離散系列表現のある構成法

峰村 勝弘

この小文では，$G = SU(1,1) \cong SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現が，G の作用と可換な 1 階の微分作用素の核の L^2 部分空間に自然に構成できることを紹介する．関連する主系列表現やポアソン積分については，割愛させて頂く．

1. 離散系列

まず，$G = SU(1,1)$ の離散系列表現の構成を復習する．ここでは [2] を引用させて頂き，離散系列表現のよく知られた構成法を，結果だけについて述べる．詳細については [2],[3] を見て頂きたい．

$G_c = SL(2,\mathbb{C})$ とおく．G_c のボレル部分群 B を下三角にとる．このとき $K = G \cap B$ は G の極大コンパクト部分群

$$\left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} ; 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

になっている．さらに，複素多様体 G_c/B 上の G の作用による，G_c/B の原点 B の G 軌道（$\cong G/K$）は G_c/B の開部分集合と同一視される．これによって G/K に複素構造をいれると，G の G/K 上の作用は複素解析的である．任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\tau_n : B \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \left(a^{-1}\right)^n \in \mathbb{C}$$

と定義すると，τ_n は B の正則な指標となる．τ_n に同伴した G_c/B 上の複素解析的直線バンドルを F_n とし，F_n の G/K への制限を E_n で表す．E_n の C^∞ 切断の全体は

$$C^\infty(E_n) = \{f \in C^\infty(GB); f(xb) = \tau_n(b)^{-1} f(x) \ (x \in GB, b \in B)\}$$

と同一視される．

$$\begin{aligned} D &= \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}, \\ \tilde{D} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ |z| < 1 \right\} \end{aligned}$$

とおく $GB = \tilde{D}B$ で，

$$\tilde{D} \times B \ni (x, b) \mapsto xb \in GB$$

は複素解析的同型である．任意の $f \in C^\infty(E_n)$ に対し

$$(A_n f)(z) = f\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (z \in D)$$

と定義する．写像

$$A_n : C^\infty(E_n) \to C^\infty(D)$$

は上への線形同型写像である．任意の $g \in G, f \in C^\infty(E_n)$ に対し

$$(V_n(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \quad (x \in GB)$$

と定めると，$g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in G$ として，

$$\begin{aligned}
(A_n V_n(g)f)(x) &= (V_n(g)f)\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\bar{\beta}z + \bar{\alpha})^{-1} & 0 \\ \bar{\beta} & \bar{\beta}z + \bar{\alpha} \end{pmatrix}\right) \\
&= (\bar{\beta}z + \bar{\alpha})^{-n}(A_n f)\left(\frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

を得る．そこで，任意の $g \in G, F \in C^\infty(D), z \in D$ に対して

$$(T_n(g)F)(z) = (\bar{\beta}z + \bar{\alpha})^{-n} F\left(\frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}\right)$$

と定義すれば，任意の $g \in G$ に対し

$$A_n \circ V_n(g) = T_n(g) \circ A_n$$

が成立する．任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し τ_n を K に制限して得られる K の指標に同伴する G/K 上の直線バンドルを L_n で表すと，L_n の C^∞ 切断全体は

$$C^\infty(L_n) = \left\{ f \in C^\infty(G);\ f(xk) = \tau_n(k)^{-1} f(x) \quad (x \in G, k \in K) \right\}$$

と同一視される．$G \cap B = K$ であるから，$f \in C^\infty(E_n)$ に対して $f|_G \in C^\infty(L_n)$ であり，写像

$$R_n : C^\infty(E_n) \ni f \mapsto f|_G \in C^\infty(L_n)$$

は上への線形同型である．$g \in G$, $f \in C^\infty(L_n)$ に対して

$$(\pi_n(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad (x \in G)$$

と定めると任意の $g \in G$ に対して次の可換図式が成立する．

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(L_n) & \xrightarrow{\pi_n(g)} & C^\infty(L_n) \\ R_n \uparrow\cong & \circlearrowleft & R_n \uparrow\cong \\ C^\infty(E_n) & \xrightarrow{V_n(g)} & C^\infty(E_n) \\ A_n \downarrow\cong & \circlearrowleft & A_n \downarrow\cong \\ C^\infty(D) & \xrightarrow{T_n(g)} & C^\infty(D) \end{array}$$

G の部分群 A, N を

$$\begin{aligned} A &= \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \cosh t/2 & \sinh t/2 \\ \sinh t/2 & \cosh t/2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\} \\ N &= \left\{ n_x = \begin{pmatrix} 1 + ix/2 & -ix/2 \\ ix/2 & 1 - ix/2 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

とおく．そして $G = SU(1,1)$ 上のハール測度を dg を

$$\int_G f(g)dg = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k_\theta a_t n_x) e^t d\theta dt dx, \ f \in C_c^\infty(G)$$

となるようにとる．任意の $f \in C_c^\infty(G)$ に対しノルム $||f||$ を

$$||f||^2 = \int_G |f(x)|^2 dx$$

で定めると，$\pi_n(g)$ はこのノルムに関して等長写像となり，$C_c^\infty(G)$ の完備化を $L_2(L_n)$ とすれば $\pi_n(g)$ は $L_2(L_n)$ 上のユニタリ作用素，π_n は $L_2(L_n)$ 上のユニタリ表現となる．

さて，任意の $f \in C^\infty(E_n)$ に対して $A_n f = F$ とおくと

$$\int_G |f(g)|^2 dg = 4 \int_{x^2+y^2<1} |F(x+iy)|^2 (1 - x^2 - y^2)^{n-2} dxdy$$

が成立する． $f\in C^\infty(E_n)$ について

$$||f||^2=||R_nf||^2=\int_G|f(x)|^2dx$$

でノルムを定義し， $F\in C^\infty(D)$ についても，各 $n\in\mathbb{Z}$ に対し

$$||F||_n=||A_n^{-1}f||$$

と定める．これらのノルムによる $C^\infty(E_n),C^\infty(D)$ の完備化を $L_2(E_n),L_2(D)_n$ と書く．このとき次のユニタリ同値なユニタリ表現の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccc}
L_2(L_n) & \xrightarrow{\pi_n(g)} & L_2(L_n)\\
R_n\uparrow\cong & \circlearrowleft & R_n\uparrow\cong\\
L_2(E_n) & \xrightarrow{V_n(G)} & L_2(E_n)\\
A_n\downarrow\cong & \circlearrowleft & A_n\downarrow\cong\\
L_2(D)_n & \xrightarrow{T_n(g)} & L_2(D)_n
\end{array}$$

D 上の正則関数，反正則関数が作る空間をそれぞれ $H^+(D),H^-(D)$ とし，

$$H_n^+(D)=L_2(D)_n\cap H^+(D),\ H_n^-(D)=L_2(D)_n\cap H^-(D)$$

とおく． $n>1$ に対して，表現 T_n を $H_n^+(D)$ に制限したものを T_n^+ とし．

$$T_n^-(g)F=\overline{T_n^+(g)\overline{F}},\ \ F\in H_n^-(D),\ g\in G$$

として $H_n^-(D)$ 上の表現 T_n^- を定める．このとき

定理 (Bargmann) $n>1$ に対して， $(T_n^\pm,H_n^\pm(D))$ は G の離散系列と呼ばれる既約ユニタリ表現を与える．

2. 微分作用素

この節では，離散系列表現が， G の作用と可換な1階の微分作用素の核空間から自然に得られることを示す．

$G_c=SL(2,\mathbb{C})$ のリー環を $\mathfrak{g}_c$ と書き． $\mathfrak{g}_c$ の部分空間 $\mathfrak{p}_c$ を

$$\mathfrak{p}_c=\left\{\begin{pmatrix}0&z\\w&0\end{pmatrix};z,w\in\mathbb{C}\right\}$$

とおく．G の極大コンパクト部分群 K のリー環を $\mathfrak{k}$ と書く．B の指標 τ_n の微分を $\mathfrak{k}$ に制限したものも同じ記号 τ_n で表す．τ_n の表現空間 ($\cong \mathbb{C}$) を V_n で表し，G/K 上の直線バンドル L_n, L_m について，L_n から L_m への，$G \ni g$ の作用 $\pi_n(g), \pi_m(g)$ と可換な微分作用素全体を $\mathbb{D}(L_n, L_m)$ で表す．このとき次の線形同型が成立する．(肩の $\mathfrak{k}$ は不変元全体を表す．詳しくは [1] 参照.)

$$\mathbb{D}(L_n, L_m) \cong (S(\mathfrak{p}_c) \otimes V_n^* \otimes V_m)^{\mathfrak{k}}$$

$\mathbb{D}(L_n, L_m)$ の r 階の作用素全体を $\mathbb{D}^r(L_n, L_m)$ と書く．$\mathfrak{p}_c$ の元 z_u, z_d を

$$z_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき次の補題が成立する．

補題 G の作用と可換な 1 階の微分作用素について次の (1),(2) が成立する．

(1) $\mathbb{D}^1(L_n, L_m) \neq 0 \Leftrightarrow |n-m| = 2$

(2) $\mathbb{D}^1(L_n, L_{n+2}) = \mathbb{C}z_u, \ \ \mathbb{D}^1(L_n, L_{n-2}) = \mathbb{C}z_d \quad (n \in \mathbb{Z})$

同型写像 $S_n = A_n R_n^{-1}$ により z_u, z_d を D 上に移したものをそれぞれ $D_{u,n}, D_{d,n}$ で表す．$C^\infty(D)$ を $T_n(g)$ により G 加群と考えたとき $C^\infty(D)_n$ と書くことにすると，作り方から $D_{u,n}, D_{d,n}$ はそれぞれ G の作用と可換な微分作用素で，各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
C^\infty(L_{n-2}) & \xleftarrow{\pi_n(z_d)} & C^\infty(L_n) & \xrightarrow{\pi_n(z_u)} & C^\infty(L_{n+2}) \\
S_n \downarrow\cong & \circlearrowleft & S_n \downarrow\cong & \circlearrowleft & S_n \downarrow\cong \\
C^\infty(D)_{n-2} & \xleftarrow{D_{d,n}} & C^\infty(D)_n & \xrightarrow{D_{u,n}} & C^\infty(D)_{n+2}
\end{array}$$

が成立する．簡単な計算により

$$D_{u,n} = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{n\overline{z}}{1-|z|^2}, \qquad D_{d,n} = (1-|z|^2)^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

であることがわかる．$C^\infty(D)_n$ の部分空間 $K_{d,n}(D)$, $K_{u,n}(D)$ を

$$\begin{aligned} K_{d,n}(D) &= \ker(D_{d,n}) \cap L_2(D)_n \\ K_{u,n}(D) &= \ker(D_{u,n}) \cap L_2(D)_n \end{aligned}$$

で定める．

定理 離散系列表現について次の (1),(2) が成立する．
(1) $(T_n, K_{d,n}(D)) = (T_n^+, H_n^+(D))$ $(n > 1)$
(2) $(T_n, K_{u,n}(D)) \cong (T_{|n|}^-, H_{|n|}^-(D))$ $(n < -1$, ユニタリ同値$)$
略証 (1) は自明である．
(2) $\phi \in C^\infty(D)_n$ に対して，$(I(\phi))(z) = (1-|z|^2)^n \phi(z)$ とおいて

$$I : C^\infty(D)_n \to C^\infty(D)_{|n|}$$

を定義する．

$$D_{u,n} = (1-|z|^2)^{-n} \frac{\partial}{\partial z} \circ (1-|z|^2)^n$$

と書けることから，I が $\ker(D_{u,n})$ から $H^-(D)$ の上への同型写像を与えることがわかる．$\psi = I(\phi)$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}
||\psi||_{|n|}^2 &= 4\int_{x^2+y^2<1} |\psi(x+iy)|^2 (1-x^2-y^2)^{|n|-2}\, dxdy \\
&= 4\int_{x^2+y^2<1} (1-x^2-y^2)^{2n} |\phi(x+iy)|^2 (1-x^2-y^2)^{-n-2}\, dxdy \\
&= 4\int_{x^2+y^2<1} |\phi(x+iy)|^2 (1-x^2-y^2)^{n-2}\, dxdy \\
&= ||\phi||_n^2
\end{aligned}$$

となるので，I は $K_{u,n}(D)$ から $H_{|n|}(D)$ の上へのユニタリ写像であることがわかる．

最後に $g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in G$ とすると，

$$\begin{aligned}
T_{|n|}^-(g)(I(\phi))(z) &= (\beta\bar{z}+\alpha)^{-n} \psi\left(\frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}}\right) \\
&= (\beta\bar{z}+\alpha)^{-n} \left(1 - \left|(\alpha z+\beta)/(\bar{\beta}z+\bar{\alpha})\right|^2\right)^n \phi\left(\frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}}\right) \\
&= (1-|z|^2)^n (\bar{\beta}z+\bar{\alpha})^{-n} \phi\left(\frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}}\right) \\
&= (1-|z|^2)^n (T_n^-(g)\phi)(z) \\
&= I(T_n^-(g)\phi)(z)
\end{aligned}$$

従って

$$T^-_{|n|}(g) \circ I = I \circ T_n(g), \ \ g \in G$$

$\square$

注意 離散系列の極限についても同様の定理が成立する.

参考文献

[1] Minemura K., *Invariant differential operators and spherical sections on a homogeneous vector bundle*, Tokyo J. Math. **15** (1992), no. 1, 231–245.

[2] 岡本 清郷, **等質空間上の解析学**, 紀伊國屋数学叢書 19 , 紀伊國屋書店, 1980.

[3] Sugiura M., *Unitary Representations and harmonic analysis*, Kodansha 1975.