低次数の有限線型群

上智大学数学科
篠田健一

0. 複素係数 2 次特殊線型群, $SL(2,\mathbb{C})$, の有限部分群の分類は良く知られている. 有限部分群はある内積を不変にするので特殊ユニタリ群, $SU(2)$, の部分群と考えてよく, すると次の完全系列[1]より, 特殊 3 次直交群, $SO(3)$, の有限部分群の分類に帰着される.

$$1 \to \{\pm 1\} \to SU(2) \to SO(3) \to 1$$

$SO(3)$ の有限部分群は巡回群, 二面体群, 4 次交代群 A_4, 4 次対称群 S_4, 5 次交代群 A_5 のいずれかに同型である. [2] これらに対応して $SU(2)$ の部分群が定まる. Dihedral group, Binary dihedaral group, Binary tetrahedral group, Binary octahedral group, Binary icosahedral group とよばれる. [3]

これらの群とアフィン リー環の Dynkin-Coxeter 図形との興味深い関係が McKay により見つけられ McKay 対応とよばれる. この対応は不変式論, 有理二重特異点の解消, 複素半単純リー環などとも関係し, 数学的に豊富な内容を提供している [McKay80]. したがって次に $SL(3,\mathbb{C})$ の場合を考えてみよう, というのは, ごく素朴な発想である. そのためには, まず分類が問題になるが, これは２０世紀のはじめに H.F. Blichfeldt により完成されている [Blichfeldt03].

本稿ではその証明の概略を, その後の有限群論の進展と合わせて振り返る.

以後, Z_n は n 次巡回群, D_n は位数 $2n$ の二面体群, S_n は n 次対称群, A_n は n 次交代群をそれぞれ表す. また群 G, N, F について $G = N.F$ と書いたならば, G は F の N による拡大であることを示す. つまり次の完全系列が存在する.

$$1 \to N \to G \to F \to 1$$

1. G を $SL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群とし $V = \mathbb{C}^3$ とする. G は V に自然に作用している. G が V の真の部分空間を不変にするとき, G は可約であるという. G が可約であれば G が次のいずれかの型の群と同型であることは明らかである.

(A) 可換群,

(B) $GL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群,

$(GL(2,\mathbb{C}) \supset G' \simeq G$ とするとき対応は $G' \ni g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g^{-1} \end{pmatrix} \in G)$

以後, G は既約とする.

[1] 山内恭彦, 杉浦光夫「連続群論入門」, 培風館, p.45 参照

[2] H. Weyl "Symmetry", Princeton. 参照

[3] 正標数をふくめての分類は 鈴木通夫「群論, 上」, 岩波, 参照

2. $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3, \dim V_i = 1 (i = 1, 2, 3)$ かつ G が集合 $\{V_1, V_2, V_3\}$ の上に推移的に作用するような V の部分空間の集合 $\{V_i\}$ が存在するとき G は非原始的であるという．(存在しない時, 原始的という．) この場合推移性から G は $\{V_i\}$ の上に A_3 または S_3 として作用する．したがってある $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ の有限可換部分群 A が存在し, G は次のいずれかと同型となる．
(C) $A.A_3$
(D) $A.S_3$
以後, G は (既約かつ) 原始的とする．

3. G が $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ の中心 $Z = Z_3$ 以外の真の正規部分群 N を含むとする．N が可約の場合は G は可約か非原始的となるので矛盾．

次に N が非原始的とし, N は集合 $\{V_1, V_2, V_3\}$ (ただし $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3, \dim V_i = 1 (i = 1, 2, 3)$) の上に推移的に作用しているとする．$S = S[V^*] = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ を V 上の対称代数とし $V_1 = \{v \in V \mid x_2(v) = x_3(v) = 0\}, \ldots$ となっているとする．このとき $x_1x_2x_3$ は N の相対不変式である．他に N の 3 次斉次相対不変式がなければ, $x_1x_2x_3$ は G に対しても相対不変であり, したがって G は非原始的となる．よって $t_0 = x_1x_2x_3$ 以外に N の相対不変な 3 次斉次式が存在しなければならない．計算によりそれらは

$$t_i = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\omega^i x_1x_2x_3, \quad (i = 1, 2, 3), \ (\omega^3 = 1, \omega \neq 1)$$

であることがわかり, N の構造も定まる．また G は集合 $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ の上に作用し, したがって S_4 の部分群 G' をひき起こすが, G' には固定点はなく, また互換を含まないことも示すことができる．

これらの考察より次の群を得る．まず $\sigma_1 = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2), \sigma_2 = \mathrm{diag}(\omega, \omega, \omega), \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ と置くと $N =< \sigma_1, \sigma_2, \tau, \rho >$ としてよく ($N \simeq 27.2$), G は次のいずれかと同型となる．
(E) $N.Z_2$
(F) $N.(Z_2 \times Z_2)$
(G) $N.A_4$

4. 次に $G/G \cap Z$ が単純である場合を考える．この時, 鍵になるのは次の定理である．

定理 1 ([Blichfeldt03],[BDM16]). H を $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ の原始的な有限部分群とする．p を $|H|$ の素因子とすると $p \leq 7$ である．

主にこの定理より $G/G \cap Z$ は次のいずれかであることがわかる．

$$A_5, A_6, PSL(2,7), SL(2,8)$$

さらに Z との拡大について検討することにより G は次のいずれかの群と同型であることを示すことができる [Blichfeldt03, II, §14-§17]．またこれらは実際に $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ の部分群として実現できる．

(H) A_5
(I) PSL(2,7)
(J) $A_5 \times Z$
(K) $\mathrm{PSL}(2,7) \times Z$
(L) $Z.A_6$

最後に原始的な群 G は (G)-(L) の型の群を正規部分群として含むことがないことを示して分類が終る．まとめると

定理 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ の有限部分群は次のいずれかの群と同型である．

(A) 可換群,
(B) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群,
(C) $A.A_3$
(D) $A.S_3$
(E) $27.2.Z_2$
(F) $27.2.(Z_2 \times Z_2)$
(G) $27.2.A_4$
(H) A_5
(I) $\mathrm{PSL}(2,7)$
(J) $A_5 \times Z$
(K) $\mathrm{PSL}(2,7) \times Z$
(L) $Z.A_6$

5.

定理 2. G を $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ の有限部分群とする．$p > 7$ とするとシロー p 群は正規部分群である．

定理 1 は定理 2 より導かれる．実際, 定理 2 を仮定し $p > 7$ とする．シロー p 群 P は巾零なので monomial, つまり非原始的である．いま $p > 3$ なので P の S_3 における像は $\{1\}$, したがって P は可換群であり, 仮定より正規である．Z と異なる可換な正規部分群をもてば原始的ではない．すなわち定理 1 の対偶が示された．

Blichfeldt は次の定理 3 を示し, それから定理 2 を導いた．

定理 3 ([Blichfeldt03])**.** G を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の有限部分群とする．位数の素因子がすべて $(n-1)(2n+1)+1$ 以上である元の全体は, (単位元とともに) 部分群をなす．

定理 3 から直ちに次の定理が導かれる．

定理 4. G を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の有限部分群とする．$p > (n-1)(2n+1)$ であればシロー p 群は正規部分群である．

Blichfeldt はこれらの定理を線型代数と円分体の初等的な性質を用いて示した．

6. この定理 4 は多くの数学者を引きつけたようである. まず R. Brauer は自身が創始したモヂュラー表現論を用い次の深い定理を示した.

定理 5 ([Brauer42]). G を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の有限部分群, $g=|G|$ とし p は g の素因子で, $g=g'p, (g',p)=1$ とする. G のシロー p 群が正規でなければ, $p \leq 2n+1$. ここで等号が成立するのは $G/G\cap Z$ が $\mathrm{PSL}(2,p)$ に同型である時に限る. ただし Z は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の中心である.

伊藤昇は可解群の場合について次を示した.

定理 6 ([Ito54]). p を素数, G を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の有限可解部分群とする. $p>n+1$ であればシロー p 群は正規部分群である.

伊藤は $p=n+1$ の場合も考察している.
この一連の定理の締めくくりとして W.Feit と J. Thompson は予想されていたであろう次の定理を示した.

定理 7 ([FT61]). p を素数, G を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の有限部分群とする. $p>2n+1$ であればシロー p 群は正規部分群である.

証明には定理 5 と定理 6 を本質的に使い, 有限群特有の議論, "counter example of minimal order", で証明を進める.

7. これらの論文を読んでみようと思った動機であるが, 3 次元の McKay 対応を調べていて不変式の具体形が必要になり [YY93] を読んだのだが, これには Blichfeldt 以後の有限群の発展については触れられていなかった. それで, J. McKay に示唆されたこともあり, 私より少し上の世代では常識に属することかもしれないが, 調べてみようと思った次第である.

一番の感想は, やはり R. Brauer の仕事の深さである. さすがに数学者集団を有限単純群の分類に向かわせただけのエネルギーを秘めている. 次に感じたのは, Brauer は相当 Blichfeldt の仕事を意識していた, または影響を受けていたのではないかということである. 定理 4 の証明を紹介しなかったが, モヂュラー表現との関係を予感させるものである. また Brauer 自身, 素数次数, 特に 5 次の有限線型群の分類を行っている [Brauer67]. 数学史の話としては, これらのことにもっと切り込むべきであったかもしれない. 例えば
"From Blichfeldt to Brauer; from the side of modular representation"
のように. 残念ながら今回はそこまで準備はできなかった.

Brauer について興味を持たれた方は [Curtis99] をお読みください. またこの話の題と中身がずれてしまいましたが, 10 次までの有限線型群については Feit の報告 [Feit76] をご覧下さい.

References

[BDM16] H.F. Blichfeldt, L. E. Dickson, G. A. Miller, *Theory and Application of Finite Groups*, Dover, New York, 1916.

[Blichfeldt03] H.F. Blichfeldt, *On the order of the linear homogeneous groups, I, II, III, IV*, Trans. Am. Math. Soc., **4** (1903), 387-397; **5** (1904), 310-325; **7** (1906), 523-529; **12** (1911), 39-42.

[Blichfeldt17] H.F. Blichfeldt, *Finite collineation groups*, The Univ. Chicago Press, Chicago, 1917.

[Brauer42] R. Brauer, *On groups whose order contains a prime number to the first power, I, II*, Am. J. Math. **64** (1942), 401-420; 421-440.

[Brauer67] R. Brauer, *Über endliche lineare Gruppen von Primzahlgrad*, Mth. Ann. **169** (1967), 73-96.

[Curtis99] C. W. Curtis, Pioneers of represéntaion theory: Frobenius, Burnside, Schur and Brauer, History of Mathematics vol.15, AMS and LMS, 1999.

[Feit76] W. Feit, *On finite linear groups in dimension at most 10*, Proceedings of the conference on finite groups, Academic Press, (1976), 397-407,

[FT61] W. Feit and J. G. Thompson, *Groups which have a faithful representation of degree less than* $(p-1)/2$, Pacific J. Math. **11** (1961), 1257-1262.

[Ito54] N. Ito, *On a theorem of H. F. Blichfeld*, Nagoya J. Math. **5** (1954), 75-77.

[McKay80] J. McKay, *Graphs, singularities, and finite group*, in Santa Cruz, conference on finite groups (Santa Cruz, 1979), Proc. Symp. Pure Math., AMS **37**, 1980, pp.183-186.

[YY93] Stephen S.-T. Yau and Y. Yu, *Gorenstein quotient singularities in dimension three*, Memoirs Amer. Math. Soc., **505**, Amer. Math. Soc. 1993.