

対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事

平井 武 (Kyoto)

hirai.takeshi@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

1. **問題提起.** 昨年 10 月の数学史シンポジウムにおいて, 群の表現の指標について報告したが, その際, シュアー (J. Schur = I. Schur, 1875-1941) の「有限群の射影表現」に関する下記の有名な三部作をリストアップし, それについて数学史的問題提起をした.

[Sch1] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20-50 (全集での論文番号は 4 なので, [S4] とも引用する)

[Sch2] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *ibid.*, **132**(1907), 85-137 (= [S10]).

[Sch3] J. Schur, Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *ibid.*, **139**(1911), 155-255 (= [S16]).

私の報告 [平井 2] から, (少々改変しながら) その部分を引用しよう.

“論文 [Sch3] では, n 次の対称群 \mathfrak{S}_n および交代群 \mathfrak{A}_n の表現群が決定されている. $n \geq 4$ に対してそれぞれ, 生成元系 $\{J, T_1, T_2, \dots, T_{n-1}\}$, $\{J, T'_1, T'_2, \dots, T'_{n-1}\}$, を持ち, 次の基本関係式 (1), (2) を持つ群を $\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ と書く (E は単位元):

$$J^2 = E, (T_\alpha)^2 = J, (T_\beta T_{\beta+1})^3 = J, T_\gamma T_\delta = J T_\delta T_\gamma; \quad (1)$$

$$J^2 = E, (T'_\alpha)^2 = E, (T'_\beta T'_{\beta+1})^3 = E, T'_\gamma T'_\delta = J T'_\delta T'_\gamma, J T'_\alpha = T'_\alpha J; \quad (2)$$

$$(1 \leq \alpha \leq n-1, 1 \leq \beta \leq n-2, \gamma < \delta-1).$$

すると, $n \geq 4, n \neq 6$ で \mathfrak{S}_n の表現群は $\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ の 2 つであり, $n = 6$ では $\mathfrak{T}_6 \cong \mathfrak{T}'_6$ となって 1 個である. 交代群 \mathfrak{A}_n については, $n \geq 4$ のとき, 表現群は 1 個である. その位数は, $n \neq 6, 7$ のとき $2 \cdot (n!/2)$ であり, 表現群 \mathfrak{B}_n は \mathfrak{S}_n の表現群 \mathfrak{T}_n を \mathfrak{A}_n に制限して得られる. $n = 6, 7$ のときは, 表現群の位数は, $6 \cdot (n!/2)$ である.

この論文の主要部では, \mathfrak{S}_n および \mathfrak{A}_n のすべての射影表現が決定されている. そして, これらの群の既約射影表現の指標 (= 表現群の既約指標) が

すべて求められている。これはフロベニウス (F.G. Frobenius, 1849-1917) の $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n$ に対する結果を踏まえての集大成である。

今後への私の数学史的問題意識は例えば次のようなものである。

(イ) \mathfrak{S}_n の既約指標の決定と、表現群 $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}'_n$ の既約指標の決定とはどのように絡み合っているのか？

(ロ) $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}'_n$ の既約指標はどのようにして求められ、どこまで具体的に書き下されているか？”

さらに、いま追加して、次の問題も調べてみたい。

(ハ) シュアーは、 \mathfrak{S}_n のすべての既約射影表現の指標を決定したが、射影表現ではない既約表現の指標の決定に貢献しているのか。そうだとすると、師フロベニウスとの仕事の重なりはどうなっているか？2人の共著論文 **75, 76** (末尾の論文リスト参照) の内容は？

(ニ) \mathfrak{S}_n の既約指標の決定は、どの程度具体的であったか？(その後、いろいろな計算方法が提案されているが、彼等は一般論のほかに何か計算式を与えたか？)

著書 [平井1] の注意 13.1 で n 次の対称群 \mathfrak{S}_n や交代群 \mathfrak{A}_n の既約指標の決定について、フロベニウスのほかにシュアーも貢献したとともとれる書き方をしたので、その責任上も (ハ) にけりをつけたい、と思っている。

2. シュアーの射影表現3部作におけるフロベニウスの引用.

(I) 論文 [Sch1] では、フロベニウスの論文が頻繁に引用されている。本論考の末尾における論文番号に従って書くと、

53. Über Gruppencharaktere,

54. Über die Primfactoren der Gruppendeterminante,

56. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen,

59. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II,

の4編が最も頻繁に引用されている。また、下記も [Sch1] の p.39 で1回引用されている。

57. Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen,

(II) 論文 [Sch2] では、フロベニウスの論文としては、指標および表現に関する仕事のリストより以前のものが 2 編ほど引用されているにとどまる。

(III) 長編の論文 [Sch3] では、1 頁目に

60. Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe,

61. Über die Charaktere der alternierenden Gruppe,

68. Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe,
および、自分自身の学位論文 [S1] を引用している。

[S1] J. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (1901 年 Berlin における Inaugural-Dissertation (博士論文))

この [S1] は、本質的には、 $GL(n, \mathbb{C})$ の正則な既約表現と対称群の既約表現の対応 (今日これを Schur-Weyl の双対とよぶ) を与えている。その重要な内容にもかかわらず、少数が印刷配布されただけで、雑誌には掲載されなかった。従って、É. Cartan, H. Weyl はかなり遅くまでこの結果を知らなかった、とのことである。

p.177 に 61 を引用 ;

p.183 に下の自分自身の論文を引用 :

[S7] J. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharacteren,

p.186 に 60 および次を引用 :

57. Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen,

p.193 に [S7] を引用 ;

p.195 に次を引用 :

54. Über die Primfactoren der Gruppensdeterminante,

p.215 に 60 を引用 ;

p.240 に次を引用 :

[S11] J. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen,

3. 関連するシュアアの論文のリスト.

なお、上に掲げた研究課題 (イ), (ロ), (ハ), (ニ) に関連して、精査すべきシュアアの論文を掲げておく (すべて全集第 1 巻)。

[S1] J. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (Inaugural-Dissertation) , 1901, Berlin. Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, 1, pp.1–71.

[S6] J. Schur, Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen,

[S7] J. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharacteren, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 406– (1905).

[S9] J. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen,

[S11] J. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 664– (1908).

[S14] J. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen,

4. まとめ.

今回の数学史シンポジウムでの講演は、下の文献中の [参考書] としてのもをものとしたもので、まだ原論文に直接当たってるところまでは踏み込めなかった。この報告の文も文献をリストアップし、引用関係を調べたにとどまっている。

今後、時間を掛けて論文を読んで調べてみる予定である。とくに、[S1] などはよく玩味したい。これらの論文の数学的内容は、単に「数学史」の枠内にとどまるものではなく、現在の数学の研究に生かされるものと思う。

フロベニウス：有限群の指標および線形表現に関する論文リスト
すべて Frobenius 全集 Band III より

53. Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

54. Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

56. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 944–1015(1897).

57. Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 501–515(1898).

58. Über die Composition der Charaktere einer Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 330–339(1899).

59. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 482–500(1899).

60. Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 516–534(1900).

61. Über die Charaktere der alternierenden Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 303–315(1901).

68. Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).

69. Über die Primfactoren der Gruppendeterminante II, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 401–409(1903).

73. Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 558–571(1904).

With I. Schur,

75. Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 186–208(1906).

76. Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 209–217(1906).

次の [参考書] は数学史の本であるが、数学的内容はしっかりしている。フロベニウス、シュアーの原論文を読む前に、この本の

Part VI, Chapter 10: The Berlin Algebraists: Frobenius and Schur, を読んでおくと、予備知識として適当である。かく申す筆者も、この研究会の講演の準備をするのに大いに利用した。

[参考書] Thomas Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups, An Essay in the History of Mathematics 1869–1926*, Springer, 2000.

[平井 1] 平井 武, 線形代数と群の表現, I, 朝倉書店, すうがくぶつくす 20, 2001.

[平井 2] 群の表現の指標について (経験よりの管見), 第 12 回数学史シンポジウム (2001), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, 23, pp.84-94, 2002.