フーリエ級数の収束問題に関して

猪狩　惺

1. フーリエ級数とは

1.1. **三角級数.** 単位円周上の関数 $f(x)$ に対して，級数

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.1}$$

を実型フーリエ級数という，ただし，a_n, b_n はフーリエの公式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \tag{1.2}$$

で定義されているものとする．また，複素型フーリエ級数は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{1.3}$$

によって定義される，ここで

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx \tag{1.4}$$

である．後者は20世紀になって現われた表記法である．オイラーの公式または三角関数を指数関で表わせば，形式的計算によって両者は一致する．

一方，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を任意に与える時，形式的な級数

$$\Omega : \quad \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.5}$$

を三角級数と呼んでフーリエ級数と区別する．

1.2. **問題.** フーリエ級数誕生の歴史についてはここでは述べない．しかし，現代の数学上に登場した当初から，ごく自然に次のような事が問題にされた．

(A) 関数 $f(x)$ は,「収束する」三角級数の和 (1.1) によって定義されるか？どのような関数が (1.1) によって表現されるか？

(B) 関数が (1.1) によって与えられた時係数 a_n, b_n はどのようにして定義されるか？公式 (1.2) によって定義されるか？

これらの問題は，Fourier，Dirichlet を経て，理論的解明は Riemann によって明確化され, Cantor, Lebesgue, などへと引き継がれる．Riemann, Lebesgue, Denjoy の名によって

知られる積分は，いずれも，この問題の解明に直接・間接関係して開発されたことは注目に値する．

1.3. **フーリエの公式について．** フーリエの公式(1.2)については，a_o は d'Alembert(1754)による，一般の a_n は天文学者の Clairaut(1757) によって，現在の用語を用いると，第 n 部分和を離散フーリエ級数とみることによって与えられた．Euler(1777) は三角関数の公式と形式的積分によって公式を示した (Lebesgue[18])．Lebesgue[18] は公式(1.2) を Euler-Fourier の公式と呼んでいる．フーリエは膨大な計算によって，公式(1.2) を与えた ([7]Art.207-219).

ここでは (1.1) の収束性の研究の発展を辿ってみたい．

2. 収束についてのフーリエの見解

級数 (1.1) の収束についのフーリエの見解 – 証明ではなく – を著書 [7]Théorie Analytique de La Chaleur によって述べる．

2.1. **出版にいたるまで．** 著書 [7] は 1822 年に出版されたが，それは Fourier の初期の研究 (1807 年, 1811 年) を含んでいる．序文と 9 つの章，2 面のグラフからなり，本文は目次，序文を含めた 639 ページ，433 の項目 (以下 Art. で表わす) に分けられている (Jacques Gabay 復刻版).

先ず，同著の出版経緯を簡単に述べることから始める．それは同著の内容を知る上でも役に立つからである．

フランス科学院は 1736 年に自然現象と熱の伝播をテーマとしたコンクールを行なったが，Fourier を除いて，Euler を含むすべての応募者は「熱の性質」を問題にしたということである．これに対し，Fourier は熱の性質が何であっても「それには変化する法則がある」という論点から論文をまとめ 1807 年に投稿した．しかし，Lagrange は三角級数についての記述に強く反対し出版に至らなかった．

1811 年「熱の伝播」は科学院のグランプリのテーマとなり，Fourier は，序文に彼の主張をより明確に「熱はまた数によって支配される」と書き，原稿を拡張して応じた．同じメンバー Lagrange, Laplace, Monge, Lacroix による審査であったけれども，賞を獲得した．しかし，審査員の完全な賛成を得られたわけではなく，熱に関する方程式は評価されたものの，三角級数の和に対する一般性，厳密性には問題ありとされた（“soit relativement à la génerarité, soit même du côté de la rigueur”)．そして再び出版は拒否された．

この原稿は 160 年後陽の目を見ることになり，詳しい解説付きで出版された ([8]).

原稿は，更に大幅に拡張されて 1822 年書物として出版された．その時は，Fourier は二つの県 l'Isère と Rhône の知事を既に終え，パリに戻っていた．Lagrange は既に死去，論客 Poisson はかつての勢いを失っていた．

2.2. **著書における問題 (A),(B) の取り扱い**. 著書 [7] において，Fourier は三角級数の収束性をどのように考えていたか，簡略に述べよう．

Art.166 において，$0 \leq x < \infty$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, $-\infty < z < \infty$ における熱方程式

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} = 0$$

が考察されている．境界値は，$\nu(x, -\frac{\pi}{2}) = \nu(x, \frac{\pi}{2}) = 0 (x > 0)$, $\nu(0, y) = 1(-\pi/2 < y < \pi/2)$ である．

ここでフーリエは解の候補として

$$\nu = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + \cdots$$

を挙げる．境界では，

$$1 = a\cos y + b\cos 2y + c\cos 3y + \cdots$$

でなければならない (Art.169)．彼は積分公式には依らないで，Wallis の公式を含むかなりの計算（極限操作には疑問が多い）によって級数展開

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \cdots \tag{2.1}$$

$(-\pi/2 < y < \pi/2)$ を得ている．本書で与えられた最初のフーリエ級数である．

そしてこの級数が収束することを示すことは容易であると書いている (Art.177)．

次に，この級数 (2.1) の第 $2m-1$ 部分和 y（厳密には部分和ではない）に対し，今日ディリクレ積分の名で呼ばれている積分公式の原型ともいうべき不定積分

$$y = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin 2mx}{\cos x}\right)dx$$

を与えている（区間の上で $f(x) = 1$ である）(Art. 179)．

長い計算の後，まとめとして4項目をあげ，収束に関して次のように述べている (Art.235):

1^o. どのような関数に対しても級数は関数の値に収束する．

3^o. 関数 $F(x)$ が与えられた時それは

$$\begin{aligned}
\pi F(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha)\,d\alpha \\
+ &\quad \cos x\int F(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha + \cos 2x\int F(\alpha)\cos 2\alpha\,d\alpha + \cos 3x\int F(\alpha)\cos 3\alpha\,d\alpha + \text{etc.} \\
+ &\quad \sin x\int F(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha + \sin 2x\int F(\alpha)\sin 2\alpha\,d\alpha + \sin 3x\int F(\alpha)\sin 3\alpha\,d\alpha + \text{etc.} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha)\left(\sum\cos i(x-\alpha) + \frac{1}{2}\right)d\alpha
\end{aligned}$$

と展開できる．

そして，収束に関しては，Art.418 でも，関数または関数の一部が三角級数で表わされないということはあり得ない，と念をおすように述べられている．

$2^\circ, 4^\circ$ はそれぞれ convolution，フーリエ積分に関する記述であるから省く．

2.3. 補足. フーリエ級数の部分和の収束性の研究には，フーリエの著書にその原型を見ることができる．積分表示は，既に述べたように Dirichlet によって完全な形で与えられ，収束問題を厳密に研究する上で決定的な役割を果たすことになる．収束性についてフーリエの扱いには，読者を困惑させる計算があり，級数の部分和の収束に関する正確な証明は Dirichlet を待たねばならなかった．また，一般的な扱いと，完全な証明にいたるまでには，新しい積分 (Riemann, Lebesgue) と長い年月を要することになった．

フーリエ積分についても次の驚くべき公式を与えている (Art.419)：

$a < x < b$ とする．そのとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-\alpha)\,dp, \\ \frac{d^{2i}f(x)}{dx^{2i}} &= \pm\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^{2i}\cos p(x-\alpha)\,dp, \\ \frac{d^{2i+1}f(x)}{dx^{2i+1}} &= \mp\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^{2i+1}\sin p(x-\alpha)\,dp. \end{aligned}$$

フーリエは，物理的な意味をもった方程式の解である級数を解釈するにあたって，数学的厳密性にこだわらない自由な発想をしている．特に，無限級数については，自由な演算をしている．最後に述べた積分は通常の収束性から言うと，明らかに無意味であるが，意味付けは Schwartz の超関数の理論によって可能となった．

3. Dirichlet の定理

Dirichlet は 1822 年から 1826 年パリに滞在し，フーリエから強い影響を受けた．1829 年ベルリンで書いた論文 [3] において，上で述べたフーリエの論述の欠落に対し，議論を進めフーリエ級数の収束に関する最初の定理，いわゆる，Dirichlet の収束定理を証明する．

3.1. Dirichlet の定理と証明. Dirichlet の論法を簡単に述べる．区間 $(0,h), 0 < h < \pi/2$ で減少する関数 $f(\beta)$ を考える．フーリエ級数の部分和が点 $\beta = 0$ で収束することを言うために，先ず積分

$$\int_o^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,d\beta$$

を考察する．この積分が $i \to \infty$ のとき，$\frac{\pi}{2}f(+0)$ に収束することを示すのであるが，そのために，積分区間を $((\nu-1)\pi/i, \nu\pi/i), \nu = 1,2,\ldots,i$ に分割し，その上の積分値を $\pm\rho_\nu K_\nu$

と書く，ただし，$K_\nu = |\int_{(\nu-1)\pi/i}^{\nu\pi/i} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} d\beta|$ である．そのときは，

$$f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{i}\right) \le \rho_\nu \le f\left(\frac{\nu\pi}{i}\right)$$

となる．$i \to \infty$ のとき $K_\nu \to k_\nu = |\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} d\gamma|$ である．従って，級数 $\sum \pm\rho_\nu K_\nu$ は，形式的には，$f(+0)(k_1 - k_2 + k_3 - \cdots) = f(+0)\frac{\pi}{2}$ に収束する．実際に，m を固定して，和 $\sum \pm\rho_\nu K_\nu$ を $\nu < m$ と $\nu \ge m$ の部分に分けて計算するといった，当時としては画期的技法を用いてそれを正当化する．

3.2.　更に，$[-\pi, \pi]$ 上の一般の関数 φ のフーリエ級数の第 n 部分和を，所謂ディリクレ積分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)} d\alpha \tag{3.1}$$

によって表わす．そして次の定理を得る：

その極限値は，極小，極大が有限個である場合には，

$$\frac{1}{2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]$$

である．

これは今日 Dirichlet の収束定理とよばれるもので，フーリエ級数の収束に関する最初の定理である．

3.3. **付記.** (a) Dirichlet は，更に条件を緩め無限個の不連続点，無限個の極値をもつ場合を許したいと考え，そのためには何かをしなければならない (il faut seulemen) とし，次のような条件をあげた：$[-\pi, \pi]$ の任意の区間 (a, b) は φ が連続であるような部分区間を含む．

その証明は与えられていない．“il faut seulemen” は Kahane[13] によると当時の用法から，必要条件であるとも十分条件であるとも解釈できると述べている．しかし，いずれにせよこれは正しくない．

(b) この問題に関連して，Dirichlet はいたるところ不連続な関数の例を示した．

(c) Dirichlet が与えた上の条件はディリクレ積分の積分可能性に関係して生まれたものであり，積分概念を厳密化または拡張するという試みを促すことになった．

Dirichlet のこの論文は，その後の実解析に多大な影響をもたらすことになる．実際，(1) Riemann はこの問題に関連して，さまざまな面白い関数の例を挙げている．これは Weierstrass のいたるところ微分不可能な連続関数の例へとつながる．(2) いわゆるリーマン積分の定義の動機となり，(3) Riemann は関数がリーマン積分可能であるための条件を

与えるため，Lebesgue のヌル集合の概念を暗示する集合を考察した．また，(4) Dirichlet の定理は，その後現われる様々なフーリエ級数の収束条件とその証明の原型となった．

4. DIRICHLET 以後 CARLESON まで

4.1. **発散について．** Dirichlet 以後のフーリエ級数の収束性に関する研究の発展を述べる前に，発散性についての研究状況をみることにする．

(a) フーリエ級数が収束しない関数の最初の例は 1876 年 Du Bois-Reymond[4] によって構成された：

区分的に単調，原点で振動する連続であって，フーリエ級数が原点で発散する連続関数が存在する．

その後，Du Bois-Reymond の定理は Fejér, Legesgue などによって別証明が与えられた．後者の証明は

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|dx \to \infty$$

を示すことにある．ここで $D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$ である．これは連続関数上の線形汎関数 $f \to \int D_n(x)f(x)dx$ のノルムが無限大に増加すると言うことに他ならない．これは，後に Banach-Steinhaus の定理として理論化された．

(b) $L^p(\mathbb{T})$ を $|f(x)|^p$ が区間 $[-\pi, \pi]$ 上でルベーグ積分可能な関数 f の集合とし，ルベーグ空間と呼ぶ．L^p の関数を p 乗可積分関数という．ルベーグ空間の関数に対する収束性についての最初の完全な回答は，A. Kolmogorov[14], [15] によって与えられた：

ほとんどすべての点で発散するフーリエ級数をもつ $L^1(\mathbb{T})$ の関数が存在する (1923).「ほとんど」は「すべて」としてもよい (1926).

(c) 更に

任意に Lebesgue 測度 0 の集合を与えると，その上で発散するフーリエ級数をもつ連続関数が存在する．

(J. -P. Kahane - Y. Katznelson[12],1966)．

収束問題を扱うためディリクレ積分の評価と関連して Riemann はヌル集合に極めて近い（リーマン積分の概念の範疇でヌル集合を定義したといえる）概念を導入したが，ヌル集合の概念によって収束問題は完全に記述されることになった．

以下 (4.2) を除いて概収束に限って話を進める．上で述べた定理と以下で述べる Carleson の定理と併せてみると，その理由と共に，ルベーグ Lebesgue 積分がいかにフーリエ級数展開の理論に適合した概念であるかがはっきりすると思う．

4.2. **条件付収束.** フーリエ級数の部分和が収束するために関数が満たすべき条件については，Dirichlet 以後数多くの研究がなされた．収束性はディリクレ積分 (3.1) の収束性と同値であるから，大方の収束条件は Dirichlet がしたようにディリクレ積分の評価に帰着させるものである．その主なものについては [23] に述べられているので省略する．

ここでは，上で述べた Dirichlet の条件の範疇とは少々異なる，Hardy-Littlewood による一つの定理 (1932) を述べるにとどめる：

(i) $f(x+h)-f(x)=o(\log\frac{1}{|h|})(h\to 0)$,

(ii) フーリエ係数のオーダーが $O(n^{-\delta})$

ならば，f のフーリエ級数は点 x で $f(x)$ に収束する．

この定理は，関数とそのフーリエ係数の大きさを組み合わせており，その点で他の収束性の条件とは著しく異なり，むしろマイナーに扱われていたように見える．実際，Zygumund の旧著 [23] では丁寧に述べられているものの新版では削除されている．しかし，そのアイデアは以下で述べる Carleson の定理で用いられる証明方法と併せると興味深い．

4.3. **Littlewood-Paley の理論.** 今日，Littlewood-Paley の理論と呼ばれている一連の論文 [19](1931-37) の定理の一つとして，ルベ - グ空間において，概収束の問題を初めて関数の局所的な性質に関する条件を付けることなく収束の問題を取り扱った（実はもう少し詳しい評価が与えられているがここでは省く）：

$L^p(\mathbb{T})$ $(p>1)$ の関数のフーリエ級数の部分和を $S_n(f)(x)$ とすると，

$S_{2^n}(f)(x)$ はほとんどすべての点で収束する．

Paley は論文 [21](1932) に於いて区間 $(0,1)$ 上の “remarkable” な直交関数による級数展開を議論し，L^p $(p>1)$ の関数の直交展開の第 2^n 部分和はほとんどすべての点で収束することを示している．現在では，“remarkable” な直交関数系は次の様に翻訳される：それは可算直積 2 進群の指標であり，2 進群を区間 $(0,1)$ に射影し，指標に適当な順番をつけるならば，$(0,1)$ 上の関数 f は 2 進群乗の関数とみなされる．そして直交展開（群上のフーリエ展開）の第 2^n 部分和は，関数 $f(x)$ の長さ 2^{-n} の区間の平均となる．

恐らく Littlewood-Paley の収束定理を含む理論の背景はここにあったと思われる．

4.4. **Carleson の定理.** 1966 年に発表された L. Carleson の論文 [2] によって，1 変数フーリエ級数の収束問題は次のような定理で解決された．

$L^2(\mathbb{T})$ の関数のフーリエ級数の部分和はほとんどすべての点で収束する．

後に R. Hunt[11] によって，L^2 の関数は L^p $(p>1)$ としてもよいことが示された．上で述べた Kolmogorov, Kahane-Katznelson の定理と併せると，L^1 近傍の空間についての精密な議論は残されたものの，Carleson の結果はルベ - グ積分の範疇における完全な決着といってもよいであろう．

証明は大変に複雑，難解であり，C. Fefferman[5] による別証明があるけれども，簡略化または平易化とはいえない．Carleson の証明法のアイデアを簡潔に述べることは現在では筆者には不可能であるが，敢えて乱暴に言うことが許されるならば，次のようになる：f は 2 乗可積分関数とする．ディリクレ積分 (3.1) を変形し

$$S(x,p)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ipy}f(y)}{x-y}dy$$

とかく，$S(x,p)$ の評価が本質的である．$S(x,p)$ を評価するために，

(i) §4.3 で述べた Paley の 2 進群のアイデアをモデルにしたと思われる変形をする，つまり，区間 $[-\pi,\pi)$ のフーリエ級数の部分和を 2^{ν} 等分した区間を剰余群とみなし，x を含むその一つを ω_ν とかく．積分 $S(x,p)$ をその剰余群上のフーリエ級数の部分和に対応した形に変換する．

点 x を固定する毎に長さ $2\pi 2^{-\nu}$ の剰余群の列 $\omega_o\supset\omega_1\supset\omega_2\supset\cdots\ni x$ が決まり，それに従い，対応した積分（部分和）が，除外集合の外の点では退化する．

(ii) その時勿論誤差が生じる．それらは Marchinkiewicz, Calderón-Zygmund による除外集合，特異関数の評価の方法を用いる，

(iii) §4.2 で述べた，Hardy-Littlewood の収束判定定理で用いられたフーリエ係数の評価を思い起こさせる評価をおこなう．

(i),(ii),(iii) を組み合わせることによって最終的に

$$\sup_p|S(p,x)|<\infty$$

が無視可能な除外集合上で成り立つことを示す．実際には (i),(ii),(iii) それぞれの段階で複雑な修正とその評価が要求される．

4.5. **4 節の補遺．** フーリエ級数の収束問題に対して総和法を用いるという考えは d'Alembert に遡るといわれている．それは L. Fejér 以前にも，解析関数の境界値，Parseval の等式への応用などの研究に利用されていたが，Fejér の論文 [6](1900) が発表されて以来, 統一的な扱い，拡張がなされ，近似論などに有効に用いられるようになった．しかし，フーリエ級数の収束性問題に関しては，最も効果的に応用されるのは多変数の場合である．

多変数の場合，収束問題は一通りではない．部分和を半径 ρ の格子点 $n\in\mathbb{Z}^d$ にとる場合（球形和），一辺の長さ 2ρ の立方体の格子点にとる場合（平方和）各辺の長さを独立に無限大にもっていく場合（長方形和）などで著しく収束性が異なる．ここでは，収束性の解析に総和法が効果的な役割を果たす．

5. 一般の三角級数の収束

Riemann の研究において，一般の三角級数の研究と積分概念の研究は深く関わりあっている．前者については，(i) 三角級数 (1.5)

$$\Omega : \frac{a_o}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

によって表わされる関数の研究と，(ii) 関数が三角級数によって表わされる時，級数は一意であるかという一意性定理と一意性集合の研究となって引き継がれる．

後者について，Riemann はもし級数がいたるところで収束すれば，係数は 0 に収束すると述べているがこれは自明ではない．この問題は Cantor によって研究された (1870-72). 更に Cantor は級数の一意について議論を深め ([1] 参照) 集合論の出発点となった．そこでは三角級数論と集合論の深い関わりを見ることが出来るが，本稿では我々の主題に関係する (i) について，簡単に最終的な結果のみ記すことにする．これらは主にロシヤの Lusin 学派と呼ばれる研究者達によって研究された．

問題を一般的な形におきかえる．

単位円周上の実関数 $f \leq g$ が与えられた時，三角級数が存在して，その部分和 $S_n(x)$ は

$$\liminf S_n(x) = f(x), \quad \limsup S_n(x) = g(x)$$

となるか？

S. V. Konjagin(1988)[16]：

上の命題が成り立つための必要十分条件は，f, g は可測，かつ $f(x) = -\infty$ となる点 x の集合と $g(x) = \infty$ となる点の集合の差は測度 0 であることである．

D. E. Menšov(1954)[20]:

次のようなユニヴァーサルな三角級数が存在する：任意に可測関数 f を与える時，その級数の部分和を適当に選べば，f に殆ど全ての点で収束する．

References

[1] G. Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen, 5(1872), 123-132.

[2] L. Carleson, Convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., **116**(1966), 135-157.

[3] P. G. L. Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, J. reine und angew. Math., 4(1829), 157-169.

[4] P. Du Bois-Reymond, Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierchen Darstellungsformeln, Abhand. Akad. München., **12**(1876), 1-103.

[5] C. Fefferman, Pointwise convergence of Fourier series, Ann. of Math., **98**(1973), 551-571.

[6] L. Fejér, Sur les fonctions bornées et intégrables, C. R. Acad. Sc. Paris, **131**(1900), 984-987.

[7] J. Fourier, Théorie Analytique de La Chaleur, Édition Jacques Gabay, Paris, 1988.

[8] I. Grattan-Guiness and J. Ravetz, Joseph Fourier 1978-1830, a survey of his life and work, Cambridge Ma. MIT Press, 1972.

[9] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some new convergence criteria for Fourier series, J. London Math. Soc., **7**(1932), 252-256.

[10] J. Herivel, Joseph Fourier, the Man and the Physicist, Oxford, Clarendon Press, 1975.

[11] R. Hunt, On the convergence of Fourier series, Orththogonal Expansions and their Continuous Analogues, Proc. Conf., (1967),235-255, Southern Ill. Univ. Press, 1968.

[12] J. -P. Kahane et Y. Katzneson, Sur les ensembres de divergencedes séries de trigonométriques, Studia Math., **26**(1966), 305-306.

[13] J. -P. Kahane and P. -G. Lemarié-Rieusset, Fourier Series and Wavelets, Part I, Goldon-Breach Publ., Luxemburg, 1995.

[14] A. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergent presque partout, Fund. Math., **4**(1923), 324-328.

[15] A. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergent partout, C. R. Acad. Sci. Paris, **183**(1926), 1327-1328.

[16] S. V. Konjagin, Limits of indeterminacy of trigonometric series, Transl. in Math. Notes (Mat. Zametki), **44**(1988), 910-920.

[17] D. ラウグヴィッツ著，山本敦之訳，リーマン–人と業績–，シュプリンガー・フェアラーク東京,1998.

[18] H. Lebesgue, Leçons sur les Séries Trigonométriques, Gauthier-Villars, Paris , 1906.

[19] J. E. Littlewood and R. E. A. C. Paley, Theorrems on Fourier series and power series, (I), J. London Math. Soc., **6**(1931), 230-233; (II), Proc. London Math. Soc., **42**(1936), 52-89; (III), ibid., **43**(1937), 105-126.

[20] D. E. Menšov, On limits of indeterminacy in measure of partial sums of trigonometric series (Russian), Mat. Sbornik, **34**(1954), 557-574.

[21] R. E. A. C. Paley, A remarkable system of orthogonal functions I, II, Proc. London Math. Soc., **34**(1932), 241-279.

[22] B. Riemann, Gesammelte Mathematische Werke, wissenschaftriche Nachlass und Nachträge (ed. R. Narasiman), Berlin, Springer-Verlag, 1990.

[23] A. Zygmund, Trigonometrical Series, Warsaw, 1935.

[24] A. Zygmund, Trigonometric Series, 2nd ed. vol.I, II, Cambridge Univ. Press, 1959.