群の表現の指標について（経験よりの管見）

平井　武 (Kyoto)
thirai@ip.media.kyoto-u.ac.jp

1．はじめに.

今回はじめて，この数学史シンポジュウムに参加させていただいたが，杉浦先生からのお誘いの際には，私には特定のテーマがあったわけではない．そこで，先生にお聞きすると,「テーマは何でも良いが，網羅的な話ではなく，焦点を絞って・・・」との示唆を頂いた．そこで先ず考えたのが，ずいぶん前にストラスブールで購入した古本で，フランスの革命政府が度量衡の改革に関して出した法律・政令を集めて，革命暦６年に出版した本：

Recueil des Lois, Instructions, Tables et Tableaux
relatifs aux nouveaux poids et mesures, et au calcul décimal,

を一度ちゃんと調べてみたいと思っていたので，それはどうかなと第１案にした．次ページにこの本の「目次」をコピーしておいたので参照しいて欲しいが，この法令政令集の中には，新制度普及のための法令等の他に，私が興味を引かれる部分が多々あったのである．それは，少数計算（*le calcul décimal*）について筆算のやり方を具体的に示したり，地方や時代によって異なっている重さ，長さ，広さなどの換算の仕方を示し，換算の比率を計算尺の形にしたもの（*Echelle*）や表（*Table, Tableau*）を付加してその使い方を説明したり，面白そうだなあと思っていたのである．

しかし，少し調べてみると意外に切り口が難しいこと（例えば，社会制度，庶民の民度，算術に関する教育程度，革命的新制度を庶民に普及させる方法，などの観点から社会学的に見るのが最も面白そうである），また，この素材をごく単純に切ってしまえば，単なる簡単な算術（教育）の話になってしまう．各法令は結構長いものが多く，全訳してお目に掛ければ面白いのだが，それも（当時の社会背景を背負った上での）用語・訳語の選択など結構難しい．それでともかくこの第１案はボツにした．

2．有限群の既約指標.

第２案として，有限群の既約指標，とくに対称群のそれ，について焦点をを絞ってレビューすることを考えた．J. Shcur の「有限群の射影表現」

RECUEIL
DES
LOIS, INSTRUCTIONS,
TABLES ET TABLEAUX
RELATIFS
AUX NOUVEAUX POIDS ET MESURES
ET AU CALCUL DÉCIMAL,

PUBLIÉS PAR ORDRE DU GOUVERNEMENT

Et imprimés à l'Imprimerie de la République.

Se trouve A PARIS,

Chez RONDONNEAU, au Dépôt des Lois, place du Carrousel;

AN VI.

ÉTAT
DES LOIS, INSTRUCTIONS,
TABLES ET TABLEAUX
FORMANT LE RECUEIL.

INSTRUCTION sur les poids et mesures républicaines, déduites de la grandeur de la terre, uniformes pour toute la République, et sur les calculs relatifs à leur division décimale, par la Commission temporaire des poids et mesures.

Avis sur les corrections de nomenclature à faire dans l'instruction, en conséquence de la loi du 18 germinal an III.

Rapport sur les moyens préparés pour établir l'uniformité des poids et mesures dans la République, et pour substituer prochainement le mètre à l'aune dans le département de Paris. — Sur le mode à déterminer pour le remplacement successif des anciennes mesures dans toute la France; enfin sur les réglemens à promulguer à ce sujet, suivi d'un projet de décret, lu à la séance du 25 fructidor an III, par Prieur (de la Côte-d'Or.)

Loi du 18 germinal an 3.e, relative aux poids et mesures.

Loi du 1.er vendémiaire an 4.e, relative aux poids et mesures.

Notions élémentaires sur le nouveau système des mesures, par l'Agence temporaire des poids et mesures.

Tables de comparaison entre les mesures anciennes, et celles qui les remplacent dans le nouveau système métrique, avec leur explication et leur usage.

Table pour convertir les sous et deniers en décimes et centimes.

Vocabulaire de mesures républicaines, contenant l'indication de leurs valeurs et de leurs principaux usages, en conformité de la loi du 18 germinal an III.

a ij

Instruction sur les nouveaux poids et sur l'usage des échelles qui présentent leurs rapports avec les poids de marc.

Echelles jointes à cette explication.

Explication et usage des échelles de comparaison entre les mesures agraires et itinéraires, et celles qui les remplacent dans le nouveau système.

Echelles jointes à cette explication.

Explication et usage des échelles pour la comparaison des toises pieds, pouces de Paris, avec les mètres et parties décimales; publiée par l'Agence temporaire.

Echelles jointes à cette explication.

Instruction sur le calcul décimal appliqué principalement au nouveau système des poids et mesures, à l'usage de ceux qui savent les quatre premières règles, par C. A. Prieur, Représentant du peuple.

Tableau pour réduire les nouvelles mesures en anciennes, rédigé par l'Agence temporaire des poids et mesures.

Tableau pour réduire les anciennes mesures en nouvelles, rédigé par l'Agence temporaire des poids et mesures.

Table pour convertir les nouveaux poids en poids de marc, publiée par le bureau des poids et mesures.

Table pour convertir les poids de marc en nouveaux poids, publiée par le bureau des poids et mesures.

Table pour savoir combien tant de millièmes de fin, d'or ou d'alliage font de grains par marc, et réciproquement.

Tableau des nouvelles mesures républicaines, contenant le nouveau système métrique de leur nomenclature, et leurs rapports avec les anciennes.

Echelles graphiques pour la comparaison de l'aune de Paris avec le mètre.

Instruction sur les nouvelles mesures pour les terrains, à l'usage des notaires, arpenteurs, gens d'affaires, etc.

図版1

に関する有名な三部作 [Sch1] ～ [Sch3] についてレポートすることを考えてみた．私自身が無限次元対称群の既約表現の構成や，指標（この場合の指標は，II_1 型因子表現の指標のこと，[Th], [Di] 参照）について研究しているので，その関連で歴史を具体的に振り返ってみたい，ということである．しかし，時間の関係で完全な準備が出来そうもなかった．

そこで，第３案として，手慣れたところで準備が出来そうな，局所コンパクト群，とくにリー群の無限次元表現の指標理論について，管見としてまとめることにした．

ここでは，将来，ちゃんとやる，という目標のもとに，とりあえずはボツにした第２案の場合について，前段階として少々述べておこう．

[Sch1] では有限群の射影表現の一般論が論じられていて，次のような結果を出している．

（１） 有限群 $\mathfrak{H}$ の射影表現は，$\mathfrak{H}$ の特別の中心拡大である**表現群** $\mathfrak{G}$ の線形表現と同等である．

（２） $\mathfrak{G}$（より詳しくは，$(\mathfrak{G},\varphi)$）が $\mathfrak{H}$ の表現群であるとは，$\mathfrak{H}$ の中心拡大

$$1 \longrightarrow \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{G} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{H} \longrightarrow 1,$$

であって，$[\mathfrak{G},\mathfrak{G}] \supset \mathfrak{A}$ となるもののうちの最小位数のもの．

（と書いてあるが，これでちゃんと特徴付けられているのかどうか私には分からない．$\mathfrak{A}=\{\,e\,\}, \mathfrak{G}=\mathfrak{H}$, は，普通は排除されている筈だが）．別の定義では，“$\mathfrak{H}$ の表現群とは，$\mathfrak{H}$ のすべての射影表現を線形化するに足る最小位数の群.”

（３） $\mathfrak{H}$ の表現群 $\mathfrak{G}$ は有限位数であり互いに同型でないものは有限個あるが，可換群 $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{H}$ から一意的に決まる（$\mathfrak{H}$ の *multiplier* と呼ばれる）．

1907 年の論文 [Sch2] では，具体的な有限群について，その表現群が決定されている．$\mathfrak{H}$ としては，可換群，２面体群（dihedral groups），SL(2, $\boldsymbol{F}_{p^n}$), PSL(2, $\boldsymbol{F}_{p^n}$), GL(2, $\boldsymbol{F}_{p^n}$), PGL(2, $\boldsymbol{F}_{p^n}$), が取り扱われている．最後の章（§6）では，PSL(2), SL(2), PGL(2), たちの線形または射影表現が同時に扱われていて，既約指標が決定されている．

1911 年の長編の論文 [Sch3] では，まず，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ および n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ の表現群が決定されている．$n \geq 4$ に対してそれぞれ，生成元系 $\{\,J, T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}\,\}$, $\{\,J, T'_1, T'_2, \ldots, T'_{n-1}\,\}$, を持ち，次の基本関係式 (1),

(2) を持つ群を $\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ と書く（E は単位元）:

$$J^2 = E,\ (T_\alpha)^2 = J, \quad (T_\beta T_{\beta+1})^3 = J,\ T_\gamma T_\delta = JT_\delta T_\gamma\ ; \tag{1}$$

$$J^2 = E,\ (T'_\alpha)^2 = E, \quad (T'_\beta T'_{\beta+1})^3 = E,\ T'_\gamma T'_\delta = JT'_\delta T'_\gamma,\ JT'_\alpha = T'_\alpha J\ ; \tag{2}$$

$$(1 \le \alpha \le n-1,\ 1 \le \beta \le n-2,\ \gamma < \delta - 1).$$

すると，$n \ge 4, n \ne 6$ で $\mathfrak{S}_n$ の表現群は $\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ の 2 つであり，$n = 6$ では $\mathfrak{T}_6 \cong \mathfrak{T}'_6$（抽象群としての同型？）の 1 つである．このとき，

$$\mathfrak{A} = \{\, E, J \,\}; \quad \varphi : T_\alpha \mapsto s_\alpha = (\alpha\ \ \alpha{+}1),\ \text{または},\ T'_\alpha \mapsto s_\alpha.$$

n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ については，$n \ge 4$ のとき，表現群は 1 つである．その位数は，$n \ne 6, 7$ のとき $2 \cdot (n!/2)$ であり，表現群 $\mathfrak{B}_n$ は $\mathfrak{S}_n$ の表現群 $\mathfrak{T}_n$ を $\mathfrak{A}_n$ に制限したものである：

$$\mathfrak{B}_n = \langle\, T_\alpha T_\beta\ ;\ \alpha \ne \beta \,\rangle\ (\text{生成}).$$

$n = 6, 7$ のときは，表現群の位数は，$6 \cdot (n!/2)$ である．詳細は省略する．

そのあと，この論文の主要部では，$\mathfrak{S}_n$ および $\mathfrak{A}_n$ のすべての射影表現が決定されている．そしてその結果を用いて，これらの群の既約指標がすべて求められている．これはフロベニウス（F.G. Frobenius, 1849-1917）などの $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n$ に対する結果をも踏まえての集大成である．

今後への私の数学史的問題意識は例えば次のようなものである．

（イ）$\mathfrak{S}_n$ の既約指標の決定と，表現群 $\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ の既約指標の決定とはどのように絡み合っているのか？

（ロ）$\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ の既約指標はどのようにして求められ，どこまで具体的に書き下されているか？

ちなみに，シュアー（1875-1941）は，ドイツから米国に流出したのであるが，ドイツ時代，上記の三部作 [Sch1] ～ [Sch3] を込めて，この時期の論文では，Von Herrn J. Schur in Berlin, となっている．しかし，彼の全集ではその first name は Issai となっていて，上のような論文の著者名のところは抹消されている．このことについて，Heidelberg 大学の Heyer 教授に聞いてみたところ,「最も可能性の高いのは，彼がロシアで生まれたときの（ユダヤ系の）名前が Jesse だったのではないか．実際，Jesse は 1 個の s の Isai に対応するギリシャ語であり，またキリスト教聖書においては Jesse は David（ = Jesaja ）の父である」

3. 無限次元表現の指標.

群 G の表現が無限次元になると，$G \ni g \mapsto T(g)$，と $g \in G$ に対応する表現作用素 $T(g)$ について，その跡 $\mathrm{tr}(T(g))$ をとるのが難しくなってくる.

そこで，G として，1947 年の [GeNi1] では $SL(2, \boldsymbol{C})$ をとり，その後の [GeNi2] では $\boldsymbol{C}$ 上の古典型の群 $SL(n, \boldsymbol{C}), SO(n, \boldsymbol{C}), Sp(2n, \boldsymbol{C})$, をとって，その（縮退した）主系列または補系列表現について，線形汎函数

$$C_c^\infty(G) \ni f \longmapsto \mathrm{tr}\,(T(f)) \in \boldsymbol{C}, \quad T(f) := \int_G T(g) f(g)\, dg,$$

を具体的に計算した．ここに，dg は G 上の両側不変測度である（G が半単純なので，片側不変 Haar 測度は必ず両側不変になる）．そして，実際にそれが，G 上の局所可積分函数で書けるシュワルツ超函数になっていることを示した.

これらの論文や本では，行列群を取り扱っているので，行列での具体的な計算がなかなか面白い．例えば，極大コンパクト部分群 K の具体形，岩沢分解や類似の分解，$G = KAK$ の分解，G 上の Haar 測度や均質空間上の（準）不変測度の各種の座標による表示，などなど.

他方，[Go] では，$\mathcal{B} := C_c^\infty(G)$ を convolution

$$f_1 * f_2(g) := \int_G f_1(gh^{-1})\, f_2(h)\, d_r h \qquad (f_1, f_2 \in \mathcal{B}),$$

を積として持つ環（代数，algebra）と捉えると，$f \mapsto T(f)$ はその表現となる．ここで，$d_r h$ は，G 上の右 Haar 測度を表す.

この事情を一般化した形で，Godemant は，環とその表現を基本として，指標（caractère）の理論を作った．しかし，この理論は一般的すぎて，その後あまり追随者が出てこなかった.

そのご，群 G をもっと特定して指標の理論を深めよう，という形になった．ここでは，主として半単純リー群の場合に力点を置いて大体 1965 年ころ迄の状況を見よう．そのほかに，巾零リー群の場合 [Di1] や，離散無限群とくに無限対称群の場合 [Th] などを覗いてみる．そのために，共通の足場として，作用素環論における因子環の理論における指標を見てみよう.

4. 作用素環論における指標と群表現の指標.

群 G の表現 $(T(g), V)$ があったとき，表現空間 V 上の作用素のなす環（algebra）$\mathcal{A}(T) := \langle\, T(g)\,;\ g \in G \,\rangle$ が‘生成’される．V がヒルベルト空

間で，T がユニタリ表現のときには，‘生成’の意味を weakly generated の意味にとる．作用素の集合 $\mathcal{D}$ の commutant を

$$\mathcal{D}' := \{ B \,;\, V \text{ 上の連続線形作用素}, BD = DB \ \ (\forall D \in \mathcal{D}) \}$$

とおくと，このときは $\mathcal{A}(T)$ は次のように書ける：

$$\mathcal{A}(T) := \{ T(g) \,;\, g \in G \}'' \quad \text{(double commutant)}.$$

ユニタリ表現 T に対して，作用素環 $\mathcal{A}(T)$ は weakly closed で，共役作用 $B \mapsto B^*$ に対して閉じている．こうした環を von Neumann 環という．

フォンノイマン環 $\mathcal{A}$ が因子環（factor）であるとは，$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \boldsymbol{C} \cdot I$，$I$ は恒等作用素，となるときである．因子環は，I_n $(n \in \boldsymbol{N})$, I_∞, II_1, II_∞, III 型に分類される（[Di2] 参照）．ユニタリ表現 T に対し $\mathcal{A}(T)$ が I 型因子環になることは，T が既約であることと同値である．I 型では trace: $\mathcal{A} \ni B \mapsto \mathrm{tr}(B) \in \boldsymbol{C}$, が十分な定義域をもって定義できる．($\mathrm{I}_\infty$ 型のときの定義域としては，正定値な作用素の全体，または trace class の作用素の全体）．

II_1 型のときも，$\mathcal{A}$ のある部分空間上の線形汎函数 f で，

$$f(x^*) = \overline{f(x)} \text{ (Hermitian)}, \quad f(xy) = f(yx) \text{ (不変)}, \quad f(xx^*) \geq 0 \text{ (正定値)},$$

となるものを**不変正定値汎函数**といい，そのうち，$f(\mathbf{1}) = 1$ と正規化された extremal (indecomposable) なものを**指標**と呼ぶ．ユニタリ表現 T で $\mathcal{A}(T)$ が II_1 型因子環になるようなものは，既約表現に次いで基本的な表現である．こうした因子表現の研究が重要になってくる群としては，次のようなものが挙げられる：

(I) 離散無限群のうちの，無限対称群 $\mathfrak{S}_\infty$ とか，無限ワイル群としての，$\mathrm{B}_\infty/\mathrm{C}_\infty$ 型の W_{B_∞}, D_∞ 型の W_{D_∞},

(II) リー群のうちの可解リー群，可解部分を含む一般のリー群．

5．無限離散群の II_1 型表現の指標．

無限対称群 $\mathfrak{S}_\infty$ や上記の無限ワイル群では，正則表現自身が II_1 型因子表現である．$\mathfrak{S}_\infty$ に対しては，すべての因子表現の指標ははやく [Th] によって決定されている．そのご，有限体上の $\mathrm{SL}(\infty, \boldsymbol{F}_q)$ に対しても指標に関する結果が発表されたが，私自身はその論文はどうも読み切れない．

最近，私自身は，無限ワイル群 W_{B_∞}, W_{D_∞}, について，然るべきパラメーターに依存して決まる指標のなす大きな族を得たが，「これですべての指標

が尽くされている」という完全性の証明がまだである．

６．連結半単純リー群の既約表現の指標の一般論．

先に述べたように，各個撃破的に既約表現の指標が計算されていた時代を経て，一般論が最初に顔を出したのは，[Ha1] であろう．

６．１． 論文 [Ha1] では，連結半単純リー群 G の，ヒルベルト空間上の（ユニタリとは限らない）既約表現 (T, V) に対して，指標がシュワルツ超函数の意味で定義できることを示した．すなわち，$f \in C_c^\infty(G)$ をとると，$T(f)$ はいわゆる trace class になり，汎函数

$$\pi_T \ : \ C_c^\infty(G) \ni f \longmapsto \mathrm{tr}(T(f)) \in \boldsymbol{C},$$

が**連続になる**，ということである．

このことのよって来る所は，K を G の極大コンパクト部分群とすると，制限 $T\big|_K$ における次のような重複度（K-multiplicity）の評価である．K の各既約表現 $\omega \in \widehat{K}$ に対して，$d(\omega)$ をその次元，$V(\omega)$ を V の元で K のもとで表現 ω に従って変換されるものの全体，とすると，

$$\dim V(\omega) \le M \cdot (\dim \omega)^2 \qquad (\forall \omega \in \widehat{K}),$$

ここに，M は ω によらない定数である（のちに，$M = 1$ と取れることが分かった）．ここに，$\widehat{K}$ はすべての既約表現の同値類の集合で K の双対（dual）と呼ばれる．この重複度評価は，

（１）いわゆる subquotient theorem，および，

（２）G の主系列表現が $L^2(K)$ の部分空間の上に実現出来ること，

を認めれば，$L^2(K)$ における重複度の評価（ペーター - ワイルの定理の系）から直接出てくる．

６．２． つぎのステップとして，[Ha2] では，G の既約指標は，ある低次元部分集合を除いた G の開部分集合の上では，Haar 測度に関して局所可積分な（さらに実解析的でもある）函数と一致することが示された．

この開部分集合 $G'(R)$ を正確に与えるためには，カルタン部分群，そこにおけるルートや実ルート，などの概念が必要である．しかし，少し小さな開集合 $G' \subset G'(R)$ は，正則元からなるものとして次のように与えられる．

$$\mathrm{Ad} \ : \ G \ni g \longmapsto \mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0), \ \ \mathfrak{g}_0 := \mathrm{Lie}(G),$$

を G の共役表現（adjoint representation）とする．写像 $I-\mathrm{Ad}(g)$ の rank が最大（$=\dim G-\mathrm{rank}\,G$）になっている $g\in G$ を**正則元**と呼び，その全体を G' と書くと，それは開部分集合であって，$G\setminus G'$ は低次元である．

ここでの証明の要点になっているのは，

（1） 既約指標 π_T は G 上の不変固有超函数である．不変というのは，

$$\pi_T(g_0 g {g_0}^{-1})=\pi_T(g) \quad (g,g_0\in G).$$

さらに，固有超函数とは，G 上のすべての Casimir 作用素の同時固有超函数になっていること：

$$Z\,\pi_T=\chi(Z)\,\pi_T \quad (\forall Z\in\mathfrak{z}).$$

ここに，$\chi(Z)$ は Z に対応する固有値であり，$\mathfrak{z}$ は，複素化したリー環 $\mathfrak{g}=(\mathfrak{g}_0)_C$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の中心である．$\mathfrak{z}$ の各元は Casimir 作用素と呼ばれ，G 上の両側不変微分作用素を与える．

（2） Casimir 作用素 Z の radial part $\phi(Z)$ は，本質的には，各カルタン部分群 H の上で決まり，$\Delta(h)\cdot\Box_Z\cdot\Delta(h)^{-1}$，の形をしている．ここで，$\Box_Z$ は（H ごとに決まる）H 上の定数係数微分作用素であり，$\Delta(h)$ は $H\cap G'(R)$ 上で $\neq 0$ となる実解析函数である．Casimir 作用素のうちの 2 階の基本的な元である Laplace-Bertrami 作用素 L をとったとき，$\Box_L$ は $\mathfrak{h}=(\mathfrak{h}_0)_C$（ただし，$\mathfrak{h}_0=\mathrm{Lie}(H)$）の上の 2 次形式を用いて簡単に書き下せる．

（3） 2 階の定係数微分作用素 $\Box_L$ の固有超函数が現れてきているので，偏微分方程式論からの借用として，$\Box_L$ に対する準楕円性（hypoellipticity），を用いる．

6．3． つぎのステップとして，π_T が低次元部分集合 $G\setminus G'(R)$ の上には値を持たないこと，すなわち，G 全体の上で局所可積分函数になっていること，を示すのは難しくて時間がかかった．ここでは，行列要素や球函数などの長い研究の末に，最後にこの命題に到達したときの論文 [Ha3] を引いておく．

注． なお，ずっと後になって，群上の調和解析の拡張として，symmetric pair (G_1,H_1) の調和解析が始まった．この調和解析では，均質空間 G_1/H_1 上の函数を G_1-作用を介して調べること，$L^2(G_1/H_1)$ の既約分解である準プランシュレル公式，などが問題になる．この場合には，「不変固有超函数は局所可積分函数である」という命題の類似は，もはや一般には成立しない．

上述の，群 G 上の調和解析は，$G \cong (G \times G)/\Delta G$ として，symmetric pair $G_1 = G \times G, H_1 = \Delta G := \{\,(g,g)\ ;\ g \in G\}$, に対する調和解析とも捉えられる．

7．連結巾零リー群，可解リー群などの場合について．

連結半単純リー群の既約指標 π_T は，不変固有超函数の一種として，局所可積分函数に一致した．しかし，この現象は，その他の型のリー群では一般に成り立たない．

7．1．連結巾零リー群の場合には，既約指標は本質的には次のような形である．これは，[Di1] から続く研究によって最終的に [Ki1] で明らかになったことである．$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G)$ の線形双対空間 $\mathfrak{g}_0'$ に G を coadjoint action により作用させる．すると，coadjoint orbit $\mathcal{O}$ ごとに既約ユニタリ表現が L^2-誘導表現の方法で作れる．それを $T = T_{\mathcal{O}}$ とすると，その指標 π_T は $\mathcal{O}$ 上の G 不変測度のフーリエ変換に（ある特別の函数を乗じたものに）等しい．従ってそれは G 上の局所可積分函数ではない．

7．2．連結可解リー群の場合はもっと複雑である．一般に，非 I 型の因子表現が現れる．そして，既約表現でも，その指標が超函数としても定義出来ない例がある（Dixmier による）．

しかし，楽観的な見通しが身上の Kirillov は [Ki2] ほかで,「巾零のときにうまくいった（彼の）orbit method が一般の場合にも通用するはずだ」とのたまわって，かなり荒っぽい論文をシリーズで書いたが，その後の多くの研究者の結果を概観すると，次第に大筋において彼の見通しが実現されてきた，とも言えるだろう．

注． 巾零リー群の場合にも，さらに，$\mathfrak{g}_0$ の複素化 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)_C$ をとり，その線形双対空間 $\mathfrak{g}'$ に coadjoint action を考える．すると，複素軌道ごとに既約表現の複素解析型実現が可能になる．すなわち，同一の既約ユニタリ表現が，L^2-誘導によっても，正則誘導（または部分的正則誘導）によっても実現できる．

引 用 文 献

Interesting book (but not for this time):

Recueil des Lois, Instructions, Tables et Tableaux
relatifs aux nouveaux poids et mesures, et au calcul décimal,
publié par ordre du gouvernement,
Et imprimé à l'imprimerie de la République.
Se trouve A PARIS, Chez Rondonneau,
au Dépot des Lois, place du Carrousel,
AN VI.
＜図版 1 参照＞

—— —— —— —— —— —— —— —— —— ——

References uniquely for this short note (until arround 1965)

有限群の表現と指標の研究の典型例として

[Sch1] J. Schur, Uber die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20-50.

[Sch2] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **132**(1907), 85-137.

[Sch3] J. Schur, Uber Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **139**(1911), 155-255.

この話題の現代へのつながりとして

[IwMa] N. Iwahori and H. Matsumoto, Several remarks on projective representations of finite groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, **10**(1964), 129-146.

[Ya] K. Yamazaki, On projective representations and ring extensions of finite groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, **10**(1964), 147-195.

群（特にリー群）の無限次元表現の指標

[GeNi1] I.M. Gelfand and M.A. Naimark, Unitary representations of the

Lorentz group, Izvestija Akad. Nauk, SSSR, Ser. Mat., **11**(1947), 411-504.

[GeNi2] I.M. Gelfand and M.A. Naimark, *Unitary representations of classical groups*, Trudy Matem. (Steklov Institute), **36**, 1950 (in Russian).

[Go] R. Godement, Théorie des caractères I. Algèbres unitaires; II. Définition et propriétés générales des caractères; Ann. Math., **59**(1954), 47-62; 63-85.

[Ha1] Harish-Chandra, Representations of a semisimple Lie group, III, Trans. Amer. Math. Soc., **76**(1954), 234-253.

[Ha2] Harish-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, ibid., **83**(1956), 98-163.

[Di1] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotentes. V, Bull. Soc. Math. France, **87**(1959), 65-79.

[Ki1] B. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspexi Mat. Nauk, **17**(1962), 57-101.

[Ha3] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, Trans. Amer. Math. Soc., **119**(1965), 457-508.

[Ki2] B. Kirillov, Methods of orbits in the theory of unitary representations of Lie groups, Funct. Anal. Appl., **2**(1968), 96-98.

離散無限群の指標 (indecomposable positive definite function)

[Th] E. Thoma, Die unzerlegbaren positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, Math. Z., **85**(1964), 40-61.

作用素環における指標理論 (I 型, II_1 型因子環の指標)

[Di2] J. Dixmier, *les C^*-Algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.