Petersen の定理から不動点定理へ

奈良知恵，酒井利訓
東海大学　教育開発研究所
chienara@yoyogi.ycc.u-tokai.ac.jp
tsakai@yoyogi.ycc.u-tokai.ac.jp

概要

1910 年に Brouwer の不動点定理が発表されるのに先立ち，相似変換における回転及び拡大の中心，すなわち相似変換の不動点の作図法が J. Petersen や R. Lachlan によって発表されている。以上の研究結果が発表された経過をまとめ，さらに相似変換の不動点に関するその後の研究について概観する。その中で，1964 年以降に報告されている合同変換の不動点を視覚的に捉えることができる現象に関し，その報告の流れを追う。

1.　写像の不動点の存在定理

一般に「不動点定理」というと，「コンパクト凸集合の上の連続写像には不動点が存在する」という，**Brouwer の不動点定理**を指すことが多い。これについては J. von Neumann を始めとして，多くの研究者によって経済などへの応用がなされてきた[5]。L.E.J. Brouwer はこの定理を 1910 年の論文[2]（1909 年に受理）に発表し，そこでは結果だけを述べている。論文の初めには，アムステルダムで開催された研究集会で Hilbert に励まされて，Hilbert が編集委員をしていた *Mathematische Annalen* に投稿した旨を述べている。そして，1912 年の論文[3](1910 年に受理) に不動点定理の証明を発表している。文献[4]によると，Brouwer は 1909 年から 1913 年までの 4 年間に，アムステルダム大学で無給講師を勤めながら，膨大な数の論文（1 年間に平均 10 編）を発表した。しかし，その後はトポロジーの分野から離れて，

数学基礎論の研究に専念した。その萌芽は数学と哲学で取得した学位論文(1907年)にみられる。文献[5]によると，Brouwerは，後半生，構成的証明でない存在定理にはむしろ批判的であったという。次章では，Brouwerの不動点定理に先立ち発表された，J. Petersenによる相似変換の不動点の作図法に関する結果とその後の流れを概観する。

2. 相似変換による不動点の存在とその作図方法

ここでは，相似変換に関する用語は[16]に示されるものを用いる。平面上の2つの相似な図形が向きも同じであるとき，それらの図形は**順相似**であるといい，そうでないとき**鏡映相似**であるという。平面上の相似変換には，**平行移動**，ある点を中心とした**拡大**，ある点を中心とした**回転**，ある直線を中心とした**鏡映**の4種類の基本的な変換があり，**相似変換**はそれらを合成したものである。相似変換に関して，次の2つの定理が成り立つ。

定理 A [8, 10] 任意の2つの順相似な図形は，平行移動または，ある1点を中心とする回転と拡大によって，一方から他方へ移る。

定理 B [10] 任意の2つの鏡映相似な図形は，平行移動と鏡映または，ある1点を中心とする拡大とその点を通る直線による鏡映によって，一方から他方へ移る。

J. Petersenは1879年に出版した*Method and Theories for the Solution of Problems of Geometrical Construction Applied to 410 Problems* [8, pp.111-112]の中で，1点Oを中心とする回転と拡大によって移る順相似な2つの三角形に対して，点O(すなわち，この変換の不動点)を作図で求める方法を示している。その概略は以下のとおりである。

2直線AB，$A'B'$が平行でないものとして，それらの交点をPとし，3点A, A', Pを通る円と3点B, B', Pを通る円を作図する(図1)。この2円の交点のうちPと異なる点をOとすれば，Oが回転および拡大の中心である。このことは，次のようにして確かめられる。図2において，$\angle OAP = \angle OA'P$，$\angle OBP = \angle OB'P$であることから，$\triangle OAB$と$\triangle OA'B'$は

相似である。したがって，Oを中心とする適当な回転と拡大により線分 ABは線分 $A'B'$に変換される。考えている変換が順相似変換であることを考慮すれば，この変換で△ ABCが△ $A'B'C'$に移されることがわかる。すなわち，**2 円の交点**として，相似変換の中心つまり不動点を作図できるのである。

なお，直線 ABと直線 $A'B'$が平行なときは 3 直線 AA'，BB'，CC'が 1 点で交わり，その交点が拡大の中心 Oである。

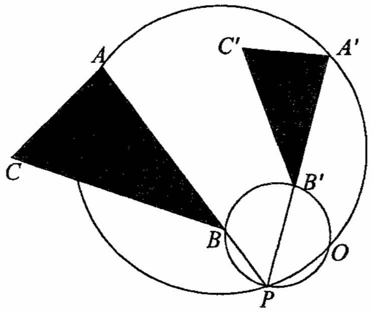

図 1

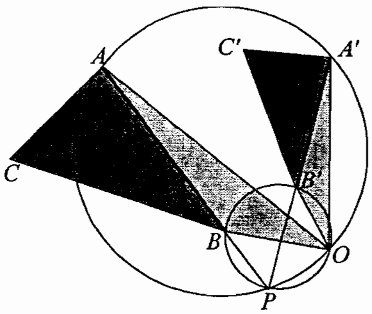

図 2

R. Lachlan は 1893 年に出版した *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry* [10, pp.128-147]の中で，Petersen の作図法をさらに詳しく説明するとともに，鏡映相似に関する定理 B を証明をしている。さらに，鏡映相似についても変換の中心，すなわち，不動点の作図方法を与えている。また，相似変換の不動点の身近な例として，机の上に縮尺の異なる 2 枚の地図を重ねて置いたときに，2 枚の地図上に示されるある同一の地点が 1 つ重なり合うことを述べている。この場所が相似変換の不動点である(不動点が 2 枚の地図の共通部分に入る場合についてであることは暗に仮定されている)。

H.S.M. Coxeter は 1969 年，*Introduction to Geometry* [12]の Second Edition への改版に際して，相似変換に関する作図について書き加えた[14, pp.73-76]。その内容は，2 **直線の交点**として相似変換の中心である不動点を求める方法である。この部分について著者は，トロント大学 2 年生の A.L. Steger から提案されたと序文で述べている。その作図方法は次のような方法である。

相似変換は，対応する 1 組の線分と，その変換が順相似変換であるか鏡映相似変換であるかによって決定される。今，与えられた相似変換により，線分 AB が，これと平行でない線分 $A'B'$ に変換されるものとする。この相似変換が順相似変換であるか鏡映相似変換かは，これらの線分をそれぞれ 1 辺とする相似な平行四辺形 $ABCD$ と $A'B'C'D'$ によって決定される(図 3(順相似変換)，図 4(鏡映相似変換))。

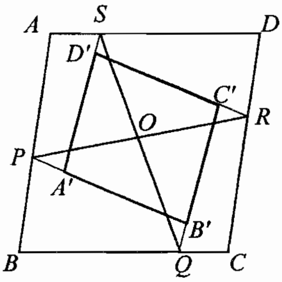

図 3

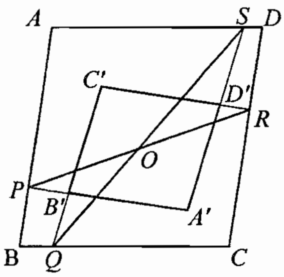

図 4

図 3，4 のように，2 直線 AB, $A'B'$ の交点を P，2 直線 CD, $C'D'$ の交点を R，2 直線 AD, $A'D'$ の交点を S，2 直線 BC, $B'C'$ の交点を Q とする。このとき，2 直線 PR, QS の交点を O とすると，O が相似変換の中心，すなわち，不動点である。[14]には点 O が不動点であることの証明も示されているが，ここでは省略する。証明は文献[17]にも掲載されている。この方法を用いて，Lachlan が述べた「相似な 2 枚の地図を机の上にずらして重ねて置いたときに重なり合う同一地点」を作図で求めることもできる。

ところで，Brouwer が不動点定理を発表したのは 1910 年であり，この時点では Petersen や Lachlan が相似変換の不動点の作図法を既に発表している（それぞれ 1879 年，1893 年)。Brouwer が不動点の存在性に関する研究に至るのに，相似変換における不動点の作図法が影響しているのだろうか。[11]によれば，Petersen はデンマークのコペンハーゲンで活動し，函数論における等角写像の研究の成果を幾何学の作図に取り入れてまとめた。一方，Brouwer はオランダのアムステルダムで活動していた。時期的にも地理的にも近くにいた 2 人の間で交流があったのであろうか。残念ながら今のところ，このことを裏付ける記録は見当たらない。

3. ランダム・ドット・パターンと視覚

紙にプロットしたランダム・ドット・パターンをトランスペアレンシーにコピーし，そのコピーを原紙の上に重ねてわずかに回転させると，同心円が視覚的に捉えられる。このときに現れる同心円の中心は，コピーを回転させたときの回転の中心であり，合同変換の不動点に対応する。このような「合同変換の不動点が視覚的に捉えられる現象」については，1964 年以降報告されている。その動きについては，J. Walker が[25,27]で紹介している。その記事によれば，1964 年に，D.M. Mackay が紙やすりのポジとネガの写真でこの現象が観察されることを報告したとのことである。1969 年には，L. Glass が「人間の視覚」という観点からこの現象について報告しており[21]，R. Pérez や E. Switkes とともにこの現象の様々なバリエーションを研究した[23,24]。J. Walker に，この現象を紹介した A.G. Klein は，コピーを取っているときに 2 枚の同一のコピーが少しずれて，この現象に気づいたという[32]。J. Walker による記事[27]には，歯科医師によるランダム・ドット・パターンを使って不動点を見つけることの応用例が紹介されている。

謝辞

この研究についての主な資料の収集は当研究所のスタッフと海外の研究者によってなされた。それにご尽力いただいた，秋山仁，平野葉一，中村義作，加納幹雄，David Avis, Vašek Chvátal, Leon Glass, Anthony G. Klein の各氏に，この場を借りて心より感謝を申し上げます。

参考文献

「写像の不動点の存在定理」に関して

1. L.E.J. Brouwer, Over de grondslagen der wiskunde, Doctoral dissertation, Amsterdam. (Defended 19 Feb. 1907) (W. Ewald, *From Kant to Hilber*, Clarendon Press の p.1285 による).

2. L.E.J. Brouwer, Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flachen in sich, *Math Ann.*, Vol. 69, 1910, pp.176-180.
3. L.E.J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Math Ann.*, vol. 71, 1912, pp.97-115.
4. W. Ewald, *From Kant to Hilbert*, Clarendon Press, 1997, p.1285.
5. ジョン・キャスティ著, 中村和幸訳,『20 世紀を動かした五つの大定理』, 講談社, 1996, pp. 79-134.
6. 野口広著,『不動点定理』, 共立出版, ワンポイント双書, 1979.
7. 高橋渉著,『凸解析と不動点近似』, 横浜図書, 2000.

「相似変換による不動点の存在とその作図方法」に関して

8. J. Petersen, *Method and Theories for the Solution of Problems of Geometrical Construction Applied to 410 Problems*, Stechert, 1879.
9. (上記の邦訳)J.ペテルセン著, 三守守訳,『幾何学作図問題解法』, 山海堂出版, 1909, p.112.
10. R. Lachlan, *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*, Macmillan & Co., 1893, pp. 128-147.
11. 秋山武太郎,『幾何学つれづれ』, 高岡書店, 1919.
12. H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1961.
13. (上記の邦訳)コクセター著, 銀林浩訳,『幾何学入門』, 銀林浩訳, 明治図書, 1965, 1982, pp. 73-79.
14. H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry, Second Edition*, John Wiley & Sons, 1969, pp. 72-76.
15. H.S.M. Coxeter & S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Washington DC: Mathe Assoc. Amer., 1967, pp. 95-100.
16. (上記の邦訳)H.コクセター・S. グテイツァー著, 寺坂英孝訳,『幾何学再入門』, 寺坂英孝訳, 河出書房, 1970, pp. 226-236.
17. M.S. Klamkin, *USA Mathematical Olympiads 1972-1986*, The Mathematical Association of India, New Mathematical Library, 1987, p. 7, pp. 45-47.
18. (上記の邦訳) M.S. クラムキン監修と解答, 国際数学オリンピッ

ク日本委員会訳,『数学オリンピック問題集（アメリカ編）』, 東京図書, 1990, pp. 12 & pp. 73-76.
19.秋山武太郎,『新編幾何学つれづれ草』, サイエンス社, 1993, pp. 194-214.
20.*CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 1999, p.1353.

「ランダム・ドット・パターンと視覚」に関して

21.L. Glass, Moire Effect from Random Dots, *Nature*, Vol. 223, August 9, 1969, pp. 578-580.
22.S.M. Anstis, Phi Movement as a Subtraction Process, *Vision Res.*, Vol. 10, 1970, pp. 1411-1430.
23.L. Glass and R. Perez, Perception of Random Dot Interference Patterns, *Nature*, Vol. 246, December 7, 1973, cover and pp. 360-362.
24.L. Glass and E. Switkes, Pattern recognition in humans: correlation which cannot be perceived, *Perception*, Vol. 5, 1976, pp. 67-72.
25.J. Walker, The Amateur Scientist: Visual illusion in random-dot patterns and television “show”, *Scientific American*, 1980, April, pp. 136-140.
26.(上記の邦訳)ジャール・ウォーカー, 市原茂訳,「アマチュア サイエンス （ランダム・ドット・パターンとテレビのスノー・ノイズでの錯覚)」, サイエンス Vol. 10 No.6, 1980, pp. 118-124.
27.J. Walker, The Amateur Scientist, *Scientific American*, 1980, November
28.(上記の邦訳)ジャール・ウォーカー, 市原茂訳,「アマチュア サイエンス（再びランダム・ドット・ディスプレイについて」, サイエンス Vol. 11 No.1, 1981, pp. 124-131.
29.D. Marr, Vision : *Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*, W. H. Freeman and Company, New York, 1982. pp. 47-48.
30.D. Kaplan and Leon Glass, *Understanding Nonlinear Dynamics*, Springer, 1995, pp. 238-240.
31.H. R. Wilson and Frances Wilkinson, Detection of global structure in

Glass patterns : implications for form vision, *Vision Research,* 38, 1998, pp. 2933-2947.

32. A.G. Klein, A personal letter to Y. Hirano, dated on 5 January, 1999.