ガウスの算術幾何平均をめぐって

西和田　公正[1]

2002.10.20

1　序

2 数 a, b の算術幾何平均 (以後 agM と書く) とはアルゴリズム

$$(1.1) \qquad a_0 = a, \;\; b_0 = b, \;\; a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \;\; b_n = (a_{n-1}b_{n-1})^{1/2}, \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

によって定義される 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の共通の極限値として定義される値のことである。agM そのものはガウスによる発見ではなく、それ以前にも Lagrange による研究などが知られている。ガウスは１４歳の時 (1791) よりこのテーマに興味をもったといわれ、その後十数年間非常に精力的な研究を行った。agM は彼が生涯にわたって愛着を持っていた研究テーマの一つといえるが、その理由としては、次の三点が考えられる。第一には、agM 理論そのものに対する興味である。彼の天才をもってしても、すべてをくみ尽くすことができないほどの奥行きの深さをもっていた。第二には、agM が多くの新しい理論を生み出すきっかけ、動機付けになったのではないかと想像されることである。レムニスケート関数、楕円関数論、級数論などから、最終的には Modular 関数の理論に至るまで、理論の要所には agM の姿がみえてくる。第三にはコンピュータの無い当時にあって、agM は種々の数値計算を実行するときの、ある種の効率的な計算プログラムの担い手としての役割もあったようである。

さて、agM 理論を考えるとき、a, b が正数の時には、数学的にもよく知られ、ガウス数学史という観点からもよく研究されている。しかし、a, b を複素数に取るとき、agM の値は格段に複雑な挙動を示すようになる。ガ

[1]京都大学総合人間学部, 同大学院人間・環境学研究科

ウスが複素数の領域でも agM を考えたことは知られているが、最終的にどこまで、どのような方法で到達したのか不明なところもある。その辺の状況を少しでも整理してみようというのが本講演の目的であるが、取りあえずガウスの足跡をたどりながら話しを進める[1]。

2 数値計算

$0 < b < a$ とすると, 定義より $b_n < b_{n+1} < \cdots < a_{n+1} < a_n$ および $a_n - b_n \leqq \frac{1}{2^n}(a-b)$ がすぐいえる。このことより、2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限値 $M(a,b)$ に収束することが分かる。

ガウス自身次のような計算例を挙げている (Werke[3],S.363–364)。

$a = 1$	$b = 0.2$
$a_1 = 0.6000\ 00000\ 00000\ 00000$	$b_1 = 0.44721\ 35954\ 99937\ 93928$
$a_2 = 0.52360\ 67977\ 49978\ 96964$	$b_2 = 0.51800\ 40128\ 22268\ 36005$
$a_3 = 0.52080\ 54032\ 86123\ 66485$	$b_3 = 0.52079\ 78709\ 39876\ 24344$
$a_4 = 0.52080\ 16381\ 12999\ 95413$	$b_4 = 0.52080\ 16380\ 99375$
$a_5 = 0.52080\ 16381\ 06187$	$b_5 = 0.52080\ 16381\ 06187$

この例からも、実際の収束の速さは上の不等式から推測されものよりかはるかに早いようである。すなわち僅かな回数の計算で極限値に近い値にたどりつくことが可能で、計算機のない当時、計算好きのガウスが agM を重宝な道具とみなしことも肯ける。

また現代にあっても、コンピュータの性能テスト(?)などの為、円周率 π を小数点以下何億桁も計算させることがあるが、その場合も計算効率を上げるため agM が使用されることがある (Borwein[8])。

3 アルゴリズムを逆向きにたどると

a_{n+1}, b_{n+1} がきまると、2次方程式

$$X^2 - 2a_{n+1}X + b_{n+1}^2 = 0$$

の2つの解として a_n, b_n が定まる。(根と係数の関係!) このような発想からガウスは a, b から出発して逆向きに進んでいく数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, $n = 0, -1, -2, \cdots$

[1]残念ながら、この講演では複素数の agM まで話しが及ばなかった。

を考えた (Werke [3], S.362)[2]。更に先ほどと同様に、数値計算の例まで挙げている (Werke [3], S.363)。

$a = 1$	$b = 0.2$
$a_{-1} = 1.97979\ 58971\ 13271\ 23927\ 9$	$b_{-1} = 0.02020\ 41028\ 86728\ 76072\ 1$
$a_{-2} = 3.95948\ 86986\ 4971$	$b_{-2} = 0.00010\ 30955\ 7682$
$a_{-3} = 7.91897\ 73959\ 512$	$b_{-3} = 0.00000\ 00013\ 481$
$a_{-4} = 15.83795\ 47919\ 02$	$b_{-4} = 0.00000\ 00000\ 00000\ 000057$

これらの逆向き数列はもちろん共通の値に収束しないが、$\{2^{-n}a_{-n}\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ は収束するようにみえる。ガウスはこの極限値を調べるため、次のような細工を考えた (Werke [3], S.397)。

数列 $\{c_n\}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ を $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$ によって定義する。簡単な計算で $a_n = a_{n+1} + c_{n+1}$, $c_n = 2\sqrt{a_{n+1}c_{n+1}}$ となるので, $\bar{a}_n = 2^{-n}a_{-n}$, $\bar{c}_n = 2^{-n}c_{-n}$ とおくと、

$$\bar{a}_0 = a, \quad \bar{c}_0 = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \bar{a}_n = \frac{\bar{a}_{n-1} + \bar{c}_{n-1}}{2}, \quad \bar{c}_n = (\bar{a}_{n-1}\bar{c}_{n-1})^{1/2}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

となり、新たな agM のアルゴリズムが出来あがる。

結局、a, b が与えられたとき、アルゴリズム (1.1), (3.1) を経由して 2 つの agM の値, $M(a, b)$ と $M(a, \sqrt{a^2 - b^2})(= M(a + b, a - b))$ が得られる。

ここまでなら単なる"細工"ということにすぎないが、ガウスはその後の楕円積分の研究を通して、$M(a, b)^{-1}$ と $i\,M(a + b, a - b)^{-1}$ が異なった基本サイクル上の同一の楕円積分に対応しているという認識（または同程度の認識）に到達した。この結果は彼の agM 研究の前半部分の金字塔である。

4 整級数展開

最初に agM の簡単な性質を列挙しておく。

$$M(a, b) = M(b, a), \tag{4.1}$$

$$M(a, b) = M(a_1, b_1) = \cdots = M(a_n, b_n), \tag{4.2}$$

$$M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b), \quad \lambda > 0. \tag{4.3}$$

[2] このように agM アルゴリズムを逆向きにたどることは、Lagrange の 1785 年の論文 "Sur une nouvelle méthode de calcul intégral" の中でも行われている。

Werke [3](S.365–369) において次のような整級数展開が試みられている。

$$M(1+x,1) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3 \cdots \tag{4.4}$$

$$M(1+x,1-x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{64}x^4 - \frac{11}{256}x^6 \cdots \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{M(1+x,1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^2 x^{2n} \tag{4.6}$$

ガウス自身がつけた証明は現代の解析学のスタンダードからすると厳密とはいえないが、大体次のようなものである。

［(4.4) の証明］

整級数展開が存在すると仮定して

$$M(1+x,1) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{4.7}$$

とおく。$M(1,1) = 1$ より $c_0 = 1$。 次に $x = 2t + t^2$ を (4.7) に代入すると、

$$\begin{aligned} M(1+x,1) &= 1 + c_1(2t+t^2) + c_2(2t+t^2)^2 + \cdots \\ &= 1 + 2c_1 t + (c_1 + 4c_2)t^2 + (4c_2 + 8c_3)t^3 + \cdots \end{aligned} \tag{4.8}$$

一方で、

$$\begin{aligned} M(1+x,1) &= M(\frac{2+x}{2}, \sqrt{1+x}) = M(1+t+\frac{t^2}{2}, 1+t) = (1+t)M(1+\frac{t^2/2}{1+t}, 1) \\ &= (1+t)\left\{1 + c_1\frac{t^2/2}{1+t} + c_2\frac{(t^2/2)^2}{(1+t)^2} + \cdots\right\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.9) を更に t の整級数に展開し、(4.8) と比較すると $c_1 + 4_2 = (1/2)c_1$, $4c_2 + 8c_3 = 0$ などが成立し、$c_2 = -1/16, c_3 = 1/32$ が得られる。

(4.5) の証明では変数変換 $x = 2t/(1+t^2)$ が用いられる。大体似たような方法なので省略する。(4.4),(4.5) では、どちらの場合も最初の 4 項までで、一般項を求めるには至っていない。

［(4.6) の証明］

偶関数であることから

$$\frac{1}{M(1+x,1-x)} = 1 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots$$

とおける。変数変換 $x=2t/(1+t^2)$ を行うと、

$$\frac{x}{M(1+x,1-x)}=\frac{x}{M(1,\sqrt{1-x^2})}=\frac{2t}{(1+t^2)}\frac{(1+t^2)}{M(1+t^2,1-t^2)}=\frac{2t}{M(1+t^2,1-t^2)}$$

一番左と右の項の級数展開を比べると、

$$\frac{2t}{(1+t^2)}\left(1+c_2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+c_4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4+\cdots\right)=2t(1+c_2t^4+c_4t^6+\cdots)$$

左辺を更に展開し、再び未定係数法にもちこむと、今度は規則性がはっきりし一般項まで求めることができる。すなわち $c_n=((2n-1)!!/(2n)!!)^2$ となる。

5 なぜレムニスケート

レムニスケートは1694年に Jacob Bernoulli と Johann Bernoulli によって独立に発見されたと云われる。この曲線を数学の研究対象とすることは18世紀の数学者の情熱をかき立てたが、その熱気は時間の経過とともに冷めていき、今日では殆ど消滅したといえる。その歴史的経緯の全貌をここで述べる余裕はない。単なる数学史の枠組みを越えた、ヨーロッパ精神史に関わる問題のように思える。

レムニスケートの導入法はいろいろあるが、次のように考えると2次曲線のひとつの延長線上にある曲線として捉えることができる。

平面上の動点 P と2定点 F_1,F_2 までの距離をそれぞれ r_1, r_2 とおく。r_1, r_2 がみたす関係式に従って、P の軌跡が次のようになることはよく知られている。

$$\begin{array}{lll} r_1+r_2=\text{定数} & \cdots\cdots & \text{楕円} \\ r_1-r_2=\text{定数} & \cdots\cdots & \text{双曲線} \\ r_1\div r_2=\text{定数} & \cdots\cdots & \text{円（直線）} \end{array}$$

そして最後に残っている四則演算、すなわち $r_1\cdot r_2$=定数、に対応するのがレムニスケートである。ただし、レムニスケートの通常の形状 (∞) を導くためには上の定数を a^2 ($a=(F_1,F_2$の距離$)/2$) とおかないといけない。

もう少し具体的な計算をしてみよう。$F_1(-a,0)$, $F_2(a,0)$, $P(x,y)$ とおくと、

$$r_1^2\cdot r_2^2=\left\{(a+x)^2+y^2\right\}\cdot\left\{(a-x)^2+y^2\right\}=a^4.$$

従って

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

極座標 $x=r\cos\vartheta,\ y=r\sin\vartheta$ になおすと、

$$r^2=2a^2\cos 2\vartheta$$

この式より、レムニスケートの周長は簡単に計算できる。全周の 1/4 部分は次式であたえられる。

$$\frac{s}{4}=\int_0^{\pi/4}\sqrt{r^2+(dr/d\vartheta)^2}\,d\vartheta=a\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-2\sin^2\vartheta}} \tag{5.1}$$

この最後の式を 2 つの変数変換、$\cos 2\vartheta=\cos^2\varphi$ と $\sin^2\vartheta=x^2/(1+x^2)$ を用いて書き直すと:

$$\frac{s}{4}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=a\sqrt{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{a}{\sqrt{2}}\tilde{\omega} \tag{5.2}$$

(5.2) で 2 つの変数変換を行ったが、2 番目の変換 $\vartheta\to x$ はガウス自身が用いた記号 $\tilde{\omega}:=2\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ との関係を明らかにするために行った (Werke[3], S.404)。また、最初の変換 $\vartheta\to\varphi$ によって、レムニスケートの周長と第一種の楕円積分との関連が明らかになる。すなわち、

$$F(\theta,x)=\int_0^{\theta}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}$$

とおくと、

$$\frac{s}{4}=aF\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。

6 解析学の新しい分野

ここでガウス日記のなかの有名な日付 1799.5.30 をもつ部分を引用してみる (Werke[6],S.542)。

> Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $=\frac{\pi}{\tilde{\omega}}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, qua re demonstrata prorsus novus campus in anlysi certo aperietur.

ここでガウスは 2 つのことを述べている。一つは、$M(\sqrt{2},1)=\pi/\tilde{\omega}$ という事実の認識であり（小数点以下 11 桁まで一致するという数値実験に

よる)、もう一つはこの事実を厳密に証明することは、解析学の新しい分野を開くことに匹敵する、という期待である。

まず、この日記の時点でガウスは本当に上の等式の証明を知らなかったのかどうか疑問符が投げかけられる。この等式を偶然の数値計算で見つけたというのはちょっと考えにくい。もし完全に厳密でなくとも何らかの証明を知っていたとすればそれは前節の級数展開を用いる方法であろうと推測できる。すなわち、前節の結果と楕円積分を次のようにして結びつけることができる。

$$\frac{1}{M(1+x,1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^2x^{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}} \tag{6.1}$$

ここで2番目の等号については、第3項の被積分関数を x で整級数展開し、項別に積分すれば第2項と一致することが分かる。一方で、(5.2) と上で $x=1/\sqrt{2}$ とおいた式を組合わせると、

$$\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2M(1+\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}})}=\frac{\pi}{\sqrt{2}M(\sqrt{2},1)} \tag{6.2}$$

となり、日記内の等式が導かれる。

しかし、上に紹介した証明にせよ、次節で述べるLanden変換を用いるより厳密な証明にしても、巧妙であっても、“解析学の新しい分野”を開くというほど革新的でもなければ、深い内容をもつものではない。

とうことは、ガウスは本当に証明を知らなかったからこそ、上のような大風呂敷を広げたものともいえるかも知れない。

それとも、第3の可能性として、証明そのものより、証明をきっかけにして広がっていく壮大な理論のビジョンを頭に描きながら、上のような発言をしたということも、完全には否定できない....

7 楕円積分

(6.1)に基づく証明が厳密でない理由はもちろん $M(1+x,1-x)^{-1}$ が解析関数になることがまだ言えていないからである。ガウスは後に
$M(1+x,1-x)^{-1}$ の整級数展開を用いなくともよい巧妙な証明を発見した。その時期は1799年11月頃といわれる。

まず問題を次のように定式化して、Werke[1](S.352–353) にある証明を紹

介する。

$$\frac{1}{M(a,b)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} \tag{7.1}$$

[(7.1) の証明]

まずLanden 変換とよばれる積分の変数変換を定義する。

$$\sin\varphi = \frac{2a\sin\varphi'}{(a+b)\cos^2\varphi' + 2a\sin^2\varphi'}$$

$0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ に対して $0 \leqq \varphi' \leqq \pi/2$ が対応する。また少し込み入った計算になるが、

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi' + b_1^2\sin^2\varphi'}}$$

が成立する。したがって(7.1) の右辺を $I(a,b)$ とおくと

$$I(a,b) = I(a_1,b_1) = \cdots = I(a_n,b_n) = \cdots = I(1,1)M(a,b)^{-1} = M(a,b)^{-1}$$

となり、(7.1) の証明が終了する。

(7.1) で $a=1,\ b=\sqrt{1-x^2}$ とおけば、(6.1) が、従って (6.2) が導かれることは明らかであろう。

(7.1) はきれいな公式であるが、$M(a,b)^{-1}, M(a+b,a-b)^{-1}$ の相互関係を明らかにするためには余り適切な表現ではない。そこで、(7.1) の積分で変数変換 $x=\sin^2\varphi$ を行うと

$$\frac{1}{M(a,b)} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a^2(1-x)+b^2x)}} \tag{7.2}$$

となることに注意する。

次に、右辺の積分区間を $0\to-\infty$ に変更した式に(ただし $\mathrm{Im}\sqrt{x(1-x)(a^2(1-x)+b^2x)} \geq 0$)、変数変換 $(1-x)(1-x')=1$ を行うと:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(a^2(1-x)+b^2x)}} = \frac{i}{\pi}\int_0^1 \frac{dx'}{\sqrt{x'(1-x')(a^2(1-x')+(a^2-b^2)x')}}$$

となる。

右辺は $iM(a,\sqrt{a^2-b^2})^{-1} = iM(a+b,a-b)^{-1}$ に等しいので、次式が成り立つ。

$y^2 = x(1-x)(a^2(1-x)+b^2x)$ とおくと、

$$\frac{1}{M(a,b)} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{y} \quad (y>0) \tag{7.3}$$

$$\frac{i}{M(a+b,a-b)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{dx}{y} \quad (\mathrm{Im}\, y>0) \tag{7.4}$$

[(7.3) と (7.4) の解釈]

ガウス数学史という文脈から少し外れるかも知れないが、上の 2 つの式の意味を複素関数論の語彙を用いて解説してみたい。

今まで通り $0<b<a$ と仮定する。微分形式 $\eta = dx/y$ は特異点 $0,1,$ $\lambda = a^2/(a^2-b^2), \infty$ を持つように見えるが、定義域となるリーマン面を次のように構成すると特異点は解消する。

E_1 と E_2 はともに複素球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ のコピーとする。それぞれの正の実軸にある区間 (0,1) と (λ,∞) にカットを入れ、E_1 の各カットの上端、下端と E_2 の対応するカットの下端、上端を同一視する。このようにして E_1 と E_2 をくっつけたものを E とおく。

E の複素構造については、上記 4 点以外の場所では自明であろう。4 点のうちたとえば $z=0$ のところでは、局所座標を $t=\sqrt{z}$ とおく。すると 0 の近傍では、$\eta = 2dt/\sqrt{(1-t^2)(a^2(1-t^2)+b^2t^2)}$ となり、η は $t=0$ で正則である。同様にして E のすべての点で η は正則になる。

このトーラス E の 2 つの基本サイクルを次のように定義する。

$$\gamma_1 : 0 \xrightarrow{E_1\text{の上端}} 1 \xrightarrow{E_1\text{の下端}} 0, \qquad \gamma_2 : 0 \xrightarrow{E_1\text{負の実軸}} \infty \xrightarrow{E_2\text{負の実軸}} 0$$

(7.3) と (7.4) は次のような基本サイクル上の積分として解釈することができる。

$$\frac{1}{M(a,b)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1}\eta, \qquad \frac{i}{M(a+b,a-b)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2}\eta \tag{7.5}$$

さて E 上の 0 でない正則微分形式は定数倍を除いて唯一つ、すなわち η しか存在しないことはよく知られている。これよりリーマン面 E を主体に考えたとき、(7.5) における個々の量は重要でなく、むしろ 2 つの周期の比

$$\tau = i\frac{M(a,b)}{M(a+b,a-b)}$$

が E にとって固有な量であることが分かる。

ガウスはこの“Uniformisierung” τ の重要性に気づき、さらに驚くべきことに、（ヤコビの）テータ関数を介して、agM のアルゴリズム $a_n, b_n \longrightarrow M(a,b)$ と数列の収束 $\exp(\pi 2^n \tau) \longrightarrow 0$ が互いに対応していることを発見した (Werke[5.3], S.255–256)。

この考えは複素数に対する agM を研究する際の一つの有力な方法論になった。

文献

Carl Friedrich Gauß, 1777–1855, *Werke*.

Band III (Analysis)

[1] S.331–355, Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis, quo singule partes describuntur uniformiter esset dispertita, Göttingen 1818

[2] S.357–360, 上記論文の報告 (Anzeige)

[3] S.361–403 (遺稿), Arithmetisch-geometrisches Mittel,

S.361–371, ParsI: De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithmet.-geometricorum.

S.372–374, ParsII: De functionibus transscendentibus quae ex differentiatione mediorum arithmetico-geometricorum oriuntur.

S.375–403, “Fortsetzung der Untersuchungen über das arithmetisch geometrische Mittel”.

Band VIII (Bd.I–IV の補遺)

[4] S.98, Theorema elegantissimum. (agM と agM の対数に関する“公式”)

Band X, 1 (遺稿と書簡)

[5] S.172–286, Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels

[5.1] S.172–231 (遺稿より)

S.172, I Specimen termini medii si nomine uti licet arithmetico-geometrici

S.177, II Reihenentwicklung und Beziehungen zum Ellipsenumfang

S.181, III Differential- und Funktionalgleichungen

S.184, IV Investigatio functionum quae ex evolutione mediorem arithmeticogeometricoreum oriuntur

S.194, V Theoria sinus lemniscati universalissime accepti

S.207, VI Differentiatio mediorum arithmetico-geometrica pertinentes

S.209, VII Algorithmi ad media arithmetico-geometrica pertinentes

S.213, VIII Der bilineare Algorithmus

S.217, IX Die Beziehung zwischen den unendlich vielen Werten des agM. Unmittelbare Anwendung der Theorie auf die elliptischen Transzendenten und auf die Rektifikation der Ellipse

[5.2] S.232–251 (書簡), agM に関係する部分

S.245, Schumacher an Gauß (5.4.1816)

S.247, Gauß an Schumacher (4.1816)

[5.3] S.251–257, Abriß der Theorie des agM (L. Schlesinger による解説)

[5.4] S.257–283, Erläuterungen zu 5.1 (同上)

[5.5] S.283–286, Erläuterungen zu 5.2 (同上)

[6] S.485–574, Tagebuch, 日記の中で agM に関係する箇所：

Nr.98 (30.5.1799), S.542, $M(\sqrt{2},1) = \pi/\tilde{\omega}$

Nr.100 (Nov.1799), S.544, 新しい発見

Nr.101/102 (Dez.1799), S.544, agM と楕円積分

Nr.105 (6.5.1800), S.546, 楕円積分

Nr.106 (22.5.1800), S.547, agM 理論の補足

Nr.109 (3.6.1800), S.550, 無限個の値の集まりとしての agM

Nr.139 (20.6.1809), S.569 agM と無限積

Nr.140 (29.6.1809), S.569 同上

Band X, 2 (ガウスの業績に関する解説、論説)

[7] L. Schlesinger, Über Gauß Arbeiten zur Funktionentheorie, 2. Abhandlung

その他の文献

[8] Borwein, J. & P. Borwein, *Pi and the agm: a study in analytic number theory and computational complexity,* Wiley, 1987.

[9] Cox, D. A., The arithmetic-geometric mean of Gauss. *Enseign. Math.,* **30**(1984), 275-330.

[10] Fuchs, W., Das arithmetisch–geometrische Mittel in den Untesuchungen von Carl

Friedrich Gauß ,*Gauss–Gesellschaft,* Mitteilungen Nr.9(1972), 15–38.

[11] Geppert, H., Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. *Math. Annalen* **99**(1928), 162-180.

[12] Lagrange, J.L., Œuvres, Vol.II. Gauthier-Villars, Paris, 1868.

[13] Nishiwada, K., A holomorphic structure of the arithmetic-geometric mean of Gauss. *Proc. Japan Acad.* **64**(1988), 322-324.

[14] 西和田公正, 複素算術幾何平均のある構造定理, 人間・環境学 **3**(1994), 1-14.

[15] Nishiwada, K., Algorithm of the arithmetic-geometric mean and its complex limits. *Hokkaido Math. J.* **26**(1997), 541-564.

[16] von David, L., Arithmetisch-geometrisches Mittel und Mudulfunktion. *J. für die Reine u. Ang. Math.* **159**(1928), 154-170.