物理学との相互作用による数学の発展史

ニュートン力学　＜微分積分学＞　から

相対性理論　＜リーマン幾何学＞　を経て

量子力学　＜リー群の表現論＞　へ

名城大学理工学部
数学科
岡本清郷

以下のスライドの画像は
マイクロソフトのマルチメディア百科事典
Microsoft Encarta から引用したものです。

この講演は「MS Power Point」のスライドショウにより行った。以下，各スライドに対する説明を加える。

ニュートン力学　＜微分積分学＞

ニュートン　**Isaac Newton** 1642～1727
(生年月日は、当時のユリウス暦で1642年12月25日，今日のグレゴリオ暦では1643年1月4日)

イギリスの数学者・物理学者。
数学の分野では微分積分学をドイツの数学者ライプニッツとは独立に創設し、
物理学の分野では光学の諸問題を解決し、
運動の3法則
(1) 慣性の法則
(2) 運動の法則
(3) 作用、反作用の法則
を樹立し、さらに
万有引力の法則を発見した。

物理学 ⟹ 新しい数学

ニュートンは力学の定式化のため微分積分学を創設した。

ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F_x$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}=F_y$$

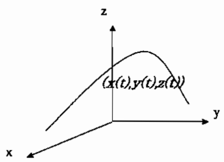
$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2}=F_z$$

$$x(t_0)=a,\ y(t_0)=b,\ z(t_0)=c$$

$$\frac{dx(t_0)}{dt}=u,\frac{dy(t_0)}{dt}=v,\frac{dz(t_0)}{dt}=w$$

ユークリッド空間

空間の点は
(x,y,z)
で表される。



ユークリッド幾何

平行移動と回転のなす群（合同変換の群）で不変な性質を研究する。

ニュートンはユークリッド幾何学を用いたが，それは暗に絶対静止系の存在を仮定したものだった。

ニュートンの運動方程式において

$$q_1(t)=x(t),q_2(t)=y(t),q_3(t)=z(t)$$

$$p_1(t)=m\frac{dq_1(t)}{dt},p_2(t)=m\frac{dq_2(t)}{dt},p_3(t)=m\frac{dq_3(t)}{dt}$$

とおくと，（ $(p_1(t),p_2(t),p_3(t))$ は運動量と呼ばれる）

ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{dq_1(t)}{dt}=p_1(t),m\frac{dq_2(t)}{dt}=p_2(t),m\frac{dq_3(t)}{dt}=p_3(t)$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=F_1,\frac{dp_2(t)}{dt}=F_2,\frac{dp_3(t)}{dt}=F_3$$

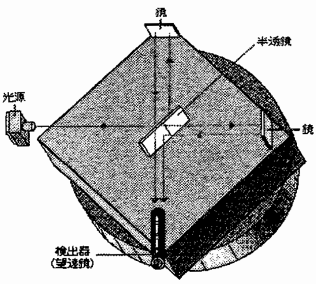
$$q_1(t_0)=a_1,q_2(t_0)=a_2,q_3(t_0)=a_3$$

$$p_1(t_0)=b_1,p_2(t_0)=b_2,p_3(t_0)=b_3$$

となり、相空間と呼ばれる６次元空間の曲線の満たす
1階の微分方程式となる。

ニュートンの運動方程式は初期値として位置と運動量を同時に定める。これは後で述べる不確定性原理と矛盾する。

絶対静止系の非存在の証明



1887年に、アメリカの物理学者マイケルソンと化学者モーリーは当時、電磁放射の媒体として宇宙をみたしていると考えられていたエーテルの存在を確かめる実験をおこなった。

そして，絶対静止系は存在しないことが証明された。

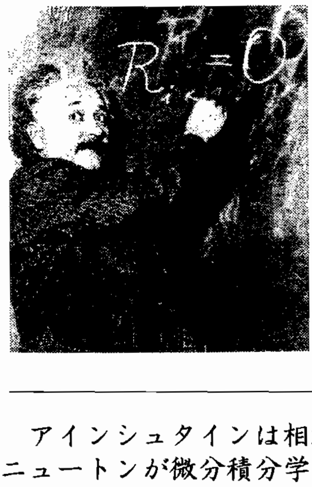
その結果、それまで絶対的真理と考えられていたニュートン力学が間違っていることが分かり、物理学は大混乱に陥った。

それを救ったのがアインシュタインである。

ニュートンの時代はユークリッド幾何学しか知られていなかったので，ニュートンがそれを使ったのは止むを得なかった。

相対性理論　＜リーマン幾何学＞

アインシュタイン　**Albert Einstein** 1879～1955



ドイツ生まれの理論物理学者。
1905年に特殊相対性理論、光量子説、
1915年に一般相対性理論を発表した。
1933年ナチスから逃れて、アメリカに移り、プリンストン高等研究所教授になる。

一般相対性理論に基づいて、
彼は「太陽のような巨大な質量の天体の近くを通過する光は、その重力の影響で曲がる」ことを予言した。

アインシュタインは相対性理論の定式化にリーマン幾何学を援用した。ニュートンが微分積分学を自ら創設し数学と物理を両方とも研究しなければならなかったのに対し，アインシュタインはリーマン学派の膨大な研究成果を使うことにより短期間に相対論を進展させることが出来た。

アインシュタイン方程式

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 8\pi T_{ij}$$

ここで

R_{ij} :リッチ曲率

g_{ij} :リーマン計量

R :スカラー曲率

T_{ij} :エネルギーテンソル

特殊相対性理論

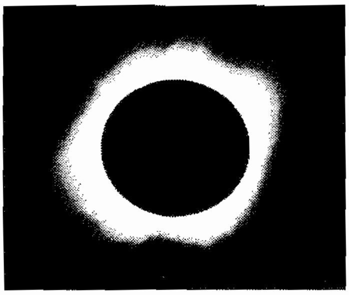
ミンコウスキー空間
空間3次元に時間1次元を加えた4次元空間
物理量はローレンツ変換で不変

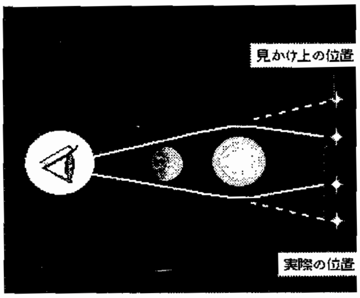
一般相対性理論

リーマン空間
物理量はリーマン計量（ローレンツ計量）を不変にする座標変換で不変

数学 ⟹ 物理学の発展

ユークリッド幾何学のみが実用的価値があると信じられていた時代にリーマンは数学的価値観からリーマン幾何学を研究した。それをアインシュタインが使うことが出来たのは時代を超越した数学の価値観の有用性を示す例証である。





$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

光の質量は0なので太陽の質量が如何に大きくても重力は働かない。

エディントン　Arthur Stanley Eddington 1882〜1944

1906年からグリニッジ天文台の助手をつとめ、13年にケンブリッジ大学天文学教授、14年には同大学天文台長となった。

1919年の皆既日食時に「太陽の近くを通る光が太陽の重力により曲げられること」(一般相対性理論の理論的予測)を実証した。

相対性理論の検証のため宇宙は壮大な実験装置「太陽，地球，月」を用意し，日食という実験を提供した。

アインシュタインの相対性理論の検証

１９１９年５月２９日エディントン観測隊により
西アフリカ　スペイン領赤道ギニア沖にあるプリンシペ島
南米　　　　北ブラジルのソブラル
の２ヶ所に分かれて観測された。

NHK スペシャル
アインシュタイン　ロマン
より

相対性理論の破綻

光の正体を明らかにすることは、長い間、物理学の基本問題であった。
ニュートンは、光を粒子の放出であると考えた。
オランダの物理学者ホイヘンスは、光は波動として伝播するという理論を提出した。

マクスウェル　**James Clerk Maxwell** 1831～1879

イギリスの物理学者。
電磁場の基礎方程式(マックスウェル方程式)を導き、光が電磁波であることを予言し、
ドイツの物理学者ヘルツはそれを実証した。

マックスウェルとヘルツにより光は波であることが実証された。

プランク　Max Karl Ernst Ludwig Planck 1858～1947

ドイツの理論物理学者。
1900年に光は粒子(光子)でエネルギーは「或る微小単位の整数倍の値を非連続的にしかとらない」という革命的な仮説をたて、これを定式化するため「プランクの定数 h」を導入した。
1918年にノーベル物理学賞を授賞した。

1905年にアインシュタインは、光量子説を発表し、この業績によって1921年ノーベル物理学賞を受賞した。

光が「粒子であると同時に波である」という事実はニュートン力学でも、相対性理論でも説明の出来ないことであった。

このなぞを完全に解いたのは量子力学である。

プランクは光の粒子性を検証し，アインシュタインのノーベル賞の受賞対象は相対性理論でなくて「光量子説」であった。

量子力学の発展により、単に光ばかりでなく「すべての素粒子は或時には粒子の流れとして、また或時には波として振舞う」ことが分かった。
量子力学においては、ニュートン力学のような決定論的な計算ではなく、確率計算が行われる。

数学　⟹　新しい物理学

量子力学に対するアインシュタインの反論

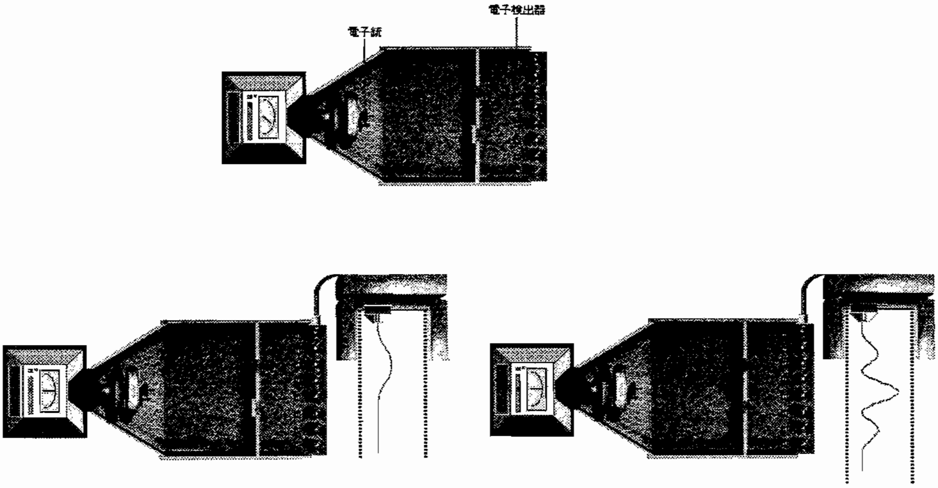
アインシュタインは量子力学の確率解釈に反対し、ニールスボーアと激しい論争をしました。この論争で敗退した後も、彼は「神はサイコロ遊びを好まない」と述べています 。

ラプラスの悪魔

「人間の運命は決まっている」のでいくら努力しても無駄である。

ニュートン力学的決定論は破綻し，確率論を用いた量子力学により「ラプラスの悪魔はいない」ことが示された。

電子銃の実験



「電子は同時に二つのスロットを通過し，波動として伝播する」ことが実証された。

量子力学の創設

ハイゼンベルク　Werner Karl Heisenberg 1901〜1976

ドイツの理論物理学者。
1925年 行列形式による量子力学を完成させ、
1927年 電子のような粒子の「位置と運動量を同時に正確にきめることはできない」という不確定性原理を提唱し、
量子力学における基礎理論を確立した。

ハイゼンベルグの不確定性原理

粒子の位置　$(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ を正確に測定すればするほど

粒子の運動量　$(p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ が不確定になり、逆に

粒子の運動量　$(p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ を正確に測定すればするほど

粒子の位置　$(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ が不確定になる。

不確定性原理によると粒子の位置と運動量を同時には確定できない。よって，ニュートン力学の初期値問題は誤った設定である。

ハイゼンベルグはスカラー（つまり実数値）である

$$q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t),\ p_1(t),\ p_2(t),\ p_3(t)$$

を無限次元のベクトル空間上の変換行列として無限次の行列

$$Q_1(t),\ Q_2(t),\ Q_3(t),\ P_1(t),\ P_2(t),\ P_3(t)$$

で表し、それらは交換関係式

$$[Q_i(t), Q_j(t)] = 0, [P_i(t), P_j(t)] = 0$$

$$[Q_i(t), P_j(t)] = \sqrt{-1}\hbar\delta_{ij}I$$

を満たすと仮定した。ただし、**[A,B] = AB - BA**。

この交換関係式はハイゼンベルグ群の既約ユニタリ表現の微分表現として得られる。

不確定性原理を導く交換関係式はリー環の表現である。これはリー群の表現論が量子力学の基礎付けに重要であることを示している。

シュレーディンガー　Erwin Schrödinger 1887～1961

オーストリアの物理学者。
1926年に、彼は「原子核の周りの電子の軌道が、あるきまった定常波を持つ」ことを数学的に厳密に示し、波動方程式(シュレディンガー方程式)を導き出した。
1933年ノーベル物理学賞を受賞した。

シュレディンガーは「ヒルベルト空間」（関数空間）を考え、
素粒子（正確には素粒子の状態）はその元（ただし，定数倍は同一視する）であり
「量子力学系の時間的発展はシュレディンガー方程式

$$\sqrt{-1}\hbar\frac{\partial\psi(t,q_1,q_2,q_3)}{\partial t} = H\psi(t,q_1,q_2,q_3)$$

（H は系のハミルトニアン　）

に従う状態関数　$\psi(t,q_1,q_2,q_3)$　の時間的変動によって

記述される」と結論した。

ノイマン　John von Neumann 1903～1957

ハンガリー系アメリカ人の数学者。
1930年に、アメリカ合衆国にわたり、プリンストン大学の教授となり、1933年プリンストン高等研究所の教授となる。
1937年にアメリカ市民となり、第2次世界大戦中はロス・アラモスの原子爆弾計画に参加した。

彼の「作用素環」の概念は「量子力学の数学的基礎づけに大きな成果」をもたらした。
一方、電子計算機の設計でも知られ、彼が試作した「プログラム内蔵方式のノイマン型計算機は今日のコンピューターの原型」といわれる。

「ハイゼンベルグ群の既約ユニタリ表現をすべて求めよ」という問題が提起され、フォン・ノイマンによって完全に解かれた。フォン・ノイマン環は関数解析という数学の新しい分野を発展させ，ゲルファントーナイマルクによりローレンツ群のユニタリー表現論の研究に使われた。

ワイル　Hermann Weyl 1885～1955

ドイツの数学者。
1930年彼はヒルベルトの後任としてゲッチンゲン大学の教授となる。
1933年に、ナチスから逃れてアメリカ合衆国にわたり、プリンストン高等研究所の教授となる。
「群論と量子力学」を著わし、量子力学の基礎として、連続群の表現論を確立した。

ローレンツ群のユニタリ表現はゲルファント、ナイマルク等のロシア学派およびプリンストン大学のバルグマン等により完成された。
更に、プリンストン高等研究所のハリシューチャンドラは、一般の半単純リー群の表現論を完成した。

量子力学は「リー群の表現論」という新しい数学の分野を誕生させた。

ファインマン　Richard Philips Feynman 1918～1988

アメリカの理論物理学者。

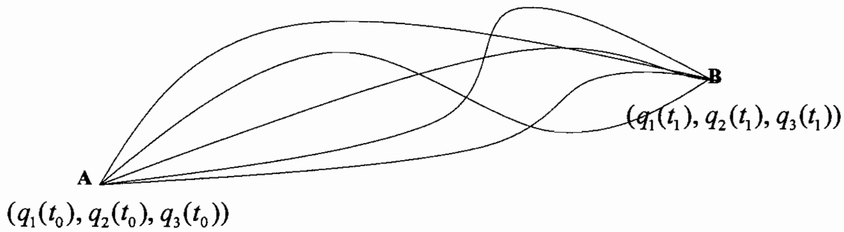
1942年にプリンストン大学で原子爆弾開発のためのマンハッタン計画に加わり、翌年からはニューメキシコ州のロス・アラモス研究所で終戦までその仕事をつづけた。

1965年にノーベル物理学賞を受賞した。

ファインマンは「素粒子が $\psi(t_0)$ の状態から $\psi(t_1)$ の状態に移る遷移確率は点 $(q_1(t_0), q_2(t_0), q_3(t_0))$ を始点とし、点 $(q_1(t_1), q_2(t_1), q_3(t_1))$ を終点とする経路全体の上で定義された測度によるハミルトン関数を用いた或る積分で与えられる」と主張した。

ファインマンは経路積分という独創的なアイディアにより量子力学の新しい研究方法を創ったが，数学的には未だ基礎付けがなされていない。現在多くの数学者により努力がなされているが，この基礎付けには新しい数学が必要と思われている。

ファインマン経路積分



Ω：A を始点とし，B を終点とする経路全体

$$\int_\Omega e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1}(\omega^*\alpha - Hdt)}\, d\mu(\omega)$$

α：カノニカルフォーム　　　H：ハミルトン関数

《ファデーエフの問題》
等質シンプレクティック多様体上の
ファインマン経路積分により
リー群の既約ユニタリ表現を構成せよ。

ファイマン経路積分は現在の数学における
積分の概念を超えた概念である。

物理学 ⟹ 新しい数学？

ファインマン経路積分の数学的な定式化には現存する数学を超える新しい数学が必要と考えられる。ニュートンがニュートン力学の定式化のために微分積分学を創設したように，ファインマン経路積分の定式化には新しい数学の創設が期待されている。

参考文献

(1) *The Borel-Weil theorem and the Feynman path integral*
International Colloqium at Tata Institute of Foundamental Research
Geometry and Analysis (1995) 275-297

(2) *The fundamental representation of the affine Lie algebra A(n-1)(1) and the Feynman path integral*
Hiroshima Math. J.
Vol. 26 No. 1 (1996) 209-221
(with K. Ogura, H. Kanno, Y. Togoshi and M. Hamada)

(3) *幾何学的量子化と経路積分*
数理科学（特集「量子化」）p45-p53
(1996年8月)

(4) *フーリエ解析の展望*（朝倉書店）
(1997年)

(5) *数学の勉強から研究へ*
数学のたのしみ（日本評論社）11, p7-p14
(1999年2月)