ヒルベルトの第１２問題と多変数関数論

高瀬正仁

1． 昨年（2001年）6月20日、オーバーヴォルファッハの数学研究所で行なわれた「ガウス会議」に参加して、「ヒルベルトの第12問題の解決のプログラム」という題目で講演した。「ガウス会議」というのは

"Two Hundred Years of Number Theory after Carl-Friedrich Gauß's Disquisitiones Arithmeticæ"（ガウス『整数論』以後の数論の200年）

という名称の研究集会で、期間は6月17日から23日までの一週間、参加者は24人であった。2001年は、ガウスの著作『整数論』("Disquisitiones Arithmeticæ"、1801年）が刊行されてきっかり200年目にあたる節目の年であった。

講演の日の夕食の後、シュトラスブルクの数学者ノルベルト・シャパッヒャーが「ハーイ、高瀬」と声をかけながら勢いよく近づいてきて、一篇の論文と日本語の翻訳書『第三帝国下の科学』（法政大学出版局）を手渡してくれた。シャパッヒャーはこの本の共著者の一人で、数学に関する部分を書いている。論文のほうはヒルベルトの第12問題の歴史を叙述したもので、標題は

"On the History of Hilbert's Twelfth Problem. A Comedy of Errors."

（ヒルベルトの第12問題の歴史　さまざまな誤りの織り成す一幕の喜劇）

（『２０世紀数学史のための資料集　ジャン・デュードネ記念討論集会（ニース、1996年）記録集』に収録された。フランス数学会「セミナーと会議 3」、243-273頁、1998年）

というのである。

シャパッヒャーはぼくの講演の途中でも発言した。ヒルベルトは第12問題の言明

の中で、数学の三つの基本的領域、すなわち数論と代数学と関数論は相互に親密な関係で結ばれていると述べ、そのうえで、もし有理数体に対する指数関数、虚二次数体に対する楕円モジュラー関数と同じ役割を果たす関数を、任意の代数的数体を対象にしてみいだして究明することができたなら、わけても

多変数解析関数論は本質的な利益を受けるであろう。 (全集 3、313頁)

と明言している。講演でこの有名な一節に言及し、このように数論の文脈で「多変数解析関数論」という言葉に出会うのはいかにも不思議で魅力的である、というふうに話しを進めたところ、シャパッヒャーがすかさず、「それはモジュラー関数のことだ」と言った。ヒルベルトの念頭にあったのは一変数モジュラー関数の一般化のことで、具体的に言うと、今日のいわゆる「ヒルベルトのモジュラー関数」のアイデアをもっていた。ヒルベルトはこの新しい関数について短いノートを書き、それを弟子のオットー・ブルメンタールの手にゆだねた。ブルメンタールはそのノートを元にしていくつかの論文を執筆した。それが多変数モジュラー関数の雛形となり、ここから派生して「ジーゲルのモジュラー関数」など、さまざまな変種が生まれることになった。シャパッヒャーはこのあたりの事情を端的に指摘したわけである。

2. シャパッヒャーの論文には詳しい文献目録もついていて、そこにはヒルベルトのモジュラー関数に関するブルメンタールの諸論文も掲載されていた。しかしブルメンタールにはもう一つ、多複素変数解析関数の一般理論に関する論文がある。それは

「多複素変数解析関数の特異点に関する諸注意」

という論文で、ベンケとトゥルレンの著作

『多複素変数関数の理論』(1934年、シュプリンガー社)

に紹介されているので、ぼくも以前から名前だけは知っていた。出典は、

『ハインリッヒ・ウェーバー七十歳祝賀記念論文集』(1912年)

という書物である。国内ではなかなか見ることのできない珍しい本だが、シャパッヒャーの指摘に刺激されて探索し、アマゾン・ドット・コムの通信販売でチェルシア社から出ているリプリント版(1971年)を購入することができた。

この『ウェーバー記念論文集』それ自体はシャパッヒャーの論文でも紹介されてい

るが、それにもかかわらず、この本に収録されているブルメンタールの論文への言及は見られない。この点はいかにも不可解で、かえって印象的であった。ヒルベルトの第12問題との関連で言うと、注目を集めているのはモジュラー関数の方面のみで、多複素変数解析関数論の一般理論のほうは、これまでかえりみられることがなかったのではないかという感慨があった。

3．　さて、ベンケ、トゥルレンの本の54頁には「レビの問題」が記述されている。それは、

　では、レビの条件 $L(\varphi)>0$ は大域的に見ても十分だろうか。

という問題で、これに先立って紹介されているのはE.E.レビの一連の研究である。不等式 $L(\varphi)>0$ はいわゆる「レビの微分不等式」である。ベンケ、トゥルレンの言葉は続き、

　この問題の重要性はまず初めにブルメンタールによって認識され、それ以来、特異点の理論の**未解決の主問題の一つ** になった。

と言われている。このような文脈において、ぼくらはブルメンタールの名に出会うのである。

レビ自身は、まず初めに滑らかな超曲面で囲まれた領域 $\{\varphi<0\}$ が解析関数の存在領域であるための必要条件としてレビの条件 $L(\varphi)\geq 0$ （等号つき不等式）を出し、逆に条件 $L(\varphi)>0$ （等号のつかない不等式）がみたされるなら、領域 $\{\varphi<0\}$ は局所的に見るかぎり存在領域になることを明らかにした。逆問題に向かって歩を進めたことはまちがいないが、ベンケ、トゥルレンの本に明記されているような、（境界の各点においてレビの条件がみたされるという局所的な状勢から、存在領域になるという大域的な状勢を導くという意味において）大域的性格を備えた「レビの問題」をも、すでに視圏にとらえていたとは言えないと思う。ところがブルメンタールはある集合体が**大域的に見て**ある解析関数の特異点集合（すなわち「特異多様体」）であるための十分条件を究明しようとした。**レビの問題が問題として成立しえたのは、このブルメンタールの構想のたまものだったのである。**

もう少し具体的にブルメンタールの論文を観察すると、着目されているのは、複素2変数の空間内の滑らかな超曲面が特異多様体であるためにレビが明らかにした二つ

の必要条件である。ひとつは、「ある任意の点Pからその集合の点までの距離を測定すると、実際に最大値に到達することはない」という性質（条件A）であり、もうひとつは「レビの微分不等式をみたす」という性質（条件B）である。ブルメンタールはいくつかの簡単な例により、これらの条件は特異多様体であるための十分条件を与えていないことを示した。それがブルメンタールの論文の実質をなす部分である。

論文の末尾で、ブルメンタールは

この論文の続篇において、私は特異多様体の十分条件を論じたいと思う。
（『ウェーバー記念論文集』22頁）

と述べた。特異多様体の補集合に移行すれば、ここで提起されているのは、解析関数の存在領域の大域的な特性を明らかにしたいという意志である。だが、二条件A、Bは十分条件を与えるとは言えず、新たな条件が提示されるという局面もまた現われなかった。そこでベンケ、トゥルレンはレビに回帰して、「レビの条件$L(\varphi)>0$は大域的に見ても十分だろうか」という形に問題を設定したのである。「大域的に見ても十分だろうか」と問う問いの様式においてブルメンタールの影響の反映が認められることは上記の通りである。

4．　解析関数の存在領域の幾何学的形状を把握するという一般的な観点から見ると、ベンケとトゥルレンが設定した「レビの問題」は、対象が「滑らかな超曲面で囲まれた領域」に限定されている点で特殊性が大きすぎるし、レビの条件$L(\varphi)>0$もまた強すぎるように思われる。すなわち、このままでは一般性において欠けているところがあるというほかはない。状況を根本的に改善するには、レビではなく、ハルトークスに直接立ち返り、ハルトークスの連続性定理から発生する逆問題を採取しなければならないであろう。岡潔はこれを実行し、ハルトークスの連続性定理が描き出す幾何学的状勢の中から「擬凸状領域」の概念を抽出した。そのうえで「ハルトークスの逆問題」を設定し、その解決に成功したのである。そこにはベンケ、トゥルレンの「レビの問題」の解決も包摂されているから、岡が解いたのはレビの問題であると一般に言われるようになった。それはまちがっているわけではないが、正確な歴史叙述とも言えない。**岡が解決したのはあくまでもハルトークスの逆問題であり、岡に先行する段階ではまだ、擬凸状領域の一般概念もハルトークスの逆問題もどちらも存在していなかった** のである。

ヒルベルトの第12問題に話をもどすと、ヒルベルトのノートに基づいてヒルベルトのモジュラー関数の研究を手がけたブルメンタールが、同時にレビの問題に着目し、多複素変数関数論の一般理論建設に向けて布石を打ったという事実は着目に値すると思う。ヒルベルト自身の真意の所在地もおそらくそのあたりであり、**ヒルベルトが第12問題の言明の中で口にした「多変数解析関数論」の一語が指しているのはモジュラー関数の理論ではなく、まだ姿を見せない一般理論のことだったの**ではあるまいか。

ヒルベルトは、ヒルベルトの第12問題の究明を通じて「多変数解析関数論は本質的な利益を受けるであろう」と予言したが、「本質的な利益」という言葉は一般理論の場においてこそ相応しい。それゆえ、岡の理論とヒルベルトの第12問題が融合されて開かれていく道筋（そのような道が存在すると思う）を探索していかなければならない。ヒルベルトの言葉が真に生きる数学的な場所にも、この探索の試みを通じて初めて到達することができるであろう。

【平成14年（2002年）３月６日】