簡約対称空間上の正則表現と調和解析

佐野　茂

平成15 年 2 月 5 日

1　はじめに

簡約リー群上の調和解析においてHarich-Chandraは主系列表現の実現，指標そして不変固有超関数など多くの仕事をし，さらに保型形式論より概念を入れて研究を進めることにより成功している．この歴史について前回まとめてみた([S1])．その後理論は簡約対称空間上の調和解析へと発展していった．最近になり完備性(completeness)の証明までなされたので，この間の成果をまとめてみる．

G/H をH-Cクラスの簡約対称空間とする．簡約群 G の対称空間 G/H への作用を考えると表現論の立場から調和解析の基本的な問題は次のようにまとめられる．

（1）G/H 上の左不変微分作用素環 $\mathbf{D}(G/H)$ によるスペクトル分解を与える．すなわち $L^2(G/H)$ の関数を $\mathbf{D}(G/H)$ の固有関数で分解する．

（2）G の $L^2(G/H)$ における正則表現 $(T_g f)(x) = f(g^{-1}x)$ $(x \in G/H, g \in G)$ を G の既約ユニタリ表現により分解する．これはPlancherel公式である．

（3）eH (e は G の単位元) 上のディラク測度を H-不変固有超関数で展開する．これは逆Fourier変換である．

特に $G\times G$ での対合 σ を $\sigma(g,h) = (h,g)$ とする．$\Delta = (G\times G)^\sigma$ を σ-不変な元全体からなる $G\times G$ の閉部分群とする．対称空間 $G\times G/\Delta$ と群 G とは対応 $G\times G/\Delta \ni (g,1)\Delta \mapsto g \in G$ により同一視できる．このことより簡約対称空間は簡約リー群の自然な一般化といえる．そこで G 上の調和解析の諸成果を G/H 上に拡張しようという試みが多くの人々によりなされていった．

このように群多様体の一般化とみなすのは自然な研究方向だが，群の場合の指標や不変固有超関数などの軌道理論が使えないなどけっして容易ではなかった．多くの論文が発表されたが，この方向では従来の研究内容を超えるものは出てこなかった．そこでHarish-Chandraプログラムと呼ぶことにする．

一方対称空間 G/H の双対リーマン対称空間 G^d/K^d をとる．この空間 G^d/K^d 上では G^d のクラス1の表現空間を佐藤の超関数で与えて確定特異点型微分方程式論を用いてHelgason予想が解決された([K-])．ここでの成果を生かし，大島利雄らは G^d の極小放物部分群 P^d の G^d/K^d での閉軌道に対応して離散系列表現の特徴づけをおこなった．また $L^2(G/H)$ の正則表現の既約表現分解に寄与する表現が緩増加表現(tempered representation)であることを明確にして，その表現を特徴づけるために境界値をとる方法を与えた．さらに対称

空間に大島のコンパクト化や構造論を導入して調和解析を展望した ([O1])．この研究方向を大島プログラムと呼ぶ．

これら２つのプログラムに沿って，多くの成果が 1980 年代に発表された．さらに 1990 年代に入り，２つのプログラムは融合され見通しのよい理論へと結実していった．これらの研究プログラムと完備性の証明までの諸結果を述べていく．

最後に今後の問題をまとめとして述べる．理論としては大分なものになってきているが，今後取り組まれるべき研究テーマは多く，豊かな成果が期待される．若い研究者が多数参加されるべき分野である．

2 簡約対称空間

G を H-C クラスの簡約対称空間とする．σ を G の対合的自己同形とし，G^σ を G の σ–不変元全体の部分群とする．G^σ の開部分群 H をとり、簡約対称空間 G/H を扱っていく．θ を σ と可換な Cartan 対合とする．$K = G^\theta$ とする．$\mathfrak{g}$ を G のリー環とし，σ による固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ とする．また θ による固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする．以下いくつかの例を上げる．詳しくは文献 [OS2] を参照するとよい．

例

$$SL(n,\mathbb{R})/SO(n-j,j),\ SL(n,\mathbb{C})/SU(n-j,j)$$
$$Sp(n,n)/Sp(n,\mathbb{C}),\ Sp(n,\mathbb{R})/Sp(n-j,\mathbb{R})\times Sp(j,\mathbb{R})$$
$$SO(n,n)/SU(n,\mathbb{C}),\ GL(n,\mathbb{R})/GL(n-j,\mathbb{R})\times GL(j,\mathbb{R})$$

3 離散系列表現と大島プログラム

この節では
$$V \subset L^2(G/H)$$
の G-不変部分空間に実現される G の既約ユニタリ表現を離散系列表現という．この離散系列表現が存在するための条件をまとめる．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} + \mathfrak{k}\cap\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{h} + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q},\ \ \mathfrak{h} = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{k} + \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p},\ \ \mathfrak{k} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}\cap + \mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$$

これらの双対は
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} + \sqrt{-1}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}) + \sqrt{-1}(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}) + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q},$$
$$\mathfrak{k}^d = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} + \sqrt{-1}(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}),\ \mathfrak{h}^d = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} + \sqrt{-1}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q})$$
となる．G_c を G の複素化とする．G^d, K^d, H^d を $\mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{k}^d$, $\mathfrak{h}^d$ に対応する G_c の解析的部分群とする．

例

$G/H = SL(n,\mathbb{R})/SO((n-j,j)$ の双対は $G^d/K^d = SU(n-j,j)/SU(n)$

$SL(n,\mathbb{C})/SL(n,\mathbb{R})$ の双対は $SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$.

$\tau\in\hat{K}$ に対して解析関数の空間を

$$\mathscr{A}_\tau(G/H)=\{f\in\mathscr{A}(G/H):f(kx)\quad k\in K \text{ は } \tau \text{ に従う }\},$$

$$\mathscr{A}_\tau(G^d/K^d)=\{f\in\mathscr{A}(G^d/K^d):f(hx)\quad h\in H^d\text{は } \tau \text{ に従う }\}$$

で定義する.

さらに

$$\mathscr{A}_K(G/H)=\sum_{\tau\in\hat{K}}\mathscr{A}_\tau(G/H),$$

$$\mathscr{A}_{H^d}(G^d/K^d)=\sum_{\tau\in\hat{H}^d(K)}\mathscr{A}_\tau(G^d/K^d)$$

とおき対応 γ

$$\gamma:\mathscr{A}_K(G/H)\to\mathscr{A}_{H^d}(G^d/K^d)$$

を次の条件

(1)$f^\gamma(x)=f(x)\qquad f\in\mathscr{A}_K(G/H),\ x\in G\cap G^d$

(2)γ は左 $U(\mathfrak{g})$-作用と右 $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$-作用と可換

を満足するように定義する.

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とする. $\mathfrak{p}^d=\sqrt{-1}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q})+\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間で $\mathfrak{a}$ を含むものを $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d$ とする. $(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d,\Sigma^+(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d))$ に対応した G^d の極小放物部分群を $P^d=M^dA_\mathfrak{p}^dN^d$ とする. $\mu\in(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d)^*$ に対して佐藤の超関数の空間を

$$\mathscr{B}(G^d/P^d:L_\mu)=\{f\in\mathscr{B}(G^d):\ f(xman)=a^{\mu-\rho}f(x),\ x\in G^d,\ m\in M^d\}$$

で定義する. さらに準同形写像 $\chi_\mu:\mathbf{D}(G^d/K^d)\cong\mathbf{D}(G/H)\to\mathbb{C}$ を用いて固有関数の空間を

$$\mathscr{A}(G^d/K^d:\mathscr{M}_\mu^d)=\{f\in\mathscr{A}(G^d/K^d):Df=\chi_\mu(D)f,\ D\in\mathbf{D}(G^d/K^d)\},$$

$$\mathscr{A}(G/H:\mathscr{M}_\mu)=\{f\in\mathscr{A}(G/H):Df=\chi_\mu(D)f,\ D\in\mathbf{D}(G/H)\}$$

で定義する. ポワソン変換 $\mathscr{P}_\mu:\mathscr{B}(G^d/P^d:L_\mu)\to\mathscr{A}(G^d/K^d:\mathscr{M}_\mu^d)$ を

$$(\mathscr{P}_\mu f)(xK^d)=\int_{K^d}f(k)e^{\langle-\mu-\rho,H(x^{-1}k)\rangle}dk$$

で与える. さらに

$$\mathscr{B}_\tau(G^d/P^d:L_\mu)=\{f\in\mathscr{B}(G^d/P^d:L_\mu):\ f(kx)\quad k\in K^d \text{ は } \tau \text{ に従う }\},$$

$$\mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d:L_\mu)=\sum_{\tau\in\hat{H}^d(K)}\mathscr{B}_\tau(G^d/P^d:L_\mu)$$

とおくと

$$\mathscr{P}_\mu:\mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d:L_\mu)\to\mathscr{A}_{H^d}(G^d/K^d),$$

$$\beta_\mu : \mathscr{A}_{H^d}(G^d/K^d) \to \mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu)$$

は $(U(\mathfrak{g}), H^d)$-同型となる．まとめると $\beta_\mu \cdot \gamma(\mathscr{A}_K(G/H, \mathscr{M}_\mu) \cap L^2(G/H))$ は $\mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu)$ の部分空間を特徴付ける．そこで各閉軌道 $H^d x_j P^d$ $(j = 1, .., m)$ に対応して空間を

$$\mathscr{B}^j_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu) = \{f \in \mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu) : \operatorname{supp} f \subset H^d x_j P^d\}$$

とおく．

定理 3.1

$\mu \in (\mathfrak{a}^d_\mathfrak{p})^*_c$ は $\mathrm{Re}\langle \mu, \alpha \rangle \geq 0$ $({}^\forall \alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a}^d_\mathfrak{p}))$ をみたすとする．このとき

(1)

$\mathscr{A}_K(G/H : \mathscr{M}_\mu) \cap L^2(G/H) \neq \{0\}$ ならば

$$\operatorname{rank} G/H = \operatorname{rank} K/K \cap H,$$

$$\mathrm{Re}\langle \mu, \alpha \rangle > 0 \quad ({}^\forall \alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a}^d_\mathfrak{p}))$$

を満足．

(2)

$\operatorname{rank} G/H = \operatorname{rank} K/K \cap H, \quad \mathrm{Re}\langle \mu, \alpha \rangle > 0 \quad ({}^\forall \alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a}^d_\mathfrak{p}))$ ならば

$$\gamma^{-1} \cdot \mathscr{P}_\mu : \sum_{j=1}^m \mathscr{B}^j_{H^d}(G^d/P^d : L_\mu) \cong \mathscr{A}_K(G/H : \mathscr{M}_\mu) \cap L^2(G/H)$$

を満足．

大島利雄はこの成果をもとにさらに緩増加表現を特徴づけることにより Plancherel 公式にでてくる表現を求め，そして境界値をとることにより Plancherel 測度を求めるという調和解析を展望している ([O1,2,3],[OM],[OS1,2])．

4 保型形式と Harish-Chandra プログラム

群上の調和解析に Harish-Chandra は保型形式より不変項 (constant term) や尖点形式 (cusp form) などの概念を導入して成果を上げた ([H1,2,3,4])．これらの概念は簡約対称空間へと一般化されていった ([BS],[D])．$\mathfrak{a}_0$ を $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分群とし，$A_0 = \exp \mathfrak{a}_0$ とおく．P を $\theta\sigma$-不変な A_0 を含む放物部分群で σ-Langlands 分解を $P = M_P A_P N_P$ とする．$L_P = P \cap \theta(P)$ は Levi 部分で $A_P = \{a \in L_P : \sigma(a) = a^{-1}\}$ である．M_P は通常の Langlands 分解より大きい．

仮定

放物部分群 P を上のようにとる．さらに G の両側 (P, H) 軌道

$$PH \subset G$$

は唯一つの開軌道とする．

リーマン対称空間のときは $\sigma = \theta$ で極小放物部分群 P をとれば条件を満足する．さらに群多様体 $G = G \times G/\Delta$ のとき，P_0 を G の尖点的放物部分群 (cuspidal paraboic subgroup)

とすると放物部分群 $P=P_0\times P_0$ は条件を満足する．一般には尖点的放物部分群より大きな放物部分群をとることになる．

$\mu\in\mathfrak{a}_c^*$ を $\mathrm{Re}\langle\mu-\rho,\alpha\rangle>0\quad({}^\forall\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a}))$ をみたすようにとる．$\{\tau,V_\tau\}$ を K の有限次元のユニタリ表現とする．関数 $f:G/H\to V_\tau$ が $f(kx)=\tau(k)f(x)$ $(k\in K,\ x\in G/H)$ を満足するとき τ-球関数という．G/H 上の解析的 τ-球関数全体を $\mathscr{A}(G/H,\tau)$ とおく．また $\mathscr{A}(G/H,\tau)$ に含まれる２乗可積分関数全体を $\mathscr{A}_2(G/H,\tau)$ とし，緩増加関数全体を $\mathscr{A}_{tem}(G/H,\tau)$ とする．また急減少 τ-球関数全体を $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ とおく．

$\tau_M=\tau|_{M\cap K}$ とおく．このとき Eisenstein 積分を

$$E(P,\phi,\mu)(x)=\int_K\tau(k^{-1})\Phi_\mu(kx)dk$$

で定義する．ただし

$$\Phi_\mu(x)=\begin{cases}a^{-\mu+\rho_P}\phi(m) & (x=namH\in PH),\\ 0 & (x\notin PH)\end{cases}$$

である．この Eisenstein 積分により表現をとらえている．実際，この放物部分群からの誘導表現

$$\pi=\operatorname*{Ind}_{P\uparrow G}\xi_\phi\otimes\mu\otimes 1$$

をとる．その表現 π の H-不変ベクトル w と K-有限ベクトル v を適当にとると $(\pi v,w)$ で Eisenstein 積分は表される．また $\mathfrak{a}_c^*$ 上の関数として次の性質をもつ．

定理 4.1　$E(P,\phi,\mu)$ は $\mathfrak{a}_c^*$ 上の関数に有理型関数として拡張できる．さらに

$$p_\phi(\mu)=\prod_{\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a})}\{\langle\alpha,\mu\rangle+C_\alpha\}\qquad(C_\alpha\in\mathbb{C})$$

なる形の多項式関数を適当にとると $E(P,\phi,\mu)p_\phi(\mu)$ は $i\mathfrak{a}^*(i=\sqrt{-1})$ のまわりで正則関数になる．

定理 4.2　$\mu\in i\mathfrak{a}^*$ に対し $E(P,\phi,\mu)(x)$ は定義されるとき G/H 上の緩増加関数となる．

また不変項の概念は次のように一般化される．

$\phi\in\mathscr{A}_{tem}(G/H,\tau)$ に対して次の関係

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ P}}\{\delta_P^{1/2}((\exp tX)l)\phi((\exp tX)l)-\phi_P((\exp tX)l)\}=0$$

を満足する $\phi_P\in\mathscr{A}_{tem}(L/L\cap H,\tau_L)$ が一意に存在する．$Q=M_QA_QN_Q$ を G の $\sigma\theta$-不変放物部分群で $P=M_PA_PN_P$ と Levi 部分 $M_PA_P=M_QA_Q$ は同じものとする．$\mathrm{Ad}(G)$ より誘導される $\mathfrak{a}$ での Weyl 群を $W(\mathfrak{a})$ とする．Eisenstein 積分 $E(P,\phi,\mu)$ の Q 方向の不変項をとると，対応 $\mathfrak{a}_c^*\ni\mu\to C_{Q|P}(s,\mu)\in\mathrm{End}(\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M))$ で

$$E(P,\phi,\mu)_Q(ma)=\sum_{s\in W(\mathfrak{a})}(C_{Q|P}(s,\mu)\phi)(m)a^{-s\mu}\qquad(m\in M_P,a\in A_P,\mu\in\mathfrak{a}_c^*)$$

を満足するようにできる．この C 関数を用いて Eisenstein 積分を次のように

$$E^0(P,\phi,\mu)=E(P,C_{P|P}(1,\mu)^{-1}\phi,\mu)$$

正規化する．群多様体のときには指標を用いて Fourier 変換を定義したが，対称空間のときには変換をどう与えるかは問題となる．このような正規化は一つのやりかたである．次に G の σ-Langlands 分解された $\sigma\theta$-不変放物部分群 $P = MAN$, $P' = M'A'N'$ をとる．$\phi \in \mathscr{A}_2(M/M\cap H, \tau_M)$, $\phi' \in \mathscr{A}_2(M'/M'\cap H, \tau'_M)$ に対して $\mathfrak{a}_c^*$ 上の多項式 $p_\phi, p_{\phi'}$ を $i\mathfrak{a}^*$ の近傍で $F(\mu) = p_\phi(\mu)E(P,\phi,\mu)$, $F'(\mu) = p_{\phi'}(\mu)E(P,\phi',\mu)$ が正則となるようにとる．

以下 G を半単純と仮定する．$T \in \mathfrak{a}'_0$ をとり C'_T を $W(\mathfrak{a}_0)T$ の convex hull とする．さらに G/H の部分集合 $C_T = K(\exp C'_T)H$ とおき，積分

$$\Omega^T(\mu,\mu') = \int_{C_T}(F(\mu)(x), F(\mu')(x))dx$$

を定義する．

定理 4.3　次の条件を満足する $i\mathfrak{a}^* \times i\mathfrak{a}^*$ 上の解析的関数 $\omega^T(\mu,\mu')$ が存在する．

(1) A と A' が K で共役にならないとき $\omega^T(\mu,\mu') = 0$.

(2) $T \to \infty$ のとき $\omega^T(\mu,\mu') \to \Omega^T(\mu,\mu')$.

このω^T の形は具体的に求まり，このことから次の定理を得る．

定理 4.4(正則性定理)　正規化された Eisenstein 積分 $E^0(P,\phi,\mu)$ は $i\mathfrak{a}^*$ の近傍で正則である．

この定理は群多様体のときには N. Wallach により証明されている ([W1,2]).

5 Fourier 変換

$f \in \mathscr{C}(G/H,\tau)$ に対して $\mu \in i\mathfrak{a}^*$ と $\phi \in \mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)$ をとり，Fourier 変換を

$$((\mathscr{F}_P^0 f),\phi) = \int_{G/H}(f(x), E^0(P,\phi,\mu)(x))dx$$

で定義する．このとき

定理 5.1

$$\mathscr{F}_P^0 f \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \times \mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)$$

ここで $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)$ は $i\mathfrak{a}^*$ 上の Schwartz 空間である．

定理 5.2　$\Phi \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \times \mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)$ に対して

$$\mathscr{I}_P^0(x) = \int_{i\mathfrak{a}^*} E^0(P,\Phi(\mu),\mu)d\mu \quad x \in G/H$$

は $\mathscr{I}_P^0(x) \in \mathscr{C}(G/H,\tau)$ となる．

定理 5.3

$$\mathscr{P}_\tau = \sum_{P\in\mathbb{F}}(W(\mathfrak{a}_P))^{-1}\mathscr{I}_P^0\mathscr{F}_P^0$$

は

(1)$\mathscr{C}(G/H,\tau)$ 上の正射影となる．

(2)$\mathscr{C}(G/H,\tau)$ 上の恒等写像となる．

6 今後の課題

今まで歴史を振り返ってきたが，これからどのような問題が研究されるべきかを述べておく．

(1) 第4節で Eisenstein 積分を定義するのに軌道 $PH \subset G/H$ が唯一の開軌道となる放物部分群 P という仮定をもちいている．この仮定が不自然なため結果が不十分であることが分かる．たとえば次の対称空間

$$Sp(2n,\mathbb{R})/Sp(n,\mathbb{C}),\ Sp(2n,\mathbb{R})/S(GL(2n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}),$$

$$Sp(2n,\mathbb{R})/S(U(2n-j,j) \times \mathbb{R}),\ Sp(2n,\mathbb{R})/Sp(2n-j,\mathbb{R}) \times Sp(j,\mathbb{R})$$

は $G = Sp(2n,\mathbb{R})$ の対称空間である．ところが，$L^2(G/H)$ の正則分解に寄与する群 G の表現が Langlands の分類に従っていないで $P = M_P A_P N_P$ のとり方に依存している．そのためどの表現が分解に寄与しているか $L^2(G)$ や他の対称空間の $L^2(G/H')$ 分解と比較できず不鮮明になっている．また対称空間 G/H の離散系列は G の離散系列が関係している場合と G の主系列表現の連続パラメターが退化した場合があるがその部分も不明確になっている．さらに系列の重複度についても PH が唯一つの開軌道という仮定からでは分からない．これらを解決するには文献 [S4] が参考になろう．現在の状況はコンパクト対称空間の場合とよく似ている．H.Cartan によりコンパクト対称空間上の球関数が研究されたが，どの表現が正則表現に寄与するかは明確ではなかった ([C])．後に杉浦光夫によりハイエストウェートを用いて特徴付けられた ([Su])．

(2) また G/H の離散系列を尖点形式 (cusp form) から特徴づける研究は残っている．文献 [W1,2] が参考になろう．

(3) 対称空間でもリーマン対称空間の場合には球関数の詳しい展開により調和解析が与えられている．また群多様体 $G = G \times G/\Delta$ の場合には指標を用いて，軌道理論による調和解析ができている．その $c-$ 双対の対称空間 G_c/G の場合にもこの方法での研究はうまくいった ([S2,3])．他の簡約対称空間についてもランク 1 の場合にはいくつかの対称空間で研究されている．この方面についてはまだ研究の余地がある．

(4) 対称空間以外の等質空間 G/H の正則表現 $L^2(G/H)$ 分解は興味深い．

(5) 今後は離散部分群 Γ で割った空間 G/Γ が研究対象となろう ([SI])．

参考文献

[BS] E.van den Ban, H.Schlictkrull, *Harmonic analsis on reductive symmetric spaces*, European Congress of Mathematics, Barcelona 2000, **vol 1**,(2001),pp. 565–582.

[C] E.Cartan, *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symmetrique clos*, Rend.Circ.Mat.Palermo, **53**,(1929),pp. 217–252.

[D1] P.Delorme, *Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs*, Ann. of Math., **147**,(1998),pp. 417–452.

[H1] Harish-Chandra, *Eisenstein Series over Finite Fields* , Proceedings of a Conference in honor of Professor Marshall Stone at the University of Chicago, (1968),pp. 76–88.

[H2] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups I*, J. Funct. Anal., **19**,(1975),pp. 104–204.

[H3] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups II*, Invent. Math., **36**,(1976a),pp. 1–55.

[H4] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups III*, Ann. of Math., **104**,(1976),pp. 117–201.

[K-] M.Kashiwara, A.Kowata, K.Minemura, K.Okamoto, T.Oshima and M.Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann, of Math.,**107**,(1977),pp. 145–200.

[O1] 大島利雄, 半単純対称空間上の調和解析, 数学, (1985),pp. 97–112.

[O2] T.Oshima, *Fourier analysis on semisimple symmetric spaces,Non commutative harmonic analysis and Lie groups(Marseille-Luminy,1980)*, Lecture Notes in Math., **880**,Springer,(1981),pp. 357-369.

[O3] T.Oshima, *Asymptotic behaviour of spherical funcions on semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math., **14**,(1988),pp. 357-369.

[OM] T.Oshima, T.Matsuki, *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math., **4**,(1984),pp. 331–390.

[OS1] T.Oshima, J.Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on a semisimple symmetric space*, Inv. Math. **57**,(1980),pp. 1-81.

[OS2] T.Oshima, J.Sekiguchi, *The restricted root system of a semisimple symmetric pair*, Adv. Studies in Pure Math., **4**,(1984),pp. 433-497.

[S1] 佐野　茂, 保型形式の哲学と群上の調和解析 (第１２回数学史シンポジウム), 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **23**,(2002),pp. 100-104.

[S2] S.Sano, Invariant spherical distributions and the Fourier invertion formula on $GL(n,\mathbb{C})/GL(n,\mathbb{R})$ J.Math. Soc. Japan, **36**,(1984),pp. 191-219.

[S3] S.Sano, Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples G_c/G J.Math. of Kyoto Univ., **31**,(1991),pp. 377-417.

[S4] 佐野　茂, フーリエ解析の非可換化への最近９５年簡の歩み, Bull.Polytechnic.Univ. **25-A**,(1996),pp. 115-123.

[SI] S.Sano, I.Iida, *Automorphic forms on the space $SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{C})$ $/SU(2)$*, Bull. Polytechnic University, **31-A**,(2002),pp. 189-194.

[Su] M.Sugiura, *Representaions of compact groups realized by spherical functions on symmetric spaces*, Proc.Japan Acad., **38**,(1962),pp. 111-113.

[W1] N.Wallach, Real Reductive Groups I, Academic Press, Pure and Ppplied Mathematics **132-I**,(1988).

[W2] N.Wallach, Real Reductive Groups II, Academic Press, Pure and Ppplied Mathematics **132-II**,(1992).