オイラーの無限解析について

高瀬正仁

はじめに

全2巻から成るオイラーの著作『無限解析序説』（1748年）のうち，第一巻の内容は話題にのぼることが多く，オイラーの公式 $e^{\sqrt{-1}\,x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$ （ x は実量）や種々の無限級数の総和値の決定など，比較的よく知られているように思う．それに対し第二巻が論じられる機会は多いとは言えず，内容についての認識も，おおよそ曲線や曲面の分類が記述されているという程度にとどまっているのではないかと思われる．これだけでは第一巻と第二巻との有機的関連は明白とは言えないし，『無限解析序説』という作品が，引き続く二つの著作『微分計算教程』『積分計算教程』と併せて三部作を構成するとともに，微積分への序説の位置を占める理由も分明ではない．そこで本稿では第二巻の全体を概観し，

（1） 第一巻との関連の所在地

を探り，

（2） 全二巻を併せて微積分の序説と見るのが至当である理由

を検討して所見を述べたいと思う．

これらの二つの問いへの解答は実は同一で，「関数」というキーワードの考察を通じて同時に答えることが可能である．

『無限解析序説』第二巻の概観

第二巻の巻頭に内容紹介があり，簡単に

「曲線の理論」

「附録　曲面の理論」

とのみ記されている．本文の「曲線の理論」を構成する22個の章と，付録の「曲面の理論」を構成する6個の章は次の通りである．

第１章　曲線に関する一般的な事柄

第２章　座標の取り替え

第３章　次数による代数曲線の分類

第４章　任意の次数の曲線の分類[1)]

第５章　二次曲線

第６章　二次曲線をいくつかの種類に区分けすること

第７章　無限遠に伸びていく分枝の研究

第８章　漸近線

第９章　三次曲線をいくつかの種類に区分けすること

第10章　三次曲線の著しい諸性質

第11章　四次曲線

第12章　曲線の形の研究

第13章　曲線のアフェクション

第14章　曲線の曲率

第15章　一つまたはいくつかのダイアメーターをもつ曲線

第16章　向軸線の，与えられた諸性質に基づいて曲線を見つけること

第17章　他の諸性質に基づいて曲線を見つけること

第18章　曲線の類似性と近親性

第19章　曲線の交差

第20章　方程式の構成

第21章　超越的な曲線

第22章　円に関連するいくつかの問題の解決

［附録　曲面の理論］

第1章　固体の表面に関する一般的な事柄

第2章　提示された任意の平面による曲面の切断

第3章　円柱，円錐および球面の切断

第4章　座標の交換

第5章　二次曲面

第6章　二つの曲面の交叉

『無限解析序説』の第一巻の第一章には「関数に関する一般的な事柄」という標題がついているが，第二巻の第一章の標題は「曲線に関する一般的な事柄」というもので，よい対照をなしている．第一巻では初めに関数概念が提示され，引き続き関数の諸性質が次々と具体的に明らかにされていく．それに対し第二巻では冒頭で曲線に関する一般的な事柄が披瀝され（第1章），続いて本文に移ると二次曲線，三次曲線，四次曲線のような代数曲線（第5～6, 9～11章）と，種々の超越曲線（第21章）が紹介される．どこまでも幾何学的な色彩が濃く，どこに微積分との関連が認められるのか，判断に迷うほどである．

曲線から関数へ

第二巻全体の骨格を決めているのはやはり第1章であり，ここには関数と曲線の関係の認識がはっきりと表明されている．そこで第1章「曲線に関する一般的な事柄」を構成する22個の小節のうち，オイラーの基本思想が具体的に語られている部分を拾い，順を追って読んでいきたいと思う．

> 1．　変化量というのは一般的に考察された大きさのことで，その中にはありとあらゆる定量が包摂されている．それゆえ幾何学の場に身を移すと，このような変化量は不定直線 RS を用いることによりきわめて適切に表示される．実際，不定直線に身を置くと，たとえどれほどの大きさであろうとも任意の定まった大きさを切り取ることができるのであるから，不定直線と変化量は，量というものの同一の観念をわれわれの心象風景の中に等しく描き出してくれるのである．

そこでまず初めに不定直線RSの途中に点Aを選んで指定しなければならない．そうしてある定まった大きさを切り取る際には，その点を始点と見ることにする．そうすると［不定線分の］ある定部分APは，変化量に包摂されている定量を表示していることになるであろう．

ここで語られているのは，変化量を直線上の線分の長さで表示するという解析幾何学のアイデアである．

2． そこでxは変化量として，それは不定直線RSで表示されるとしよう．すると明らかに，xの定置でしかも実値でもあるものはことごとくみな，線分RSにおいて切り取られた部分によって表示される．このあたりの事情をもう少し詳しく言うと，もし点Pが点Aと重なるなら区間APは消失するが，この区間は値$x=0$を表わしている．また，点Pが点Aから遠ざかっていけばいくほど，区間APはそれだけ大きなxの定値を表わすことになる．

この区間APは切除線と呼ばれる．

したがって切除線は変化量xの定値を表わしているのである．

「切除線」はとりあえずx軸のことと思えばよいと思う．

3． 不定直線RSは点Aから出発して左右双方向に限りなく延びていくから，xの正負双方のあらゆる値を切り取ることが可能である．もしxの正の値をAの右方向に歩を進めて切り取ることにするなら，その場合，左方向の区間Apはxの負の値を表わす．実際，点PがAから右方向に遠のいていけばいくほど，区間APはそれだけ大きなxの値を表わすし，逆に，点Pが［Aの］左方向に遠ざかっていけばいくほど，xの値はそれだけ小さくなっていく．そうしてもしPがAに一致するなら，まちがいなく$x=0$となる．このような次第であるから，Pが［Aの］左方向にどんどん遠ざかっていく場合には，0よりも小さいxの値，すなわち負の値が表示される．したがってAから左方向に進んで切り取られた区間Apは，xの負の値を表わしている．また，［Aの］右方向取った区間APは［xの］正の値を与えると見られる．左右どちらの区域をxの正の値を表わすように選ぶべきかという点について言うと，どちらでもかまわない．という

のは，いずれにしてもつねに，反対側の方向は x の負の値を包含することになるからである．

これで切除線すなわち x 軸が正負両方向に延びていくことになった．

4．　こうして不定直線は変化量 x を表示する．そこで今度は，x の任意の関数をもっとも適切に幾何学的に表示する様式を観察したいと思う．y は x の任意の関数としよう．x に対してある定値が指定されるとき，y はある定値を受け入れる．x の値を表示するために不定直線 RAS を採用しよう．x の任意の定値 AP に対し，対応する y の値に等しい線分 PM が［線分 AP と］垂直に描かれる．もう少し詳しく言うと，もし y の正の値が生じるなら，線分 PM は直線 RS の上側に延びていくし，そうではなくて y の負の値が現われるなら，線分 PM は直線 RS の下側に垂直に描かれるのである．実際，y の正の値を直線 RS の上側に取るとき，直線 RS 上では y の値は消失し，直線 RS の下側では y の値は負になることになる．

『無限解析序説』の第二巻の第1章には「曲線に関する一般的な事柄」という標題がついているが，まず初めに登場するのは変化量であり，この点は第一巻と同じである．第一巻と異なるのは変化量に続いて x 軸が導入されるところだが，その次の段階に進んでもまだ曲線は現われず，第4節に至って関数が話題にのぼる．この状勢も第一巻と同じである．

関数のとる値を x 軸に垂直な方向に配列していくことにより，関数のグラフが描かれる．第二巻に出てくる曲線というのは関数のグラフのことなのである．

6．　それゆえこんなふうにして x のあらゆる定値に対して，対応する y の値を確定していくと，直線 RS の各点において垂直に線分 PM が描かれる．そうして関数 y の値を表示するこの線分 PM の一方の端点 P は直線 RS 上にあり，もう一方の端点 M は，y の値が正なら直線 RS の上側に配置され，y の値が負なら直線 RS の下側に配置される．あるいはまた点 D や点 E においてその現象が見られるように，y の値が 0 になるなら，端点 M は直線 RS 上に落ちるのである．それゆえ個々の線分の端点 M は全体としてまっすぐな線［直線］もしくは曲がっ

た線［曲線］を描き，その［まっすぐな，または曲がった］線は上記のような様式により関数yによって定められることになる．**それゆえxの任意の関数はこんなふうにして幾何学の領域へと移されて，ある種の線を定める**．その線はまっすぐかもしれないし，曲がっているかもしれないが，その性質は関数yの性質に依存する．

ここで注目に値するのは，「xの任意の関数はこんなふうにして幾何学の領域へと移されて，ある種の線を定める」という言葉である．「ある種の線」すなわち関数のグラフとして認識される線は一般に「曲がっている線」，すなわち曲線になるが，関数の諸性質はこの曲線に反映し，視覚的な観察が可能になる．

ここまでの記述では関数の視覚化がめざされているような印象があり，普通の解析幾可学のイメージを出るところはない．だが，次の第8節になると事態は一変する．今度は曲線から出発し，曲線の中にひそむ関数のイメージを把握して，その関数のグラフとして曲線を見るという視点が打ち出されるのである．

8．　多くの曲線が点の連続的な運動により機械的に描かれていき，そのようにして曲線全体が全体として目に見えるように与えられることがある．だが，それはそれとしてここでは主として，**それらの曲線の解析的源泉，すなわちはるかに広範な世界に向かうことを許し，しかも計算を遂行するうえでもずっと便利な源泉を関数と見て，その視点から考察を加えていきたい**と思う．そうするとxの任意の関数はある種の線を与えることになる．その線はまっすぐかもしれないし，曲がっているかもしれない．逆に，曲線を関数に帰着させていくことが可能になる．そこで曲線上の各々の点Mから直線RSに向かって垂線MPを降ろして区間APを作り，それを変化量xで明示することにすることにするとき，そのような状勢のもとでつねに線分MPの長さを表示するxの関数が得られる．曲線の性質はそのようなxの関数を通じて記述されるのである．

微積分の形成期に微分計算や積分計算の対象になったのは，関数ではなく曲線であった．いろいろな曲線が次々と舞台に上り，接線を引いたり面積を算出する方法が考案された．多くの曲線が「連続的な運動により機械的に描かれていく曲線」として現われるというのはオイラーの言う通りで，代表的な例として，たとえばレムニスケート

曲線などを想起すればよいと思う．

それはそれとして，オイラーは言葉を続け，そのような曲線の「解析的源泉」，すなわち「はるかに広範な世界に向かうことを許し，しかも計算を遂行するうえでもずっと便利な源泉」を関数と見て，その視点から考察を加えていきたいという構想を表明した．このアイデアこそ，『無限解析序説』第二巻の根幹である．実際，これで微積分の対象は曲線から関数へと移行することになり，曲線の性質は関数の性質に帰着されていく．第一巻と第二巻は「関数」というキーワードで連接されて，全体として「関数を対象とする微積分」のための根柢を形作ることになるのである．

いろいろな関数の紹介とそれらの諸性質の研究が第一巻を構成し，関数概念を曲線というものの解析的源泉と見て，そのよう見方を具体的に語るのが第二巻である．関数概念の導入が共通の基盤になり，その土台の上に『無限解析序説』に続く三部作の二作『微分計算教程』『積分計算教程』が構築されていく．これが，オイラーが描いた新時代の微積分の姿である．

曲線を表示する関数の性質に応じて，曲線の全体は代数曲線と超越曲線に分けられる．

> 15.　このようにして**曲線の認識は関数へと帰着される**から，すでに以前目にしたような**種々の関数の種類に応じて，それに見合う分だけの種類のいろいろな曲線が存在する**ことになる．そこで関数の分類の仕方に応じて曲線もまた代数曲線と超越曲線へと適切に区分けされる．すなわち，ある曲線が代数的であるというのは，向軸線 y がその切除線 x の代数関数であることをいう．あるいは，曲線の性質は座標 x と y の間に成立するある代数方程式で表わされるのであるから，この種の曲線は幾何学的とも呼ばれる習わしである．他方，ある曲線が超越的であるというのは，その性質が x と y の間に成立する超越的な方程式で表わされること，言い換えるとその方程式から y が x の超越関数として認識されることをいう．これが，連続曲線の際立った区分けであり，これにより連続曲線は代数曲線であるか，あるいは超越曲線であるかのいずれかであることになる．

この第15節の冒頭に「曲線の認識は関数へと帰着される」という簡潔な言葉があり，第1節から読み進めてこの箇所に至った者の心に強い印象を刻むと思う．続いて「種々の関数の種類に応じて，それに見合う分だけの種類のいろいろな曲線が存在す

る」と言われているが，この事実認識も明快である．代数関数のグラフが代数曲線で，超越関数のグラフは超越曲線である．代数曲線は「幾何学的な曲線」と呼ばれることもある．

「向軸線」というのは y 軸のことと思ってさしつかえなく，x 軸に相当する切除線とともに直交座標系を構成する．

超越曲線

『無限解析序説』第二巻で取り上げられる曲線はたいていの場合，代数曲線だが，終わりがけの第21節は超越曲線に当てられていて，種々の超越曲が紹介される．

> **506.** これまでのところではわれわれの議論の対象は代数曲線であった．代数曲線には，軸上に任意の切除線を取るとき，それに対応する向軸線が切除線の代数関数を用いて書き表わされるという性質，言い換えると，同じことになるが，切除線と向軸線との間の関係が代数方程式を用いて書き表わされるという性質が備わっている．これよりおのずと明らかになるように，もし向軸線の値が切除線の代数関数として表示されえないなら，その曲線は代数曲線の仲間には数えられない．代数的ではない曲線は**超越的**と呼ぶ慣わしになっている．それゆえ**超越曲線は，その切除線と向軸線の間の関係が代数方程式では書き表わされないような曲線が超越的と言われる，という言い方で規定される**．したがって向軸線 y が切除線 x の超越関数と等値される場合，その曲線は超越関数の範疇に算入しなければならないのである．

この第506節からオイラーの考察の対象は超越曲線に移り，対数曲線，正弦曲線，余弦曲線，正接曲線，正割曲線，種々のタイプのサイクロイド，螺旋，アルキメデスの螺旋，対数螺旋，ベルヌイの双曲螺旋，レムニスケート等々，多彩な超越曲線を挙げている．超越曲線の世界は代数曲線に比してはるかに多彩である．みな微積分の草創期に微分計算の対象として提案された曲線の数々であり，オイラーはこれらの解析的源泉と見られる関数を指摘し，関数の性質に基づいて曲線の性質を語っていく．

だが，ひとたび関数概念が自立すると，関数の世界の拡大に伴って曲線の範疇も法外に膨張し，理解に困難の伴う事態に逢着する．これは「関数概念により曲線の世界

を統制する」というアイデアそれ自体から発生した新たな数学的状勢である．旧世界に秩序を与えようとする斬新な試みの中から，またしても別種の無秩序が発生したのである．オイラー自身，二三の現象を指摘して，困惑を隠さないかように見える．

508. 関数は代数的でなければ超越的である．それゆえ，ある曲線の方程式の中に超越関数が入っているなら，その曲線はその超越関数に起因して超越的になる．代数方程式について言うと，有理的であって整数以外には冪指数を内包しないか，あるいは非有理的で，分数冪指数を包摂するかのいずれかである．後者の場合，方程式はつねに［前者の場合のような］有理的な形に帰着される．座標 x と y の間の関係を表わす曲線の方程式には，有理的ではなく，有理的な形に帰着させることもできないという性質が備わっているとしよう．そのときその曲線は超越的である．もし方程式の中に，整数でも分数でもない冪指数をもつ冪が現われるなら，その方程式はいかなる仕方でも有理的な形に帰着させることはできない．したがってそのような方程式に包摂される曲線は超越的である．これより第一種の超越曲線，すなわちもっとも単純な種類の超越曲線が生じる．そのような曲線の方程式には非有理的な冪指数が実際に姿を見せるのである．この種の方程式は対数も円弧も内包せず，ただ非有理数の概念の認識のみを元にして生じるから，どちらかといえばむしろ通常の幾何学に所属するようにも見える．そうしてまさしくこの理由により，このような曲線はライプニッツにより内越的（インターセンデンタル）という名で呼ばれたのである．代数的曲線と超越的曲線の真ん中あたりの位置を占めるというほどの意味合いである．

ライプニッツに由来するという内越的曲線の例として，オイラーは関数 $y=x^{\sqrt{2}}$ のグラフを挙げている．この関数のグラフを描くのはむずかしい．

509. 方程式 $y=x^{\sqrt{2}}$ に包摂される曲線は超越的である．実際，この方程式のどれほど高次の冪を作っても，この方程式は決して有理的な形には還元されない．このような方程式を幾何学的な手法をもって作るのは不可能である．なぜなら，冪指数が有理数であるもの以外の冪は，幾何学的に明示することができないからである．このようなわけで，この種の曲線は代数的な曲線とは著しく異なっている．冪指数 $\sqrt{2}$ を単に近似的に提示したいのであれば，$\sqrt{2}$ の代わりに，値

$\sqrt{2}$ を近似的に表示する分数の系列

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{96}{70}$$

に所属する分数を用いるとよい．そのようにすると，探究したい曲線に接近していく3次，7次，17次，41次・・・の代数曲線の系列が生じる．$\sqrt{2}$ は，無限に大きな数を分子と分母にもつ分数を用いるのではない限り，有理的に表示するのは不可能である．そこでこの［方程式 $y=x^{\sqrt{2}}$ に包摂される］曲線は無限大の次数の曲線の仲間に入れなければならないことになり，まさしくそれゆえに代数曲線と見ることは許されないのである．これに加えて，$\sqrt{2}$ は二つの値を包含する．一方の値は正で，もう一方の値は負である．この事情により y はつねに二つの値を獲得し，二本の曲線が対をなして描かれることになる．

対数を使えば精密な数値計算が可能になり，関数 $y=x^{\sqrt{2}}$ のグラフを近似する曲線を描くことができる．ただし x に負の量を割り当てるとき，対応する関数値の算出はむずかしく，実量になるのか虚量になるのかということさえはっきりしない．このあたりは複素変数関数論の入り口である．

510. 次に，もしこの曲線を精密に描きたいというのであれば，対数の支援なしにこの作業を遂行するのは不可能である．実際，$y=x^{\sqrt{2}}$ として対数を取ると，$\log y=\sqrt{2}\log x$ となるから，切除線の対数に $\sqrt{2}$ を乗じると向軸線の対数が与えられる．そこで対数表を使えば，任意の切除線 x に対して，対応する向軸線が指定される．たとえば $x=0$ なら $y=0$ となる．$x=1$ なら $y=1$ となる．これらの値は方程式を見ればごく簡単に導かれる．ところが $x=2$ なら $\log y=\sqrt{2}\log 2=\sqrt{2}\cdot 0.3010300$．そうして $\sqrt{2}=1.41421356$ より $\log y=0.4257207$．したがって近似的に $y=2.665144$ となる．$x=10$ なら $\log y=1.41421356$．したがって $y=25.954554$ となる．こんなふうにして個々の切除線に対して，対応する向軸線の数値が算出され，曲線が描かれるる．ただしこれは切除線 x に正の値が割り当てられるときの話である．そうではなくて切除線 x が負の値を取るなら，そのとき y の値が実になるか虚になるかを明言するのはむずかしい．たとえば $x=-1$ なら［y の値は］$(-1)^{\sqrt{2}}$ になるが，$\sqrt{2}$ の［分数の系列による］近似は何の助けにもならず，この値を規定するのは不可能である．

関数$y=x^{\sqrt{2}}$が負のxに対応して取る値には奇妙な曖昧さが伴うが，その根源は負の対数値にあり，そこまで踏み込んでいくとそのつど理解しがたい現象に出会うのである．オイラーは負の対数値をめぐって生起する不思議な現象を拾っている．

515．　ここでひとつの問題が生じる．それは，こんなふうにして対数曲線の全体が描かれるのか，あるいは双方向に無限に伸びていく分枝MBmのほかにも，他の枝をもたないのかどうかという問題である．実際，前にすでに見たように，二本の分枝が収斂していかない漸近線というものは存在しない．そこで対数曲線は，軸の両側に位置して類似の形をもつ二つの部分から作られていて，漸近線はダイアメーターになると信じた人もいるのである．だが，方程式$y=ae^{x:b}$はこのような性質を決して語らない．実際，$\frac{x}{b}$が整数もしくは奇分母をもつ分数のときは，向軸線yはただひとつの実値，しかも正の値をもつ．しかしもし分数$\frac{x}{b}$が偶分母をもつとするなら，そのとき向軸線yは二つの値を与える．ひとつは正の値であり，もうひとつは負の値である．よって漸近線のもう一方の側にもこの曲線の点がある．これにより，対数曲線は漸近線の下方に無限に多くの離散点をもつことになる．それらの点は連続曲線を作らない．たとえ点と点との間隔が無限に小さいため連続曲線かと惑わされるようなことがあるとしても．ところがこれは代数曲線には決して見られないパラドックスである．このパラドックスから，不思議さにおいて隔絶するもうひとつのパラドックスも生じる．実際，負の数の対数は虚量であるから（これはおのずと明らかであると言ってもいいし，$\log(-1)$と$\sqrt{-1}$の比が有限値をもつことからもわかると言ってもいい），$\log(-n)$は虚量である．これをiと等値しよう．ところで平方数の対数は［その平方数の］平方根の対数の二倍に等しいから，$\log(-n)^2=\log n^2=2i$となる．ところが$\log nn$は実量で，$2\log n$に等しい．すると実量$\log n$と虚量iはどちらも実量$\log nn$の半分であることになってしまう．そのうえ任意の数は，その半分に等しい数を二つもつ．ひとつは実量であり，もうひとつは虚量である．同様に任意の数について，その三分の一に等しい量が三つ存在する．それらのうち一つだけが実量である．また，任意の数について，その四分の一に等しい量が四つ存在する．それらのうち一つだけが実量である．この状勢は以下も同様に続いていく．このパラドックスを通常の量の観念をもって解消するにはどのようにしたらよいのであろうか．この点は明瞭ではない．

516.　先ほど言い添えた事柄が承認されたなら，数 a の半分は $\frac{a}{2}+\log(-1)$ と $\frac{a}{2}$ であることが明らかになる．実際，前者の量の二倍は，

$$a+2\log(-1)=a+\log(-1)^2=a+\log 1=a$$

となる．ここで，たとえ $\log(-1)=0$ ではないとしても，

$$+\log(-1)=-\log(-1)$$

であることに留意しなければならない．実際，$-1=\frac{+1}{-1}$ であるから，

$$\log(-1)=\log(+1)-\log(-1)=-\log(-1)$$

となるのである．同様に，$\sqrt[3]{1}$ は 1 ばかりではなく $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ でもあるから，

$$3\log\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\log 1=0$$

となる．したがって同一の量 a の三分の一は，

$$\frac{a}{3},\quad \frac{a}{3}+\log\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\quad および\quad \frac{a}{3}+\log\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

となる．実際，これらの各々の表示式を三倍すると同じ量 a が生じる．この疑問をそのまま受け入ることはできそうにないが，これを解決する方向に向かうべく，もうひとつのパラドックスを報告しておかなければならない．すなわち，どの数にも無限に多くの対数が存在し，しかもそれらのうち実量であるものは一つより多くは存在しないのである．たとえば 1 の対数は 0 に等しいが，それにもかかわらずそのほかにも 1 の虚の対数が無限に多く存在する．それらは

$$2\log(-1),\quad 3\log\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},\quad 4\log(-1)\quad および\quad 4\log\left(\pm\sqrt{-1}\right)$$

などである．これらのほかにも 1 の冪根を作ることにより与えられるものが無数に存在する．この命題は，これに先行する命題に比べてはるかにもっともらしい感じがある．なぜなら，$x=\log a$ と置くと，$a=e^x$ となる．したがって

$$a=1+x+\frac{xx}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots$$

となるが，これは無限次元の方程式であるから，x が無限に多くの根をもっても驚くほどのことはないのである．後者のパラドックスについてはこんなふうに解明されたが，それにもかかわらず前者のパラドックスのほうは依然としてその効力を保持している．われわれは軸の下方において無数の離散点が対数曲線に所属することを示したが，この事実がある限り，前者のパラドックスはなお生きているのである．

曲線それ自体ではなく関数概念から出発しようとすると，$y=x^{\sqrt{2}}$ のような簡単な関数を考えようとするだけですでに「負の対数」の考察を余儀なくされてしまい，複素変数関数論の扉を開けなければならない状勢に直面する．関数概念そのものも当初より一意的に確定するわけではなく，守備範囲の設定の仕方はさまざまに可能である．関数概念を広く取れば取るほど，関数のグラフの形状の奇妙さが際立っていき，概要を描くのも困難になっていく．言い換えると，関数概念の自在さと相俟って，曲線というものの概念もまた変容を迫られるのである．

次の節では，$y=(-1)^x$ という，簡単だがグラフを描くのがむずかしい関数が提示される．

517.　ところでこのような無限に多くの離散点が存在することははるかに明白な一事であり，方程式 $y=(-1)^x$ を通じて明示することが可能である．実際，x が偶整数であるか，あるいは偶数の分子をもつ分数であれば，そのつど $y=1$ となる．しかしもし x が奇整数であるか，あるいは分子も分母も奇数の分数であるなら，$y=-1$ となる．そのほかのあらゆる場合，すなわち x は偶数の分母をもつ分数の場合や，あるいは非有理数の場合には，y の値は虚量である．それゆえ方程式 $y=(-1)^x$ は軸の両側に，軸から距離 1 だけ離れた位置にある無限に多くの離散点をもたらすことになる．それらの点はどの二つも隣接しない．だが，それにもかかわらず，指定可能ないかなる量よりも小さな距離が与えられたとしても，その距離の分だけの隔たりしかない二点が軸の同じ側に存在する．このような事態が妨げられるわけではない．実際，切除線のどれほど近接する二つの値の間にも，分母が奇数である分数が一つといわず無限に多く現われて，それらの各々から，提示された方程式に所属する点が生じる．これらの点は，軸に平行な，いずれも軸から距離 1 だけ離れたところに配置されている二本の直線上にのっている．これらの直線上には，方程式 $y=(-1)^x$ に包摂される点がひとつも配分されない区間，というよりもむしろそのような点が無限に多く配分されない区間は存在しえない．これと同じ変則的な事態は方程式 $y=(-a)^z$ でも起こるし，負の量の不定冪指数を作ることになる他の類似の方程式にも見られる．ここではこのような，超越曲線にのみ起こりうるパラドックスを開示することが必要であった．

関数概念を素朴に設定し，『無限解析序説』第一巻の冒頭に出ているように「変化

量と定量を用いて組み立てられる解析的な式」と理解する場合でも，$y=(-1)^x$ というような「式」もまた関数の仲間に入れなければならないであろう．しかしこの関数のグラフを描くのはむずかしく，その困難はまたも負の対数値 $\log(-1)$ に由来するのである．

図を描くのがみずかしそうに見えながら，適切なパラメータ表示を受け入れるおかげで概形が判明するものもある．一例として，オイラーは曲線 $x^y=y^x$ を挙げている．

519.　図を描く作業が対数を用いて遂行可能なこの種の曲線はほかにも無数にあるが，それらのうちには，図を描くのがそれほど容易ではなさそうに見えるもの，それにもかかわらず適切な［変化量の］置き換えの支援を受けて仕上げることができるものが存在する．方程式

$$x^y=y^x$$

に包摂される曲線はそのような曲線である．この方程式を見ればすぐに洞察されるように，向軸線 y がつねに切除線 x に等しいならこの方程式はみたされる．したがって軸に対して半直角の角度の傾きをもつ直線はこの方程式をみたす．ところがそれにもかかわらず，この方程式は直線 $y=x$ に対する方程式よりもはるかに広範囲にわたって伸びていて，方程式 $y=x$ は方程式 $x^y=y^x$ の内容を汲み尽くしてはいないことは明らかである．実際，たとえ $x=y$ ではないとしても，この方程式はみたされることがある．たとえば，もし $x=2$ なら，$y=4$ でもありうるのである．それゆえ提示された方程式は，直線 EAF のほかにも，他の部分を包摂することになる．それを見つけて，方程式の内容をなす曲線の全体の姿（図103）が目に見えるようにするために，$y=tx$ と置いてみよう．すると $x^{tx}=t^x x^x$ となる．次数 x の冪根を作ると，

$$x^t=tx \quad よって \quad x^{t-1}=t$$

となる．したがって，

$$x=t^{\frac{1}{t-1}} \quad および \quad y=t^{\frac{t}{t-1}}$$

となる．$t-1=\frac{1}{u}$ と置くと，

$$x=\left(1+\frac{1}{u}\right)^u \quad および \quad y=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}$$

となる．よって提示された曲線は直線 EAF のほかに，直線 AG と AH に向かって漸近的に収斂していく分枝 RS をもつ．直線 AF はこの分枝のダイアメーター

である．ところでこの曲線は直線AFと点Cにおいて交叉するが，このとき$AB=BC=e$となる．ここでeは，その対数が1になる数を表わす．これに加えて方程式$x^y=y^x$は無限に多くの離散点を与える．それらの点は直線EFと曲線RCSといっしょになって方程式$x^y=y^x$を汲み尽くす．そこで二つの数xとyの組で，$x^y=y^x$となるものを無限に多く目の前に並べることができる．実際，そのような数の組を有理数の範囲で例示すると，

$$
\begin{array}{ll}
x=2 & y=4 \\
x=\dfrac{3^2}{2^2}=\dfrac{9}{4} & y=\dfrac{3^3}{2^3}=\dfrac{27}{8} \\
x=\dfrac{4^3}{3^3}=\dfrac{64}{27} & y=\dfrac{4^4}{3^4}=\dfrac{256}{81} \\
x=\dfrac{5^4}{4^4}=\dfrac{625}{256} & y=\dfrac{5^5}{4^5}=\dfrac{3125}{1024} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

というふうになる．もう少し詳しく言うと，これらの二つの数の組の各々において，一方の数の，もう一方の数に等しい冪次数をもつ冪［すなわちxのy次の冪とyのx次の冪］を作ると，同一の量が生じるのである．たとえば，

$$
\begin{array}{ccccc}
2^4 & = & 4^2 & = & 16 \\
\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} & = & \left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} & = & \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}} \\
\left(\dfrac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} & = & \left(\dfrac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} & = & \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}} \\
\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots
\end{array}
$$

というふうになる．

オイラーの微積分

オイラーの作品『無限解析序説』の唯一のキーワードは「関数」である．第一巻では関数概念の提示に続いて種々の関数が紹介され，併せて関数の諸性質が繰り広げられた．第二巻では「曲線を関数のグラフと見る」という視点が打ち出され，微積分の対象が従来の曲線から関数へと転換した．

オイラーの微積分の世界では微分計算と積分計算は相互に逆向きの演算と認識されていて，「有限の世界」と「無限小の世界」の間の自由な往還が可能になるが，この大きな枠はニュートンやライプニッツが開いた姿のままオイラーに継承された．着眼

点が関数に移行したため，究明の度合いは精密さを増していった．これはオイラーの新視点が獲得した大きな利点である．その代わり一見して奇妙な図形も曲線の仲間に加えなければならない事態になり，複素変数関数論の建設が要請されるようになったのも自然な成り行きであった．この趨勢はオイラー以降，関数概念の一般化が進行するのにつれてますます際立っていった．

19世紀に入って現われたコーシーの『諸工芸学校の解析教程』(1821年)や『諸工芸学校で行われた無限小計算に関する講議の要約』（1823年）を見ると，微積分の対象は関数であることが冒頭で明確に表明されているが，ここにはオイラーの思想が継承されている．その先を概観すると，全体が「微分」の章と「積分」の章に二分されていて，しかも「関数の微分」と「関数の積分」は概念上まったく無縁である．そのうえで「微積分の基本定理」が提示され，微分と積分の相互関連が（初めからあたりまえのこととしてではなく，定理の形で）表明される．これはオイラーの世界に加えられた著しい変革であり，理論構成が精緻さを増した反面，失われたものもまた大きかった．

微積分の歴史は大きく四分される．

(1)　前史

(2)　ニュートン，ライプニッツの草創期

(3)　オイラーの時代

(4)　コーシー以降

どの時期にも特色があり，また得失が見られるが，オイラーの微積分の世界について言えば，関数概念が自立していく様子を軸にして観察するのがよいのではないかと思われる．

［平成15年（2003年）2月10日（月）］