択公理を用いる所が問題であるということも分かってきて，自分で，Banach-Tarski の論文を読んでみようということとなった．

従って，この論文が発表されてから約６０年間この定理を知らずにいたこととなり，自分の迂闊さ，不勉強さを痛感した次第である．

Banach-Tarski の論文は１９２４年に発表されているから，１９３０年頃日本で出版された数学の本を２，３読み返してみた．思い出深い辻正次著「集合論」には，集合のあいだの一対一対応即ち濃度の話題は多く書かれているが，Banach-Tarski の逆理 については触れられていない．

髙木貞治著 「近世数学史談」「数学雑談」を改めてページをくってみてもそれらしい話題はでてこない．末綱恕一著 「数学と数学史」についても事情は同じである． このような shocking な話題がどうしてこれらの先生がたの目にとまらなかったのか不思議なことである． あるいは故意に敬遠されたのだろうか． 当時，多分あまり一般に流布していなかった 「選択公理を使うことに問題があるかどうか」判然としていなかったため，この話題を回避されたのだろうか．

回想文集 「追想 髙木貞治先生」にその痕跡がないかどうか読みなおして見たが，殆どそれらしい形跡がみつからない． ただ一つ気にかかることがあるのは小野勝次先生のことである． 「気まぐれ人生，おちこぼれの記」（日本評論社 １９８１） によると，小野先生は，髙木先生のゼミで，van der Waerden, Moderne Algebra を講読された由，自分の番がまわってきたある時のある場面で，「ここで選択公理を使います」と言ったところ間髪を入れず，髙木先生が 「ペダンテイック だネ」 と告げられたということである． この言葉が小野先生の心に強く印象ずけられ，以後終生この事が忘れられなかったという風に書かれている． このことは，「追想 髙木貞治先生」のなかにも殆ど同じ文章で掲載されている．事実，筆者は，名大在職中，時折小野先生から，（名大の）定例談話会で，基礎論のお話を拝聴する機会を得たが，今にして思うと，折にふれて，「選択公理を使うのには少し問題がある」 に近い意味のことをおっしゃっていたのを聞き流していたように記憶している． というのも，選択公理など使うのはあたり前であって何ら問題にすることもなかろうというのが（少なくとも若い時分の）筆者の感覚であったので，わざわざ選択公理を問題とされることにむしろ意外な念を抱いたものである．

従って，「どうして選択公理がそんなに問題なんですか」という質問を小野先生にぶつけて見ることもなかったし，そんな質問をする気分にもならなかったのが実情である．

Banach-Tarski の逆理　のことについては談話会で話題になったことは（残念ながら）一回もない．この逆理が，小野先生の頭の中にあって「選択公理を使うのには少し問題がある」と時折チラホラとおっしゃったのか或いは単に高木先生の発言についての記憶からそうおっしゃったのか今となっては知る由もない．一度その辺の事情を先生から直接お聞きしようと考えていた矢先，８月８日に，先生は急逝されてしまった．痛恨の極みである．　因みに，数学辞典（日本数学会編）には，Banach-Tarski の逆理についての記載はないようである．

§３　Equidecomposability の概念は誰の創案だろうか．

Wagonの本 [W] p.33 によると，この概念は，Banach and Tarski によると記されており，文献として ［ＢＴ］，［Ｔ１］ があげられている．

実際，１９２４年以前にこの概念がはっきり記された論文はないようだし，筆者の感覚ではそのような論文は存在しそうにもない．　所で［Ｔ１］の著者は，Tarski 単名である．　［ＢＴ］と［Ｔ１］とはどちらが先に書かれたものだろうか．

筆者なりに［Ｔ１］（in Polish）を解読した結果，この概念を創案したのは，Tarski であろうという結論に達した．

それを説明するには，まず Bolyai-Gerwien の定理を思い起す必要がある．

定理２（Bolyai-Gerwien (1833)）

平面 R^2 上の ２つの多角形 を Ｐ１，Ｐ２ とする．

Ｐ１，Ｐ２ が幾何学的に equidecomposable であるための必要かつ十分な条件は， Ｐ１ ，Ｐ２ の面積が等しいことである．

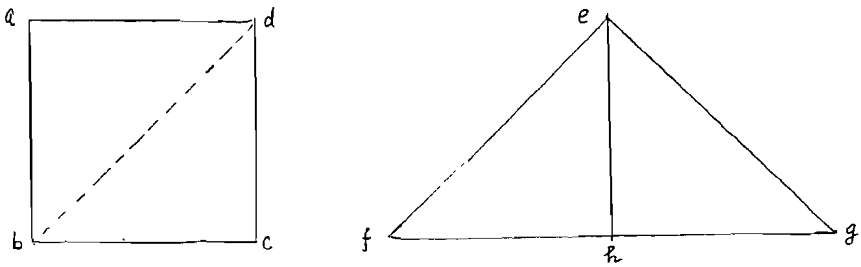
注意

ここに, $A, B \subset R^2$ が幾何学的に equidecomposable であるとは, 定義１ において A_i ,B_i はすべて 多角形 であって, 条件 $A_i \cap A_j = \phi$, $B_i \cap B_j = \phi$ を, $\mathrm{int}\, A_i \cap \mathrm{int}\, A_j = \phi$, $\mathrm{int}\, B_i \cap \mathrm{int}\, B_j = \phi$ に弱めたものが成立つときをいう.

ただし, $\mathrm{int}\, A_i$ は, A_i の内点の集合を意味する.

例えば, つぎの図のように正方形 abcd を P1 とし, 直角二等辺三角形 efg を P2 とすると, bc = fh ならば, Ｐ１とＰ２は面積が等しく, 幾何学的に equidecomposable になっている.

図 1



実際, $A1 = \Delta abd$, $A2 = \Delta bcd$, $B1 = \Delta efh$, $B2 = \Delta ehg$ とおき, $\sigma 1$＝平行移動, $\sigma 2$ ＝ ’点 d のまわりに ２７０° 時計まわりに回転して平行移動’ とするとよい.

しかし, $A1 \cap A2 \neq \phi$, $B1 \cap B2 \neq \phi$ であるから, 定義１の条件をみたさず, このままでは, Ｐ１～ Ｐ２であることを主張できない.

A1 ,A2 ,B1 ,B2 を $A1 = \mathrm{int}\,(\Delta abd)$ 等, 三角形の内部にとり, A3 =ad A4 =ab, A5 = bc, A6 = dc 等とおき,

$$P1 = A1 \cup \ldots \cup A6 , \quad P2 = B1 \cup \ldots \cup B6$$

と分割しても, 辺の長さは, Ｐ１ においては $4 + \sqrt{2}$, Ｐ２ においては $3 + 2\sqrt{2}$ となって定義１ をみたすように σi (i= 1,..., 6) がとれない.

Tarski [T1] は辺についての条件は, 三角形の内部に吸収されてしまう巧妙な方法を案出し, Ｐ１～Ｐ２ が実際成立することを証明することに成功した. そのことは図１のような図を論文の中に提示して,

くわしく説明し，厳密な証明を与えている．　そして，論文の終りにフランス語のレジュメを付して，équivalants par décomposition の定義を再記し，定理２　が，「幾何学的に」という字句を取り去っても成立つ事（即ち，つぎの定理３）を証明することがこの論文の主目的であることを記し，つぎの補題が成立つことを明記している．

補題 (Tarski)

R^2 の中の内点を含む集合を　P　とし，有限この線分　L１，．．．，Ln（長さは任意で，互に交わっていてもかまわない）をとり，Q　＝　PUL１U...ULn　とおくと，

P　～　Q　が成立つ．

特に，任意の多角形　Q　の内部を　P　とすると，

P　～　Q　である．

定理３ (Banach-Tarski)

R^2 の中の二つの多角形　P１　と　P２　をとると，P１　と　P２　が，equidecomposable であるための必要かつ十分な条件は，P１　と　P２　の面積が等しいことである．従って，R^2 の中では，Banach-Tarski の逆理は発生しない．

Tarski　の補題は［ＢＴ］　にもそっくりそのまま書かれている．このことから　［ＢＴ］よりも，［Ｔ１］の方が前に書かれたものであることが明白である．　何故 なら，内容が，既に書かれた論文に，完全に含まれてしまうようなものが論文として書き改められて，再度発表されるという様なことは考えられないからである．

以上のように，［ＢＴ］　と　［Ｔ１］を比較検討してみると，equi-decomposability の概念は，Tarski の創案になるものと考えざるを得ない．

§４ Banach-Tarski の論文［ＢＴ］ の意義

大きくわけて，３つの意義があると考えられる：

１° strikingly counterintuitive theorem が証明されたこと．

２° Equidecomposability $\overset{G}{\sim}_{n}$ が，初めて明快に定義されたこと．

３° 選択公理の数学における意味をかんがえる動機を提供したこと．

ここで，順次補足説明を加える．

１° について

Wagon の本［Ｗ］ の巻頭に Jan Mycielski が文章 Forword を寄せ Banach-Tarski の逆理のことを

> This, I believe, is the most surprising result of theoretical mathematics.

と書いている．また，

Dougherty-Forman ［ＤＦ］ はつぎの文章から始まっている．

> Perhaps the most strikingly couterintuitive theorem in mathematics is the 'Banach-Tarski paradox.'

２° について：

分割同値 ～ は合同の概念に，集合を分割すると言うことと，変換の合成による群の概念を結合した，合同概念の極めて自然な拡張であるが，１９２４年以前には見ないものであって，簡明であるが故に，誠に興味深い概念であると考えられる． 実際この概念のお陰で種々の興味深い問題が研究課題として生れることになり，数多くのすぐれた論文の起爆剤となった． 上記 Mycielski の Forword によれば，１９５０年代 Poland で特に often discussed と記されている． 我が国においてこの方面に見るべきものがなかった（？）のはどうしてだろうか．部分群 G をいろいろ取りかえたり，$\sim_N$ の N を小さくすること等すぐに気がつく問題である． また A ～ B における A の分割 $A = \bigcup A_i$ に現れる pieces A_i にいろいろと付帯条件 （例えば， A_i がある位相的条件をみたすようにとるとか，少なくとも measurable set にするとか）をつけるとまた別の面白い問題が派生する等々．

3° について：

Wagon の本 [W] の巻頭につぎのような会話の文章が掲載されている.

デロス島民 : 疫病をのがれるにはどうすればよいのですか？

デルポイの神託 : 現在ある立方体の祭壇の2倍の体積をもつ立方体の祭壇を作りなさい.

Banach-Tarski : 選択公理を用いてもよろしいですか？

§1にかかげた Banach-Tarski の逆理は正に，上記神託が選択公理を用いることによって遂行可能であることを暗示している. 事実この公理を用いずに問題の逆理を証明する方法は今の所誰も考えついていないらしい. この逆理から逆に選択公理が導き得るかどうかについては筆者は全く知らない.

Hahn-Banach の選出定理を仮定すれば Banach-Tarski の逆理が導かれることを考えると， Banach-Tarski の逆理を認めない立場を取ると仮定すると Hahn-Banach の選出定理を否定することとなり，関数解析の分野で得られている数多くの結果が再検討を迫られる事態が生ずることとなる.

Banach-Tarski の逆理についての日本語による解説や論評には，[Sh]，[Su]，[FM] 等がある.

物理学者でノーベル賞受章者として著名なファインマン教授は

「Banach-Tarski の逆理は数学者のたわごとに過ぎない」

と語ったと伝えられる.

宇宙物理学で有名な 「ビッグバン宇宙・インフレーション理論」と Banach-Tarski の逆理との類似性を思う時，将来，誰か天文学者が Banach-Tarski の逆理を宇宙物理学に援用するようなことが起れば，誠に愉快な事であろうと空想している.

§ 5 Equidecomposability 〜 についての素朴な問題

Sierpiński [Si3] は equidecomposability に関する基本的な性質を，自分自身の結果も含めて集大成した論説である． まず，Sierpińskiは，２つの集合 A，B $\subset$ R^k が与えられたとき，A 〜 B かどうかを判定することは一般に容易でないことを喚起している． 特に，面積が等しい正方形 A と円板 B とは A 〜 B かどうか不明であると記している． これは，Tarski の Circle squaring Problem と呼ばれるようになった問題であって， Tarski が，１９２５年 ［Ｔ２］ において提起したものである． Sierpiński はそのことには言及していない．この問題については， § 7 以下でくわしく解説する．

彼は，直線 R の中の集合にたいする equidecomposability にも興味があったらしく， ［Ｓi2］においてかなりくわしく調べている．

閉区間 ［０，１］ と 半開区間 ［０，１） についてのつぎの結果は興味深い．

定理４ (Sierpiński)

$$[0,1] \sim_3 [0,1) \quad \text{が成立つ．}$$

証明は，［Ｌ５］p.160 を見られたい．

［０，１］$\sim_2$ ［０，１）かどうかに就いては，［Ｓｉ１］p.220 に成立しないと書かれているが，証明は記されていない．

筆者が学生時代に 辻正次著 「集合論」に接した折，［０，１］ と ［０，１） とは濃度が同じであって，実際具体的な一対一対応を作る所に感銘を受けた記憶がよみがえってきた． そこで是非，［０，１］$\sim_2$ ［０，１）とならない証明を見ておきたいと思うようになり，文献を調べてみたが証明が見つからない． Sierpiński がどのような証明を持っていたのか今となっては知る由もない．それで筆者自身証明を試みることにした．現在，完全に証明できたと考えているがその証明はかなり長い．

要するに　$[0,1]\sim_2[0,1)$　を
仮定して，いろいろな case がすべて不可能であることを示して，しらみつぶしに消してゆくのである．　誰か，簡明な証明を知っている人がいたら教えてほしいものである．

実は，つぎの命題が成立する．（これについては，筆者の証明は未完成）．

命題

閉区間　$[0,1]$　の真部分集合　A　を任意にとると，

$$[0,1]\sim_2 A \text{ は成立しない．}$$

$[0,1]\sim_3[0,1)$　を用いると，閉区間　$(0,1)$　に対して，
$[0,1]\sim_{12}(0,1)$　は容易に示せるが，

$$[0,1]\sim_3(0,1)$$

かどうか，筆者には不明である．
このほか，素朴な問題であって，筆者には興味があるのだが，不明であるものを，参考までに掲げるとつぎのようなものがある．

問１　　正数全体をR^+で表すとき，$R\sim R^+$　か？

多分，$R\not\sim R^+$ と思われるが，筆者には証明できない．
（以後，記号　$\not\sim$　は equidecomposable でないことを表すものとする．）

問２　　$A=R=R\times\{0\}$, $B=$ x-axis $\cup$ y-axis とおく．　$A, B\subset R^2$ にたいして，　$A\sim B$ か？

多分，これも　$A\not\sim B$　と思われるが，筆者には証明できない．

問３　　$Q=\{$有理数$\}$　とすると，　$[0,1]\setminus Q\sim[0,1]$ か？

問4　$A = [0,1]$, $D = \{1/n : n = 1,2,...\}$ に対して，$B = A \setminus D$ とおくとき，$A \sim B$ か？
（§9 における Laczkovich の結果を摘用できるかも知れない．）

問5　3つの集合 $Q \setminus N$, $Q \setminus 2N$, $Q \setminus Z$ の間には，分割同値 $\sim$ が成立するだろうか．
（因みに，$N \not\sim 2N$ である．）

§6　2-分割同値についての Sierpiński の結果

Sierpiński [Si2] は，$A, B \subset R$ に対して $A \sim_2 B$ となるかどうか数学的に意味のある集合 A, B について，いくつかの興味ある結果を与えている．以下そのうちのいくつかを取上げる．

定理S1　Rの任意の可算部分集合D に対して，

$$R \sim_2 R \setminus D \quad (\text{但，} A \setminus B = \{a \in A \;;\; a \notin B\})$$

が成立つ．

定理S2　R の任意の有界部分集合 B に対して，

$$R \sim_2 R \setminus B$$

が成立つ．

定理S3　Rの任意の無限部分集合 A に対して，A のある無限部分集合 B が存在して，

$$A \not\sim B.$$

定理S4　$\overline{Q} = \{\text{代数的数}\}$ とおくと，

$$R \setminus Q \sim_2 R \setminus \overline{Q}.$$

即ち，無理数全体 と 超越数全体とは，2-分割同値である．

定理S5　　$Q \not\sim \bar{Q} \cap R$

即ち，有理数全体　と　代数的実数全体とは，分割同値ではない

定理S5’　　$Q \not\sim \bar{Q}$

即ち，有理数全体　と　代数的数全体とは，分割同値ではない

定理S6　　$Q \supset A \supsetneq B$　かつ，　A　が有界ならば，

$$A \not\sim B$$

定理S7　　$x, y \ R$，　$x > y > 1$　に対して，

$A = \{ [nx] ;\ n \in N \}$，$B = \{ [ny] :\ n \in N \}$　とおくと

$$A \not\sim B$$

定理S8　　$R \supset E \supset [0, 1]$　をみたす

（Lebesgue）非可測集合　E　が存在して，　$E \sim [0, 1]$.

§ 7　Tarski の円・正方化問題

より正確には，円板・正方形化問題というべきか．
表記の問題は，つぎのように言い表せる．
「円形の紙を，うまい具合に，細かくちぎって，まとめなおすと正方形となるように出来るか」
数学的な言い方をすると，

問題　(Tarski's Circle squaring Problem)

平面 R^2 上の面積が等しい円板を A, 正方形を B とすると, A ～ B か?
即ち, 円板 A の部分集合 $A_1, \ldots, A_n$ と, 正方形 B の部分集合 $B_1, \ldots, B_n$ が存在し

(1) $A = \bigcup A_i$, $B = \bigcup B_i$ (disjoint union),

(2) 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $\sigma_i \in \mathrm{Iso}(R^2)$ が存在して

$B_i = \sigma_i(A_i)$ が成立つ

ようにできるか?

この問題 は, Tarski が, １９２５年に, Fund. Math. に, 問題３８として, 提出して以来約６０年間未解決であった.　その間, この問題に対して否定的な, 部分的解答として, 次の２つの結果がある.

1°: A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) が Jordan 領域であるという条件をつけくわえると, この問題の答は否定的である. (Dubin, Hirsch, Karush [DHK])

2°: R^2 の isometry として translation 全体は $\mathrm{Iso}(R^2)$ の部分群 $G \subset \mathrm{Iso}(R)$ であって, 加群として R^2 と 同型である. よって, 特に Q^2 は $\mathrm{Iso}(R^2)$ の部分群となる.　この部分群に制限すると,

$$A \overset{Q^2}{\sim} B$$

は成立しない.　(Gardner [G])

§8 Laczkovich による Tarski の円·方化問題の肯定的解決

デルポイの神託については §４でふれたが, もう一つの神託があって
「与えられた円と面積の等しい正方形を作図せよ」
というものである.　この問題は, 定規とコンパスを用いて作図せよと

いうことであれば，よく知られたように不可能である．　所が §7 のように解釈すると可能であることを M.Laczkovich [L1] が証明したのである．　この辺の事情については Gardner-Wagon の解説 [GW] がある．

A. Tarski (1902- 1983) は自分の提出した問題の解答を知ることなくこの世を去った．　実は，Laczkovich [L1] は Tarski の問題をより精密につぎのような形で肯定的に解決した．

定理5　(Laczkovich)

Iso(R^2) の部分群として translation 全体からなる群を Tr で表す：$Tr := \{\sigma \in Iso(R^2) ; \exists a \in R^2,\ \sigma(x) = x + a \ \ \forall x \in R^2\}$.
この時，A を R の円板とし，B を正方形とすると A, B の面積が等しければ，

$$A \overset{Tr}{\sim} B$$

が成立つ．

rotations を用いなくても equidecomposable であるというのだから驚きである．　さらに，前 §2° を見ると，Tr より狭い群
$Tr^{Q} := \{\sigma \in Iso(R^2) ; \exists a \in Q^2,\ \sigma(x) = x + a \ \forall x \in R^2\}$ にすると

$A \overset{Tr^{Q}}{\sim} B$ は成立しないのであるから，誠に微妙である．

定理5 に到達する過程で [L1] において，つぎの結果も得られている．

定理6　(Laczkovich)

直角二等辺三角形 A と正方形 B は，面積が等しければ

$$A \sim_N B$$

を満たす自然数 N が存在する．

ただし，この論文 [L1] における N の評価は，$N > 10^{50}$ というのだからこれも驚きである．

rotation を用いてもよいなら， $A \underset{63}{\sim} B$ は簡単に示せる． 63 がいくらまでさげられるかについては，筆者には不明．

また， equidecomposability ～ を達成する部分集合 $A_1, ..., A_n$ を多角形にとることは不可能であることも知られている (Hadwiger-Glur[Bo])．Laczkovich は [L4] において，定理５ を更に拡張してつぎのすばらしい結果を得ている．

定理７ (Laczkovich)

R^2 の Jordan 領域 A であって，その境界 ∂A が rectifiable (長さが定義される曲線) であるならば， A は面積が A の面積に等しい正方形 B と Tr-equidecomposable である：

$$A \overset{Tr}{\sim} B.$$

注

定理５ の証明には選択公理が使われるのだろうか． Laczkovich は，選択公理については，一言も触れていない． しかし，証明を子細に読んでみると[L1] p.92 において選択公理を用いている． 多分，彼にとっては，選択公理 は 問題にする程重要なものではないのであろう．

§ 9　Laczkovich の論文 [L1] のキーポイント

§８で最も重要な結果は定理７であって，それは［Ｌ４］で証明されたものである．［Ｌ４］は［Ｌ１］を一般化したものであり，［Ｌ５］は［Ｌ４］の結果も含めた総合報告となっている．よって，定理７の証明の道筋を明らかにするため，［Ｌ５］の主要部分を解説することをこの § の目標とする．それは，［Ｌ１］のキーポイントを解説することにもなる筈である．

従って，この § における定理や系の番号は，すべて，［Ｌ５］の定理や系の番号を表すものとする．（定義の番号は，この稿全体の通し番号とする．）

まず，キーポイントとなる定義から始める．

定義２

２種類の 'Discrepancy' $\Delta(S; H)$ と $D_n(S; H)$ をつぎのように定義する（Discrepancy の性質については［ＫＮ］にくわしい．筆者は Discepancy の邦訳を知らないので原語のままとする）．

(A)　$S, H \subset R^2$ に対しては，S が discrete 集合で，H が，有界 かつ measurable のとき

$$\Delta(S; H) = |\ |S \cap H| - \lambda_2(H)\ |$$

(B)　$S, H \subset I^n$ $(I = [0,1))$ に対しては，S が有限集合のとき

$$D_n(S; H) = |\ |S \cap H| / |S| - \lambda_n(H)\ |$$

とおく．ただし，$|S|$ は S の元の個数を表し，$\lambda_n(\cdot)$ は，n-次元 Lebesgue 測度（$n = 1,2,3,...$）を表す．

次に，$u, x_1, ..., x_d \in R^n$ に対して，集合 $F_N(u; x_1,...,x_d)$ をつぎのように，定義する：

$$F_N(u; x_1,...,x_d) = \{ (u + n_1x_1 + ... + n_dx_d) ; 0 \leqq n_1,...,n_d \leqq N \}$$

但し，$v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in R^n$ に対して，

$(v) = (\{v1\}, \{v2\}, \ldots, \{vn\})$, where

$\{a\} = a - [a]$ for $a \in R$. ($[\cdot]$ は Gauss 記号)

勿論, $F_N(u; x1, \ldots, xd) \subset I^n$

［Ｌ５］の主定理は，次の 定理５．２ 及び 系 ５．３ である．

（ 定理，系の番号は，［Ｌ５］における番号を表す）

系５．３（ｉｉ） は我々の定理７に外ならない．

定理 ５．２

Suppose that H1 and H2 are bounded measurable subsets in R^n such that $\lambda n(H1) = \lambda n(H2) > 0$ and $\Delta(\partial H1) < n$, $\Delta(\partial H2) < n$. ;

Then, $H1 \overset{Tr}{\sim} H2$.

ここで， $\lambda n(\cdot)$ は，n-次元 Lebesgue 測度 を表す．

また， $\Delta(\partial H1)$ は，つぎの定義による．（$\partial H1$ は H1 の boundary ）

定義３

The upper index of Kolmogorov $\Delta(E)$ for a bounded subset E of R^k is defined by :

$$\Delta(E) = \limsup_{\varepsilon \to +0} \log M(\varepsilon, E) / \log(1/\varepsilon),$$

where $M(\varepsilon, E)$ denotes the smallest number of balls of diameter ε needed to cover E.

系 ５．３

(i) If $A, B \subset R^n$ are bounded convex sets with $\lambda n(A) = \lambda n(B) > 0$,

then, $A \overset{Tr}{\sim} B$.

(ii) If $A, B \subset R^2$ are Jordan domain of the same area and with rectifiable boundaries, then $A \overset{Tr}{\sim} B$.

定理.5.2 にはもう一つの系があって，それは，「Kantor 集合」と区間の間の分割同値についての次のような問題の解決であった．

C.A. Rogers の 問題 の解答：

$A = (1/3, 2/3) \cup (7/9, 8/9) \cup (25/27, 26/27) \cup \cdots$

とおくと，　$A \sim (0, 1/2)$　か？　　答：　YES！

<u>定理５．２　の　証明の道筋：</u>

定理 5.2 を証明するためには，つぎの 定理 ５．４ がキーポイントとなる．そして，次ぎの順序で，定理 5.2 および 系 5.3 に到達する．

定理 5.6 → 定理 5.5 → 定理 5.4 → 定理 5.2 → 系 5.3

定理 5.6 は ［Ｌ３］に証明されている．（かなり，準備が必要．しかし，特に理解困難な箇所はない．）

定理 5.4

Let $H1$, $H2$ be measurable subsets of I^n with $\lambda n(H1) = \lambda n(H2) > 0$ and suppose that there are vectors $x1, \ldots, xn \in R^n$ such that

(i) the unit vectors $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ $(i = 1,\ldots,n)$ and $x1, \ldots, xn$ are linearly independent over the rational numbers, and

(ii) there are positive constants K, ε such that

$$Dn(F_N(u; x1, \ldots, xn); Hj) < K.N^{-1-\varepsilon}$$

for every $u \in R^n$, $N = 1,2,\ldots,$ and $j = 1,2$.

Then, $H1 \overset{Tr}{\sim} H2$.

Comment ☆☆☆

二つの集合 H1，H2 が translation-equidecomposable $\overset{Tr}{\sim}$ なるための十分条件を，評価が可能な量「Discrepancy」を用いて表現できたことが，論文［Ｌ１］の中で一番重要なところである．

定理 5.5

Let G be the n-dimensional torus identified with I, where $I = [0, 1)$ and let μ be the Haar measure on G.

Suppose that $H1, H2 \subset G$, $\mu(H1) = \mu(H2) > 0$, and there are independent elements $x1, \dots, xN \in G$ and positive constants K, ε such that

$$Dn\,(F_N(u;\, x1, \dots, xn);\, Hj) < K.N^{-1-\varepsilon}$$

for every $u \in G$, $N = 1, 2, \dots,$ and $j = 1, 2$.

Then $H1 \overset{Tr}{\sim} H2$.

定理 5.6

Let $S1, S2$ be discrete subsets of R^d, and suppose that there are positive constants α, K, such that

$$\bigl|\, |Sj \cap Q| - \alpha \cdot \lambda d(Q) \,\bigr| < K \cdot s(Q)^{d-1-\varepsilon}$$

for every lattice cube $Q \subset R^d$ and $j = 1, 2$, where $s(Q)$ denotes the length of the side of Q.

Then there is a bijection ϕ from $S1$ onto $S2$ such that

$$|\phi(x) - x| < M$$

for every $x \in S1$, where the constant M only depends on d, K, ε and α.

定理５．６ → 定理５．５ の証明の outline：

任意の $u \in R^d$ に対して，

$Sr(u) = \{ n \in Z^d ;\ (u + nx) \in Hr \}$ $(r = 1, 2)$ とおく． 勿論，

$Sr(u) \subset Z^d$ $(r = 1, 2)$.

このとき，定理５．５ の 中の

discrepancy $Dn(\,.\,;\,.\,)$ にたいする条件を用いて，

$$\bigl|\ |Sr(u) \cap Q| - \alpha \cdot \lambda d(Q)\ \bigr| \leqq K.s(Q)^{d-1-\varepsilon}$$

for every lattice cube Q.

を証明することが出来る．　ただし，

$$\lambda 2(H1) = \lambda 2(H2) = \alpha \quad , \quad \alpha > 0.$$

よって，定理５．６ により bijection $\psi_u : \alpha \cdot S1(u) \to \alpha \cdot S2(u)$ が存在する．

写像の族 $\{ \psi_u ; u \in R^d \}$ と Sr(u) の定義を用いて，bijection

$$\chi : H1 \to H2$$ であって，

$$\chi(z) = z + d_z , \quad d_z \in \{ ax + by + ci + dj : a,b,c,d \in [-C, C] \}$$

を満たす χ の存在がわかる．

χ を用いて，$H1 \overset{Tr}{\sim} H2$ であることが，容易に，結論される．

Equidecomposability に関連した 未解決の問題で主なものを挙げると，

問題 1 Disk ～ Square の N は $N > 10^{50}$ ([L1]での評価) だったが，
N > 3 かどうかは，未だに，解決されていないらしい！．

問題 2 Is a disc equidecomposable to a square of the same area using Borel measurable pieces ?

問題 3 Is a regular tetrahedron in R^3 equidecomposable to a cube using Lebesgue measurable pieces ?

問題 4 Is every polygon equidecomposable to a square using translations and Lebesgue measurable pieces ?

§１０ Laczkovich による最近の仕事

Laczkovich は［Ｌ１］の論文を発表する時期にそれと前後して関連の仕事を［Ｌ６］等に発表している．　これらの仕事を［Ｌ１］と殆ど同時に進めていた事実を知ると興味深いものがある．　それら結果のいくつかを紹介してみよう．　まず，

定義４

三角形 T が多角形 P を タイル張りする （T tiles P）とは，三角形 A1,...,,An であって，つぎの条件をみたすものが存在するときをいう．

(1) $P = \bigcup_{i=1}^{n} Ai$, $\mathrm{int}\, Ai \cap \mathrm{int}\, Aj = \phi$ $(i \neq j)$,

(2) $Ai \backsim T$ $(i = 1,2,..., n)$. （$\backsim$ は，相似を意味する．）

このとき，簡便のため，$T \mid P$ で表すことにする．

定義５

P をタイル張りする三角形 T であって，互に相似でないものの個数を s(P) で表す：

$$s(P) = \#(\{T:\mathrm{triangle}\ ;\ T \mid P\}/\backsim).$$

多角形 P に対して，s(P) を求めることは，とてもむつかしい問題 (surprisingly difficult problem [L6]) である． 実際，P が正方形のときですら T|P をみたすすべての T を決定するという問題はまだ解決されていない．

論文［Ｌ７］においてつぎのことは証明されている．

定理８ (Laczkovich)

R_n を正 n 角形とすると $s(R_n) = \infty$ である．

ただし，証明は $n \leqq 8$ までくわしく書かれているが，$n \geqq 9$ についての証明の detail は omitted である．

つぎの問題も面白い．

問題 (Pósa) T = ΔABC において，$\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$,$\angle C = 30°$ とする．

正方形 は，この三角形 T で，タイル張りされるだろうか？

定理９(Laczkovich)

Pósa の問題の答は，No ！ である．

§１１ Banach-Tarski paradoxical decompositions with the property of Baire

今回のシンポジウムでは時間の関係もあって，言及できなかったが，１９９４年に発表された Dougherty-Foreman の結果は，７０年振りに Banach-Tarski の逆理に新しい息吹を吹込んだ注目すべき結果であるからその中の主要定理のみでも紹介しておきたい！

定理１０ (Dougherty-Foreman)

X を Polish space とし，G を X の 位相同型からなる，ある群とする． X の ある comeager subset Y であって，G が Y 上に acts freely とする．更に，ある自然数 N にたいして，G は 3N この free generators f_{ij} ($i=1,2,3$; $1 \leqq j \leqq N$) を持つと仮定する．このとき， X の中には，開集合 A_{ij} であって，つぎの条件をみたすものが存在する．

(1) A_{ij} はたがいに disjoint である．

(2) 任意の $j \leqq N$ にたいして，

$\bigcup_{i=1}^{3} f_{ij}(A_{ij})$ は X の中で dense である．

この定理から， 種々の新しい paradoxical decomposition の存在が証明される．

証明には選択公理を用いないようにするため，帰納法が用いられる． この帰納法による証明が極めて複雑で，帰納法の仮定となるある４つの条件を

すべてみたすように順次つぎの段階に進めて行く証明法は，follow するだけでも大変である． この論文 [DF1] の予告的な論文として [DF2] があるが [DF2] の方だけで [DF1] を理解する助けにすることはこれもまた大変である．

しかし，結果は，正に，瞠目に値する．

文 献

[B] S.Banach, Sur le probleme de la mesure, Fund. Math. 4 (1923), 7-33.

[BT] S.Banach-A.Tarski, Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents, Fund. Math. 6 (1924), 244-277.

[B] V.Boltianski, Hilbert' Third Problem, Winston, 1978.

[DF] R.Dougherty - M.Foreman, Banach-Tarski decomposition using sets with the property of Baire, J. AMS 7 (1994), 75-124

[DHK] L.Dubin - M.Hirsch - J.Karush, Scissor congruence, Israel J. Math., 1 (1963), 239-247.

[G] R.Gardner, Convex bodies equidecomposable by locally discrete group of isometries, Mathematika 32 (1985), 1-9.

[GW] R.Gardner - S.Wagon, At long last, the Circle has been squared, Notices AMS 36 (1989), 1338-1343.

[KN] L.Kuipers - H.Niederreiter, Uniform distributions of sequences, John Wiley and Sons, 1974.

[L1] M.Laczkovich, Equidecomposability and discrepancy ; a solution of Tarski's circle squaring problem, J. r.angew. Maih. 404 (1990),

[L2] ------------, Uniformly spread discrete sets in R ,J. London M.S. 46 (1992), 39-57.

[L3] ------------, Decompositions of sets with small boundaries,ibid. 46 (1992),58-64.

[L4] ------------, Decompositions of sets with small or large boundary, Mathematika 40 (1993), 290-304.

[L5] ------------, Paradoxical decompositions, A survey of recent results. Prog. Math. 120 (1994) , 159-184.

Prog. Math. 120 (1994) , 159-184.

[L6] ------------, Tilings of polygons with similar triangles, Combinatorica 10 (1990), 281-306.

[L7] ------------, Tilings of polygons with similar triangles II, Discr. Compt. Geom. 19 (1998), 411-425.

[Si1] W.Sierpinski, Sur la congruence des ensembles de points et ses generalisations, Comm. Math. Helv. 19 (1946), 215-226.

[Si2] ------------, Sur l'equivalence des ensembles par decompositions en deux parties, Fund. Math. 35 (1948), 151-158.

[Si3] ------------, On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition, Chelsea, 1967.

[T1] A.Tarski, O rownowaznosci wielokatow, Prz. Matem.-fiz, 1-2 (1924) 54-67.

[T2] --------, Probleme 38, Fund. Math. 7 (1925), 381.

[W] S.Wagon, Banach-Tarski paradox, Cambridge Univ. Press, 1985.

[FM] P.フランクル-前原濶，幾何学の散歩道，共立出版，1991.

[O] 小野勝次，気まぐれ人生-おちこぼれの記，数学セミナー，日本評論社，1981.
[Sue] 末綱恕一，数学と数学史，弘文堂書房，1934.

[Ta1] 高木貞治，近世数学史談，共立出版，1933.

[Ta2] --------，数学雑談，共立出版，1935.

[Tu] 辻正次，集合論，共立出版，1934.

[Sh] 志賀浩二，無限からの光芒，日本評論社，1988.

[Su] 砂田利一，バナッハ-タルスキーのパラドックス，数学 50，日本数学会，1991.