JÓZEF MARCHINKIEWICZ と二十世紀の実解析

猪狩　惺

1. はじめに

Józef Marchinkiewicz(1910-1940 ?) はごく限られた数学者を除いて，一般にはあまり知られた存在ではないようである．しかし，彼が 20 世紀の実解析の分野に与えた影響は計り知れないものがある．

Lebesgue 積分論の成立と相俟って，フーリエ解析は数学独自の一分野としての発展をする．1950 年代までの流れをあえて分類すると，関数論を有効に用いる方法—関数論的方法ということにする—による M. Riesz, G. H. Hardy, J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley に代表される研究，代数的な概念に基いた N. Wiener の研究の流れなどがある．一方，実解析の流れを汲んだ F. Riesz, ロシア学派，ポーランド学派などの研究がある．勿論，それぞれの研究者の手法は一つではなく，またがっているものが多い．これらの分類あてはめることに無理があるものもある．

Marchinkiewicz は A. Zygmund(1902-1992) の門下生であり，上記の分類でいうとポーランド学派に属している．研究内容は常にフーリエ級数論が底辺にあって，実関数論，関数の作用素，複素関数論，特に確率論に及んでいる．その手法はさまざまであるけれども，大部分は実解析の手法に基づいているといってよい．多くの論文は，非常に易しい導入に始まり，一見して計算も自然で奇抜さはみあたらない，しかも結果も最良か否か明確でないこともしばしばである．しかし，彼の視点はオリジナリテイに富み，アイデアは驚くほど豊富であり発展性を秘めたものであって，一連の研究は，新しいアイデアというより実関数論における一つの思想を生み出したというべきであると思う．

Zygmund は [Mar] のなかで彼の論文について，“fruitful new ideas with latent potentialities for further progress” を持っている述べている．

僅かな研究期間に行われた彼の研究，その後彼の師である Zygmund を中心にした研究，A. P. Calderón, E. M. Stein, C. Fefferman 等の研究，などによって，フーリエ解析，実解析における重要な流れを形成したといえる．20 世紀前半のフーリエ解析の集大成の一つである著書 [Zyg] における彼の業績の位置づけ，および，その後の調和解析の発展を記した Stein の大作 [Ste] の思想，または流れの多くが，Marchinkiewicz の研究，またはアイデアに遡ることができるということからも，Zygmund の 40 年前の言葉は正鵠を射たものであった．

2. MARCHINKIEWICZ の経歴など

Marchinkiewicz のアイデアがその大きさに比べて，一部の専門家を除いて，十分に早くから認識されなかったと思われる理由は，時代背景が大いに関係している．

Marchinkiewicz は 1910 年 3 月ポーランドの Cimoszka に生まれ，1930 年 Wilno にある Stefan Batory 大学に入学する．

1931/32 年 Zygmund から Fourier 解析の指導を受け，最初の論文を書く．A. Kolmogorov の発散する Fourier 級数に関する論文の簡素化である．

1935 年に同大学で Ph. D. をとる．

1935/36 年基金を得て Lwów の大学で過ごし，そこで S. Kaczmarz と J. Schauder と接触する機会に恵まれる．彼の直交級数論に対する興味は，Kaczmarz に接触することに拠るものと思われる．生涯に出版された論文 55 のうち 7 編 [10],[15],[20],[21],[26],[29],[39], は直交級数に関するものである．

Schauder との接点は，Zygmund によると，具体的には，Schauder が提出した問題が動機であったとされるフーリエ級数のマルチプライヤーに関する論文のみである．しかし，Schauder は彼の数学に強い影響を与え大きな利益をもたらした．1936 年以前に出版された論文を見ると，Marcinkiewicz はフーリエ級数の収束問題と関連して，関数の微係数の存在 [3],[9] や，関数の分解 [5], 共役関数，それはヒルベルト変換によって表現されるのであるが，に関係した研究 [7],[8] に取り組んでいた．

彼はそれらの中で関数の分解，集合の分解による実解析的な方法によって，さまざまな特異点，除外集合，さまざまな特異な核をもつ積分の解析を行っている．[9] においては多変数実関数の導関数を扱っており，彼が目指していたテーマによって，Schauder の影響を受ける素地が既にできていたのである．

彼の 1936 年以前のアイデアは，その後に多彩な発展をすることになるが，Schauder の影響とは無関係ではないであろう．そしてそれらが Calderón-Zygmund の特異積分の理論によって偏微分方程式に関係付けられていったのは自然な流れであったであろう．

1936 年 Wilno へ戻る．それから残された 3 年間に，彼は最も充実した研究生活を送ることになる．

1937 年 Wilno で講師 (docent) となる．

1939 年，再び奨学基金を得て，その春パリに向かった．丁度その時期に Poznán の大学から声がかかったが，それは新学期に発令されるべきポストであったため，実現に至らなかったようである．8 月にはいると，第二次大戦の危機が迫り，8 月のうちに周囲の反対を押し切って帰国してしまった．9 月 2 日に Zygmund は軍服姿の Marchinkiewicz を道上で偶然みかけたという．

2ヶ月後，彼は捕虜となった．移送中に数編の数学の原稿が両親に送られたが，両親の死によって紛失してしまった．

1940 年の春死去と推測される．

Marchinkiewicz が生きた時代のポーランド数学界の雰囲気をつたえるものとして，志賀浩二の好著 [志賀] がある．

3. MARCHINKIEWICZ の数学

Marchinkiewicz の主な仕事は，大きく分類すると，(1) 実関数論，(2) 三角級数，(3) 三角多項式による補間，(4) 関数の作用要素，(5) 直交級数，(6) 複素関数論，(7) 確率論，に分けられる．

以下，実関数論を中心に，三角級数論，関数の作用要素に関する彼の方法とその後の流れに注目して述べる．

3.1. 実関数論的方法. 論文第一号は大学 2 年目に書かれ，1933 年に出版されるが，1935 年までに出版された（うち一編は Ph. D. であって雑誌に印刷されたのは 1939 年である）最初の 7 編の論文は，すでにその後の発展の基礎をなしたアイデアが含まれており，今読んでもみずみずしい息吹を感じさせる．

P を直線上の有界閉集合とし，その下限と上限をそれぞれ a, b, $\lambda > 0$ とする．そのとき殆どすべての P の点 x に対して

$$\int_a^b \frac{\{\mathrm{dist}(y,P)\}^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}dy < \infty \tag{3.1}$$

である．$\lambda = 0$ に対する不等式は

$$\int_a^b \frac{\{|\log\ \mathrm{dist}(y,P)|\}^{-1}}{|x-y|}dy < \infty \tag{3.2}$$

である．

上記積分は今日では Marchinkiewicz 積分と呼ばれている．それを導入した動機は次のような問題である．

(1) フーリエ級数の収束条件.　論文 [5](1935) で「一変数周期関数 f が集合 E の各点 t である種の連続性 $t^{-1}\int_0^t |f(x+u)-f(x)|du = O(1/\log 1/|t|)$, をもつとする．そのとき，$f$ のフーリエ級数は E の殆どすべての点で収束する」という結果が示された．その証明の過程で少し違った形であるが??eqn:Mintlog) が導入された．

(2) 微分可能性の問題.　関数の微分可能性の問題がフーリエ級数の収束問題に関連して [8],[9](1936) で論ぜられた．その主たる定理の一つは，集合 E の各点 x_o で

$$\begin{aligned}&f(x_o+kh)+(-1)\binom{k}{1}f(x_o+(k-2)h)+(-1)^2\binom{k}{2}f(x_o+(k-4)h)+\cdots\\&+(-1)^k\binom{k}{k}f(x_o-kh)=O(h^k)\quad(h\to 0)\end{aligned}$$

が成り立つとする．そのとき，E の殆どすべての点で f は k 階微分可能である．

定理の証明で用いられた方法は，

$$f(x_o+h)=\sum_{j=0}^{k-1}a_j(x_o)\frac{h^j}{k!}+O(h^k),\quad x_0\in E \tag{3.3}$$

ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して

(i) 完全集合 P が存在して，$|E-P|<\varepsilon$,

(ii) 関数 g,h が存在して，$f(x)=g(x)+b(x)$,

ただし $g\in C^k$,　$|b(x)|\le \mathrm{const}(\mathrm{dist}(x,P))^k$ (x は集合 P に隣接する有限個の区間の点を除く)

というものである．大雑把に述べると，関数は一定の条件 (3.3) の下で，good part $g(x)$ と bad part $b(x)$ に分解される，bad part $b(x)$ は除外集合 $E-P$ のみで値をとり（とみてよい）それは $\lambda=k+1$ として積分 (3.1) で評価されるというものである．

1936 年までに出版されたこれらの論文で，Marchinkiewicz は，関数の分解と除外集合を組み合わせるという 1940 年代後半から実関数論で用いられる最も顕著な方法を確立している．

積分 (3.2) の原型ともいうべきものは A. S. Besicovitch [Bes](1926) に遡ることができる．また Hardy-Littlewood の極大関数の評価に際し，F. Riesz [RiF](1932) はある種の除外集合を構成している．

しかし，Marchinkiewicz の方法が決定的に重要であり，異なる点は，除外集合の分解と関数の分解の組み合わせであり，そこで用いられる方法は多変数関数の場合に移行可能であるという点である．彼が取り組んだ問題は三角級数の理論のなかで，現在でも最も精密で厄介な議論を必要とする収束問題と関連している．応用の多様性と議論の整理単純化は後世に受け継がれ，1950 年代以降の実解析のテーマとなった．

特筆すべき点は，彼の扱った問題はなんらかのかたちでヒルベルト変換

$$\bar{f}(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi>|y|>\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy$$

の評価に関連していることである．

Calderón-Zygmund の特異積分の理論で用いられる方法の原理は二つある．そのうちの一つは，上記の関数の分解を透明に整理すると同時に多変数関数に適用したものである．二つ目は Marchinkiewicz による作用素の補間であって，それについては 3.2 で述べる．

3.2. 三角級数論について． Marchinkiewicz の論文は常に，直接的にまたは何らかの形で，背景に三角級数の問題があって，フーリエ解析に直接，または間接的に大きな影響をあたえた．この項目では二つの注目すべき結果について述べるにとどめる．

3.2.1. マルチプライヤーについて．マルチプライヤーに関する論文 [40](1939) は Schauder によって提起された問題に関連していることは既に述べた．

f のフーリエ級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ に対して，マルチプライヤー $\{\lambda_n\}$ による変換を $T_\lambda(f)=$

$\sum \lambda_n c_n e^{inx}$ と定義する．この変換は平行移動不変な作用素と言い換えることができる，そしてフーリエ解析における基本をなす変換である．

Marchinkiewicz の L^p 空間における平行移動不変な作用素の有界性に関する結果は，最初の自明でない，しかもそれ以後得られたこの種の定理の，著者の知る限り，最良の結果である．

彼の定理は次のようなものである：空間 $L^p(-\pi,\pi)$ 上の作用素 T_λ が有界であるために，マルチプライヤー $\{\lambda_n\}$ が満たすべき一つの十分条件は

$$\sum_{2^k > |n| \geq 2^{k-1}} |\lambda_n - \lambda_{n-1}| \leq \text{const} \quad k = 1, 2, \ldots$$

である．但し，$p = 1$ の場合と自明な場合 $p = 2$ は除いておく．

定理を詳しく述べることは省略するが，この結果は多変数フーリエ級数の場合に拡張されている．その適用範囲は広く，後に，フーリエ変換に対して，S. G. Michilin [Mi1](1956), L. Hörmander (1960) 等が同様な条件を与えているけれども，彼の結果を超えるものではない．

特別な場合をフーリエ変換の言葉で述べると次のようになる．$L^p(\mathbf{R}^n)$, $p > 1$, 上の写像，

$$f \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\xi_j}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{1/2}}\right]\mathcal{F}f, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

は有界である．Zygmund は原論文で述べられているフーリエ級数タイプの定理について，Schauder が提起した問題と書いている．しかし，が恐らく，上のようなフーリエ変換の形であったと思われる．

3.2.2. *Wiener-Lévy*の定理に関連して．A を絶対収束するフーリエ級数をもつ関数 $f(x) = \sum c_n e^{inx}$,
$\sum |c_n| < \infty$，の空間とする．Wiener-Lévy の定理によると，もし φ は f の値域を含む領域で解析的ならば，$\varphi(f)$ も A に属する．

Marchinkiewicz は彼の最後に近い論文 [52] の中で，上記定理の精密化を試みている．そのプロセスは極めて示唆に富むものであって，f のノルムを $A(f) = \sum |c_n|$ と定義するとき，ノルム

$$A(e^{iaf}) \quad (a \text{ は実数，} f \text{ は実数値})$$

の評価を試みている．

この短いさりげない論文の重要性が，後に J.-P. Kahane によって再認識され, 可換群代数の二つのテーマに昇華した．

(1) 作用関数の決定問題,

(2) Wiener 代数におけるスペクトル合成問題,

である．$A(e^{iaf})$ の完全な評価は Kahane によって得られ，それぞれ Y. Katsnelson，P. Malliavin による (1), (2) の解決を促した．

それらの理論については，W. Rudin の著書 [Ru1] に詳しく述べられている．

3.3. **作用素について．** 作用素に関する最も重要でかつ興味がある論文は [44](1939) である．それは，Marcinkiewicz が投稿した最後の論文であり，わずか 2 ページであって要旨しか述べられていない．証明の要点は Zygmund に宛てられた手紙にあり，詳しい証明は，後に Zygmund [Zy2](1956) によって付けられた．

この論文ほど，実関数論，フーリエ解析に大きな影響を与えた論文を知らない．Calderón-Zygmund の特異積分論は，§3.1 で述べたように Marchinkiewicz の共役関数に関する関数の分解と除外集合のアイデアを多変数に置き換え，さらに，この論文で示された作用素の補間定理によって実現された．それは編微分方程式論を推し進める強い力の一つとなった．

T は測度空間 (M,μ) 上の単関数を測度空間 (N,ν) 上の可測関数への写像であって，

$$|T(f+g)(x)| \leq \mathrm{const}(|T(f)(x)| + |T(g)(x)|) \ \text{a.e.} \tag{3.4}$$

を満たすとする．

$1 \leq p,q < \infty$ とする．

$$\lambda[\nu(\{x : |T(f)(x)| > \lambda\})]^{1/q} \leq \mathrm{const}\|f\|_{p,\mu}, \quad \lambda > 0, \tag{3.5}$$

を満たすとき，T は弱 (p,q) 型であるという．$p = q = \infty$ のときは，極限として定義する．ここで $\|f\|_{p,\mu} = (\int_M |f(x)|d\mu(x))^{1/p}$ である．

定理．作用素 T は条件 (3.4) を満たし，$1 \leq p_j, q_j \leq \infty$，$p_j \leq q_j\,(j = 0,1)$, $p_o < p_1$，とする．もし，T が弱 (p_j,q_j) 型, $j = 0,1,$ ならば，写像

$$T : L^{p_\theta}(\mu) \mapsto L^{q_\theta}(\nu)$$

は有界である，ただし，$1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$，$1/q_\theta = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$ $(0 < \theta < 1)$ である．

作用素列に関する論文はこれ以前にもあるが，この論文の出現はいささか唐突に思える．わずか数ヶ月のパリ留学，そして突然の帰国，入隊というあわただしい状況のもとで証明のスケッチを手紙に記す余裕しかなかった．論文要旨の余白は Zygmund と彼の弟子の仕事から想像するばかりである．

この定理の背景について想像をたくましくしてみることにする．

弱型の不等式は，Chebyshev の名で知られているが，弱型の作用素という概念をとりあげたのは著者の知る限り Marchinkiewicz にはじまる．

彼の最初の論文が A. Kolmogorov の定理 (1923,26) の証明の改良であった．その後 kolmogorov [Ko1] (1925) は共役関数 $\tilde{f}$ が弱 (1,1) 型の作用素である，すなわち

$$|\{x \in (-\pi,\pi) : |\tilde{f}(x)| > a\}| \leq \frac{\mathrm{const}}{a}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx \quad (a > 0) \tag{3.6}$$

であることを証明している．この不等式がモデルとなったのではないかと思う．(Kolmogorov は，その証明にあたり確率の手法を用いており，Marchinkiewicz に強いインパクトを与えたと想像される．実際，以降に確率論に関連した論文 [16],[19],[22],[23],[24],[25],[27],[35],[41],[47],[49] を書いている.)

もう一つの動機が M. Riesz の作用素の補間定理であることは明かである．

今日では，弱有界性とある種の関数列の収束性は本質的に係っていることが知られている．また，Riesz が作用素の補間定理を得たのは，フーリエ級数の部分和が一様有界であること（今日では共役関数の有界性と同値であることがわかっている）を示すのが目的であったと言われている．

§3.1 実関数論的方法で述べた関数の分解定理は，ヒルベルト変換（共役関数）のみならず，多変数関数の特異積分の評価に適用されることが Calderón-Zygmund によって明らかにされ，それによって特異積分は弱 $(1,1)$ 型であることが示された．

極論すれば，弱型の作用素という概念によって，1950 年代以後の実解析，フーリエ解析は格段の進展をみることになった．

作用素が弱型であることから，強有界性を導く Marchinkiewicz の補間定理によって，フーリエ解析に現れる種々の作用素の L^p 有界性が示されることになった．多変数解析における L^p 有界性が本質的に重要であることが再確認されたのは比較的近年のことである．

4. J. Marcinkiewicz の論文リスト

[1] A new proof of a theorem on Fourier series, J. London Math. Soc. **8** (1933), 179.

[2] On a class of functions and their Fourier series, C. R. Soc. Sci. Varsovie **26** (1934), 71-77.

[3] Sur les nombres dérivés, Fund. Math. **24** (1935), 305-308.

[4] Wielomiany interpolacyjne funkcji bezwzglednie ciqglych, (Polynômes d'interpolation des fonctions absolument continues), Wiadomośsci Matematyczne **39** (1939), 85-125.

[5] On the converergence of Fourier series, J. London Math. Soc. **10** (1935), 264-268.

[6] On Riemann's two methods of summation, J. London Math. Soc. **10** (1935), 268-272.

[7] J. Marcinkiewicz, B. Jessen and A. Zygmund, Note on the differentiabity of multiple integrals, Fund. Math. **25** (1935), 217-234.

[8] Sur les séries de Fourier, Fund. Math. **27** (1936), 38-69.

[9] — and A. Zygmund, On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series, Fund. Math. **26** (1936), 1-43.

[10] Sur la convergence des séries orthogonales, Studia Math. **6** (1938), 39-45.

[11] Sur l'interpolation, I, Studia Math. **6** (1936), 1-17.

[12] Sur l'interpolation, II, Studia Math. **6** (1936), 67-81.

[13] Quelques remarques sur l'interpolation, Acta Litt. Sci. Szeged **8** (1936/37), 127-130.

[14] Sur la divergence des des polymomes d'interpolation, Acta Litt. Sci. Szeged **8** (1936/37), 131-135.

[15] — and A. Zygmund, Some theorems on orthogonal systems, Fund. Math. **28** (1937), 309-335.

[16] — et A. Zygmund, Sur les fonctions indépendentes, Fund. Math. **29** (1937), 60-90.

[17] — and A. Zygmund, Mean values of trigonometrical polynomials, Fund. Math. **28** (1937), 131-166.

[18] — and A. Zygmund, Two theorems on trigomometrical series, Math. Moscou (Mat. Sbornik) **2** (44) (1937), 733-737.

[19] — et A. Zygmund, Remarques sur la loi de logarithms itéré, Fund. Math. **29** (1937), 215-222.

[20] Quelques théorèmes sur les séries orthogonales, Ann. Soc. Polon. Math. **16** (1937), 84-98.

[21] O sumowalności szeregów ortogonalnych (Sur la sommabilité des série orthogonales), Wiadom. Mat. 44 (1938), 5-16.

[22] Sur les fonctions indépendentes I, Fund. Math. **30** (1938), 202-214.

[23] Sur les fonctions indépendentes II, Fund. Math. **30** (1938), 349-364.

[24] Sur les suites d'opération lineáres, Studia Math. **7** (1938), 52-72.

[25] — et A. Zygmund, Quelques théorèmes sur les fonctions indépendentes, Studia Math. **7** (1938), 104-120.

[26] — et Kaczmarz, Sur les multiplicateurs des séries orthogonales, Stuaia Math. **7** (1938), 73-81.

[27] Sur les fonctions indépendentes III, Fund. Math. **31** (1938), 86-102.

[28] Quelques théorèmes sur les séries et les fonctions, Bull. Sémin. Math. Univ. Wilno I (1938), 19-24.

[29] Quelques théorèmes sur les séries orthogonales lacunaires, Ann. Soc. Polon. Math. **17** (1938), 51-58.

[30] — and A. Zygmund, Proof of a gap theorem, Duke Math. J. 4 (1938), 469-472.

[31] — and A. Zygmund, A theorem of Lusin, Duke Math. J. 4 (1938), 473-485.

[32] Sur quelques intégrales du type de Dini, Ann. Soc. Polon. Math. **17** (1938), 42-80.

[33] Une théorème sur l'interpolation, Mathematica, Cluj **14** (1938), 36-88.

[34] — et A. Zygmund, Sur les séries de puissances, Mathematica, Cluj **14** (1938), 21-30.

[35] Sur une propriété de la loi de Gauss, Math. Z. 44 (1939), 812-818.

[36] Une remarque sur les espaces de M. Besicowitch, C. R. Acad. Sci. Paris **208** (1939),157-159.

[37] Sur le problème de moments, C. R. Acad.. Sci. Paris **208** (1939), 405-407.

[38] Sur la sommabilité H_k des séries de Fourier, C. R. Acad. Sci. Paris **208** (1939), 782-784.

[39] Sur les séries orthogonales, Studia Math. **8** (1939), 1-27.

[40] Sur les multipticateurs des séries de Fourier, Studia Math. **8** (1939), 78-91.

[41] Sur une propriété de mouvement brownien, Acta Litt. Sci. Szeged **9** (1938-40), 77-87.

[42] — et S. Bergman, Sur les valeurs limites des fonctions de deux variables complexes, C. R. Acad. Sci. Paris **208** (1939), 877-879.

[43] Sur une méthode remarquable de sommation des séries de Fourier, Ann. Scuola norm.

super. Pisa, II. s. **8** (1939), 149-160.
[44] Sur l'interpolation d'opérations, C. R. Acad. Sci. Paris **208** (1939), 1272-1273.
[45] — et A. Zyground, Quelques inégalités pour les opérations linéaires, Fund. Math. **32** (1939), 115-121.
[46] — and A. Zygmund, On the summability of double Fourier series, Fund. Math. **32** (1939), 122-132.
[47] Sur les variables aléatoires enroulées, C. R. Soc. Math. France, année 1938 (1939), 34-36.
[48] Sur la sommalitité forte de séries de Fourier, J. London Math. Soc. **14** (1939), 162-168.
[49] Quelques théorèmes de la théorie des probabilités, Bull. Sém. Math. Univ. Wilno **2** (1939), 22-34.
[50] Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier, Ann. Scuola norm. super. Pisa, **II** (1939), 239-240.
[51] — et A. Zygmund, Sur la derivée seconde géneralisée, Bull. Sem. Math. Univ. Wilno **2** (1939), 35-40.
[52] Sur la convergence absolue les séries de Fourier, Mathematica Cluj **16** (1940), 86-73.
[53] — el E. Salem, Sur les sommes riemanniennes, Compositio Math. **7** (1940), 376-389.
[54] — et A. Zygmund, On the behavior of trigomometric series and power series, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 407-453.
[55] — et S. Bergman, Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes, J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. **21** (1942), 125-141, and Fund. Math. **33** (1945), 75-94.

5. 参考文献

[Be1] A. S. Besicovitch, On a general metric property of summable functions, J. London Math. Soc. 1(1926), 120-128.
[Hö1] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators, Acta Math. **104** (1960), 93-140.
[Kh1] J.-P. Kahane, Sur un théorème de Wiener-Lévy, C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), 1949-1951.
[Kz1] Y. Katznelson, Sur les fonctions opérent sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes, C. R. Acad. Sci. Paris **247** (1958), 404-406.
[Ko1] A. Kolmogorov, Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, Fund. Math. **7**(1925), 23-28.
[Ma1] P.Malliavin, Sur l'imposibilité de la syntèse spectrale sur la droite, C. R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), 2155-2157.
[Mar] J. Marchinkiewicz, Collected Paper, edited by A. Zygmund, Inst. Mat. Polskiej Akad. Nauk, Warszawa, 1964.
[Mi1] S. G. Michlin, On the multipliers of Fourier integrals, Dokl. Akad. Nauk **109** (1956), 701-703.

[RF1] F. Riesz, Sur un théorème de M. M. Hardy-Littlewood, J. London Math. Soc. **7**(1932), 10-13.

[RM1] M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires, Acta Math. **49** (1926), 465-497.

[Ru1] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience (1962).

[志賀] 志賀浩二，無限からの光芒ーポーランド学派の数学者たち，日本評論社,1988.

[St1] E. M. Stein, Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, 1994.

[Zy1] A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

[Zy2] —, On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operators, J. de Math. **35**(1956), 223-248.