平成１４年１０月１９－２０日　津田塾大学数学史研究会

# 確率解析の歴史

飛田　武幸
名城大学　理工学部

## 1. 歴史

Jacob Bernoulli (1654 – 1705) の Ars Conjectandi (1713) にもどることが大切と思われる。その思想は prediction である（conjecture ではない）。Stochastice という言葉が始めてここに登場した。　以下は Elart Collani による解説である。

According to his diary, which Bernoulli called *Meditationes*, the main ideas were developed during the 80s of the 17th century.

**Definition of probability**

He probably realized at one stage that the outcome of *any* real phenomenon is uncertain, where uncertainty could not administered to some special cause. For some phenomena variability in the outcomes is large, for other it is small. The occurrence of certain events is preferred, the occurrence of others neglected.

Thus, in a given situation each possible event carries a degree of preference similar as in a given situation any object has a certain temperature. Jakob Bernoulli defines

*The probability (of an event) is the degree of certainty (of its occurrence) and differs from the latter just as a part from the whole.*

**Determining probabilities**

The probability of an event exists because of our experience. The question is how to determine its actual value. An satisfactory answer could change the world. In the 90s Jakob Bernoulli succeeded to prove that determination of actual values of probabilities is possible. He notes:

*It is possible to make so many observations that it is arbitrarily more probable that the proportion of trials in which the one or the other side gains lies between two given limits which can be arbitrary close to each other than outside these limits.*

In our words Bernoulli developed a procedure for measuring the actual value of a probability of an event,with arbitrary large reliability and accuracy depending on the expense.

Bernoulli characterizes his findings:

*Human beings use in their daily life the same procedure. It is clear to everybody that it is not sufficient to have only one single observation, but that a large number of observations are necessary.*

He notes about the significance of his findings:

*I judge this result as more valuable as if I would have succeeded in finding the quadrature of the circle; because even if the latter could be completely found it would be rather useless.*

With other words Jakob Bernoulli selected as evaluation criterium for his results their usefulness rather than the mathematical difficulty. Consequently, Bernoulli did not judge it mathematically but scientifically.

**Defining the Science of Stochastics**

Having explained the probability of an event as a quantity which exists according to our experience and having developed a method to determine scientifically its actual value, Jakob Bernoulli defines a new branch of science:

(Ars Conjectandi Part IV. Chapt. II より)

*To conjecture something means to measure its probability. Therefore, the Art of Conjecturing or* **Stochastics** *is defined as the Science which deals with measuring probabilities of events as accurate as possible, so that we may decide and act as it is better, more satisfactory and more founded. Exactly this constitutes the wisdom and prudence of philosophers and statesmen.*

During the first years of the 18th century, Bernoulli had written down his findings in his masterpiece which he entitled *Ars conjectandi*, i.e. the *Art of Conjecturing* or in Greek *stochastike*, probably having in mind *La Logique* which in Latinwas entitled *Ars cogitandi*.

**Beginning and end of Stochastics**

Before Jakob Bernoulli could complete and publish his masterpiece, he passed away in 1705. Finally after 8 years the **Ars conjectandi** was published by Jakob Bernoulli's nephew Niklaus. However, in the meantime several other approaches to probability of well-known scientists were published and discussed in Europe. In Great Britain Edmond Halley published a more statistical approach, in Germany there was Leibniz with his ideas and in France many renown scientist were working in the field.

The result were many ideas, definitions and methods having the same aim but being not consistent.

The Science of Stochastics was forgotten before it could be firmly established.

**Wiener space,　Brownian motion.**

A. Einstein.　1905.　ブラウン運動を数学の対象とした。

N. Wiener　(1894- 1964),

関数空間上の確率測度を導入する試み。

Differential space　J. Math. And Physics 2 (1923), 131-174.

その後の業績については後出。

Cameron-Martin　(R. H. Cameron and W. T. Martin)

private lectur by Cameron at University of Minnesota

積分の計算が得意で興味をもったのが始まりで、自然に Wiener measure の重要性を認識し、研究を続けた。

一連の Wiener measure, analysis on Wiener space についての著しい業績がある。

確率解析の重要な仕事の一つ。有限次元の解析とは異なることの認識。

1944 年から始まり他著者との共著を含め約 30 篇の論文がある。初期の頃の

Wiener measure の translation (1944) による変換、

c.f. The Kakutani dichotomy on product measure (1948),

Fourier-Wiener transform (1947) は重要な貢献であろう。

Variational calcculus についても言及している。

後の Feynman integral に対する貢献等興味深い。　Cameron の、この話題について D.A. Storvick との共同研究は、晩年まで続けられた。

C.G.J. Jacobi,　Crelle Journal 17 (1837), 68-82.

Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichingen.

Euler equation,　Jacobi field,　Van Vleck determinant

I.E. Segal の仕事

Tensor algebras over Hilbert spaces . I, Trans. AMS 81 (1956), 106-134.

"　　　　II, Ann of Math. 63 (a956), 160-175.

Distributions in Hilbert space and canonical systems of operators. Trans. AMS 88 (1958), 12-41.

Wiener space を利用した交換関係(Bose-Einstein canonical systems) の表現など量子力学への発展に注目したい。

M. Kac (1914 – 1984)

On distributions of certain Wiener functionals. Trans. A. M. S. 65 (1949) 1-13.

On some connections between probability theory and differential and integrl equations. Proc. 2nd Berkeley Symp. (1951), 189-215.

Wiener functional の平均で２階微分方程式の解を与えた。

Can one hear the shape of a dram. Amer. Math. Monthly 73, (1966), 1-23.

Probability and related topics in physical sciences. Interscience Pub. 1959.

いわゆる Feynman-Kac formula の始まり。

I.M. Gel'fand and A.M. Yaglam .

Integration in functional spaces and its application in quantum physics.

J. Math. Physiscs. 1 (1960), 48-69

L. Gross

Logarithnic Sobolev inequality

January, 2001, AMS Session for Gross Fest がもたれた。

H.-H. Kuo,

Gaussian measures in Banach spaces. . Springer Lec. Notes in Math.#463, 1975.

White noise distribution theory. CRC. Press. 1996.

Malliavin calculus

Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. SDE Kyoto, 1976, Published 1978.

White Noise Analysis （内容は後出）

Essentially based on "innovation" theory.

Reductionism から始まる。

**Markov process**

1950 年代の後半あたりから急速に進歩し、確率過程論の中心的な研究テーマとなった。また、微分方程式論との関連も密接となり、数学の多くの分野や物理学とも交流が盛んになった。最近は、分子生物学や Finance の問題にまで応用されている。また、そこからの話題の提供も多い。

A. N. Kolmogorov

Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnumg. Math. Annalen . 104 (1931), 415-458.

に始まった Markov process の解析的研究がある。

確率論と解析学との強い本質的な関係を見出した。

1933 年には著書 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung により確率論を数学の中に位置づけた。

S. Bernstein

確率微分方程式の創始者として有名である。

著書に Équations différentielles stochastique. Actualites sci. et ind. 738, Hermqann (1938) 5-32, がある（その前に, この課題で 1933 年の Steklov Inst. の報告がある）は確率微分方程式の起源として、評価したい。そこでは $\sqrt{\Delta t}$ を explicit に用いて、確率微分方程式の説明をしている。

その後の豊富な研究成果、及びその応用は、ここに述べるまでもない。これにより確率のみならず、さらに一般の確率解析の重要さについての認識が深まった。 この理論は、その後、 W. Feller, R.L. Stratonivich, E.B. Dynkin, K. Itô をはじめとする日本の研究者達を経て大きく開花した。

Ito calculus の展開。

**古典関数解析と確率解析**

P. Lévy (1986 – 1971)

P. Lévy は確率解析（関数解析）について、最高の数学者といってよいであろう。

1911 年の学位論文に始まって、関数解析の論文・著作は多数あるが、多くは確率解析特にホワイトノイズ解析として認識される。

1919 年には Revue de Métaphysique et de Morale に「抽象空間における確率法則」と題する論文で無限次元球面上の一様な測度とガウス分布とを結び付け、確率解析の黎明を示唆している。

これが 1922 年の Leçons d'analyse fonctionnelle に自然につながっていくのである。

この改訂増補版は 1951 年に Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. として出版された。とくに第 I 部の若干と第 II 部は Hadamard equation に示唆された変分解析に重要な基礎を与え、かつ展開を試みている。第 III 部は確率解析として言い換えられる部分が多い。たとえばホワイトノイズ汎関数や Lévy Laplacian などである。

確率解析についてのみ、文献のいくつかを掲げると

Thesis : 1911 年 Les équations intégro-différentielles définissant des function de lignes. 120 ページ

Foundation : (College de France) 1919 年 Les lois de probabilité dans les ensembles abstraits.

Leçons d'analyse fonctionnelle, 1922

Wiener space の起こりに影響を与えた。

Calcul des probabilites. 1925

Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, 1951

White noise analysis 参照

N. Wiener の業績 (確率解析に関するもの)

Differential space. J. Math. And Phys. 2 (1923), 131-174.

Generalized harmonic analysis. Acta Math. 55 (1930) 117-258.

Fourier transforms in the complex domain. With R.E.A.C. Paley, 1934.

The homogeneous chaos. Amer. J. math. 60(1938). 897-936

The discrete chaos. Amer. J. Math. 65 (1943) 279-298.

Cybernetics. Wiley, 1948. 2nd. Ed. 1962.

Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series. The M.I.T. Press. 1949.

Nonlinear problems in random theory. The M.I.T. Press. 1958.

## ２．ホワイトノイズ解析

Canonical representations of Gaussian process. 1960.

Princeton Note: Stationary stochastic processes. Princeton Univ. Press, 1970

Carleton Univ. Math.Notes # 13: Analysis of Brownian functionals. 1975

Brownian motion (in Japanese) 岩波書店 1975 ; english translation, Springer-Verlag, 1980.

White noise. An infinite dimensional calculus. Kluwer Academic Pub. 1993.

一方 1967-8 年の筆者の Princeton Lecture で "Stationary stochastic processes" のタイトルの下で、ホワイトノイズ解析を提唱した。無限次元回転群を取り上げて無限次元の調和解析の側面からの内容も加えて、解析の手法を豊かにした。その後、1975 年夏、Carleton 大学の集中講義で、さらにホワイトノイズの超汎関数を導入し、今日のホワイトノイズ解析の基礎を固めた。

2000 American Math. Soc. Subject Classification.

**60H40**

なお、工学上で A. V. Balakrishnan は確率制御やコントロールの問題に Wiener 過程でなく、ホワイトノイズを使って定式化を試み、応用面で貢献した。

**3. Innovation approach**

現時点で思えば、ホワイトノイズ解析の原点は innovation theory にあったといっても過言ではない。

*Innovation の brief historical notes.*

J. Bernoulli. Ars Conjectandi, 1713 について Conjecture でなく prediction を想起したい。これは別格として，最近の経過をみよう。

P. Lévy,

1937 Monograph. Chapt. VI Sect.39 Premières notions sur les probabilité dénombrables.

1948 Monograph. Chapt II Sect. 9, Équations différentielles stochastiques

$$\delta X(t) = \varphi(t, dt, X(t), \xi, \eta, \ldots\ldots)$$

1953 Univ. of Calif. Lecture Notes. Stochastic infinitesimal equation として

$$\delta X(t) = \Phi(X(s), s \leqslant t, Y, t, dt).$$

M. Rosenblatt

1960 年代、時系列の innovation について論じた。離散パラメータであるため、特殊な困難さがあった。

N. Wiener

1958 Book. Nonlinear problems in random theory.

Coding and Decoding.

N. Wiener – P. Masani による一連の prediction theory についての仕事の中にも、innovation の考えが活かされている。

応用面を重視したアプローチとして、

T. Kailath et al.

1968 – 1971　An innovation approach to least square estimation. I – IV.

A.N. Shiryaev も類似のアプローチがある。また、H. Ogura も応用面で innovation を有効に用いている。

一方

Canonical representations of Gaussian processes. などホワイトノイズ解析の中では　常に innovation が背後にあった。この趣旨をより具体化した最近の報告として

T. Hida and Si Si,　An Innovation Approach to Random Fields. - Application of White Noise Theory -, World Scientific Pub. Co. 2003.

飛田武幸、ホワイトノイズと関数解析。Seminar on Probability. vol.60, 確率論セミナー、2002.

がある。

おわり