１９００年代前半における確率論の大変貌
(確率解析の興隆と発展)

渡辺信三 （立命館大学）*

数学史といっても、自分が今日まで関わってきた分野の数学に関心があり、この論説がその分野　－私の場合確率論であるが－、に限られることをまずお許し頂きたい。確率論が賭け事の問題における数理から始まって数学としての体裁を整えるのは１７世紀の頃である。一方私は、５０年近く前の学生のときに現代確率論を学び、今日までその研究を主な仕事として生きてきた。この現代確率論が、昔から続いてきた確率論とどう関わり、それがどう変貌して現代確率論に生まれ変わったのか、自分の思い出や回想を多く交えて述べたいと思う。

私は現代確率論を伊藤清先生から教わった。先生のお名前は、京大理学部に入学したときに配布された学事要項やガイダンス等で始めて知った。特に秋月康夫先生が、教室案内で、"伊藤君は世界に誇りうる数学者だ"と紹介されたり、２回生の時の西田俊夫先生の数理統計学の講義で、Kolmogorov と並んで伊藤先生の名が出てきて、お会いする前から先生に対する期待のようなものがあった。そして、３回生で数学科に分属することになり、丁度その年、Princeton 大学での研究生活を終えて京都大学にお戻りになられた直後の伊藤先生から「数学解析」の講義を授かった。１９５６年、９月のことであり、それが私と先生との最初の出会いであった。その講義に惹きつけられ、先生のご専門の確率論がどんな学問か良くは知らなかったが、出来れば先生について勉強したいという強い思いをそのときに抱いたのであった。

４回生になって、確率・統計という授業で、伊藤先生から直接、現代確率論についての講義を聞いた。当時はまだ古いスタイルの確率論の教科書も出回っていたし、全国の大学でも、現代確率論を講義し得る教師はまだ少なかったように思われる。先生は、１９４４年に、岩波の大判の叢書 －現代数学叢書－ で、「確率論の基礎」という本を表され、それは既に確立していた現代確率論について書かれた日本で最初の成書でなかったかと思う。カタカナ書きの本で、私は学生時代に、百万偏辺りの古本屋で手に入れることが出来た。４回生のときの講義も、基本的な部分は大体この本に従ったものといって良いであろう。ところで、幸いなことに２００４年の春、この本の新版が、装いも新たに岩波書店から復刊された。その本のカヴァーにある紹介は、この論説の趣旨と重なるものがあるので、岩波の宣伝をするつもりは

*本研究は文部科学省のオープンリサーチセンター整備事業（平成１６年度ー平成２０年度）による私学助成を得て行われた。

ないが、ここで引用する。”１９３０年代始めに、コルモゴロフによってまったく新しい意味付けをあたえられた確率論、その誕生の興奮さめやらぬ時期に、確率論の基礎から具体的問題への対応方法まで、わかりやすくまとめられたのが本書である。後半では、のちに「伊藤の公式」として名高い式の導出の過程が見られるなど、単なる確率論の解説にとどまらず、その後、新たな展開を見せる伊藤理論の原点がここに存在する。”そして、この「確率論の基礎」(新版) において、池田信行氏が、巻末に「概要とその背景」というタイトルで約２０頁に渉る解説をお書きになっている ([1]) 。そこでは、この本の背景になっている２０世紀始めの確率論の大変貌、その胎動から大きな飛躍へと進むありさまが鮮やかに描かれている。この論説は、この池田氏の解説に、その趣旨において、また内容において大きく重なるものであることを、お断りしておきたい。

さて、この「確率論の基礎」の初版への序において、伊藤先生は次のように書いておられる。

「数学の他の分野に比して確率論の発展は極めて緩慢であった。それは確率を数学的に明確に表現する方法がつかまえられなかったからである。しかるに集合論、抽象空間等の発展の結果、極めて鮮やかな表現方法が得られた。それによれば

”確率とは、ルベーグ測度である”

この言葉ほど確率の数学的本質をついたものはない。

今まで明瞭な定義をしないで用いられていた確率変数、事象、等という言葉は、この立場に立って始めて明瞭な表現を得た。確率変数は可測関数で、事象は可測集合である。」

このように１９３０年代始めに A. N. Kolmogorov によってまったく新しい意味付けの与えられた確率論、それが近代ないし現代確率論であるが、それによって古典確率論も数学的に整備され、面目を一新する。古くからコイン投げやサイコロ投げ、あるいは壷などの容器から、玉や豆の粒を抽出する、そういった偶然の関わる日常の行為や遊びがなされていたが、そのような行為や遊びの繰り返しにおいて、確率は、予想される結果の起こる一定の比率として経験的に知られていた。しかしながら、このような経験的な確率の背後に潜む法則を数学の言葉で語るまでには、長い年月を要した。その第１歩は、１７世紀、フランスにおける B. Pascal と P. de Fermat の往復書簡であるとされるが、その後、２項分布、その大数の法則、ポアソン分布や正規分布による近似、等が論じられて内容が豊かになり、数学における分野としての地位を確立する。さらに、解析学の方法を取り入れて確率論の内容も方法も充実し、古典確率論は Laplace において一つの頂点に達した。２０世紀が始まるまでは、確率論は Laplace の考えの枠に留まっており、その影響は今日でも多くの入門書に残っている。この古典確率論の発展については、シンポジウムの際、会場で配布された資料 ([4]) にまとめてあるので、興味ある方はそれをご覧頂きたい。

古典確率論は２０世紀の始め頃から次第に、 Laplace の束縛を離れ、大きな変貌に向けて新しい胎動をはじめる。近代科学の急速な発展に伴う、数々の偶然現象に

関する問題がその動機となり、近代数学の発展がその新しい枠組みの土台を提供した。実際、古典確率論は近代の物理学、生物学、人口統計や経済学等の発展に伴って提供される偶然現象の解明において、十分な数学的方法を提供し得なかった。偶然現象を記述する確率分布や期待値を解析する方法は、解析学の方法を取り入れて豊富になったが、偶然現象の数学モデル自身は、多くの場合、物理学や生物学あるいは経済学のレベルで述べられて数学的な対象とならず、その数学的解明は、現象の表面をなぜているようなもどかしさ、現象の本質を直接数学的に記述できないもどかしさがあった。１９００年代の始めに確率論が大きく変貌したというのは、単に確率論の枠組みや方法が、近代数学の発展に伴って面目を一新したというだけでなく、重要で興味の有る偶然現象の確率モデルが、そのことによって、数学的に正確に定式化され、モデルの直接的な研究が始まったということも意味し、このことがより重要であると考える。現代確率論では、ブラウン運動を代表例とする拡散運動のモデル、統計物理学における相互作用する粒子系のモデル、集団遺伝学における遺伝子頻度の時間発展のモデル、あるいは金融市場における株式価格や債権価格、等、金融証券の価格のモデル、等が確率モデルとして与えられ、活発な研究がなされているのである。

古典確率論の近代確率論への変貌、それを支えた数学が近代解析学における**積分論**、ないし**測度論**、であった。フランスの H. Lebesgue によって生み出されたルベーグ積分論は、その動機はフーリエ解析の問題への応用にあったと言われているが、これを確率論に結び付けたのは、Lebesgue の師であり、Lebesgue と共にこの積分論の発展に貢献した E. Borel であった。 Borel はこの積分論を用いて、古典確率論における重要な成果である J. Bernoulli の大数の法則を精密化した。今日、Bernoulli の大数の法則は、**大数の弱法則**、Borel の大数の法則は、**大数の強法則**と呼ばれている。この近代確率論の胎動となる Borel の仕事を見てみよう。単位区間 $[0,1]$ 上の関数列 $\epsilon_1(\alpha), \epsilon_2(\alpha), \ldots,\ 0 \le \alpha \le 1$, を 2 進展開：

$$\alpha = \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2}{2^2} + \cdots$$

によって定める。各 ϵ は、0 か 1 であり、したがって、これらの関数は、0 と 1 の二つの値のみを取る。コイン投げで表が出ることを 1、裏の出ることを 0 で表わすと、この関数列は、区間 $[0,1]$ にルベーグ測度を与えた、所謂、一様確率空間上で、公平なコイン投げの数学モデルを与える。

$$S_n(\alpha) = \epsilon_1(\alpha) + \epsilon_2(\alpha) + \cdots + \epsilon_n(\alpha)$$

とおくと、これは n 回のコイン投げでの表が出た回数であり、Bernoulli の大数の法則は、その頻度 $S_n(\alpha)/n$ について、$|S_n(\alpha)/n - 1/2| > \delta$ を満たす α の集合の測度が、どんな小さい $\delta > 0$ を与えても、n を大きくしていくと 幾らでも 0 に近くなることを主張する。一方、Borel の大数の法則は、ルベーグ測度 0 の α の集合を除くと、頻度 $S_n(\alpha)/n$ は、$n \to \infty$ のとき、1/2 に収束すること、即ち、確率 1 で、或いは almost surely (a.s.) に、$n \to \infty$ のとき、頻度が 1/2 に収束することを主張

する。このBorelの大数の法則は、１９０９年にえられたが、それはさらに、次々と改良されていく：

- (E. Borel, 1909) $S_n - n/2 = o(n)$ a.s. as $n \to \infty$
- (F. Hausdorff, 1913) $S_n - n/2 = O\left(\sqrt{n^{1+\varepsilon}}\right)$ a.s. as $n \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$
- (G. H. Hardy - J. E. Littlewood, 1914) $S_n - n/2 = O\left(\sqrt{n \log n}\right)$ a.s. as $n \to \infty$
- (A. Ya. Khinchin, 1923) $S_n - n/2 = O\left(\sqrt{n \log(\log n)}\right)$ a.s. as $n \to \infty$

そして、１９２４年に、Khinchinによって、**重複対数の法則**という近代確率論における最も美しい定理に到達したのであった：

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}\log(\log n)}} = 1 \quad \text{and} \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}\log(\log n)}} = -1, \text{ a.s.}$$

S_nの分布である２項分布のポアソン分布や正規分布による近似等、確率分布の漸近定理、ないし極限定理は古典確率論における重要な成果であるが、その発展として、ポアソン分布、複合ポアソン分布や正規分布を含む **無限分解可能分布** という確率分布のクラスの重要性が認識されたのも、２０世紀の始めであった。この分布の標準形がP. LévyとKhinchinによって完全に決定されたのは、１９３０年代であるが、これも古典確率論と近代確率論をつなぐ重要な話題であり、近代確率論発生の大きな胎動の一つでもあった。これは今日でも、重要な確率過程であるLévy過程と結びついて重要な研究対象である。

このように、古典確率論の様相を一新する動きが絶え間なく続いている頃、これらと違う方向から、次の時代の踏み台となる激動の一つがN. Wienerによってもたらされた。ブラウン運動の数学モデルであるWiener過程の誕生である。ブラウン運動は、１９世紀イギリスの生物学者、R. Brownが顕微鏡で観測した、花粉が弾けて飛び出し水中を浮遊する微少粒子の、水の分子運動によって惹き起こされる不規則運動である。Wienerは自伝、I am a mathematician (1964)において、このブラウン運動の数学的研究について詳しく、また興味深く、述べているが、その中で、ブラウン運動を、運動場で大勢の人が手を出して一つの球を突付いている、球は次から次にあちこちから加えられる手の衝撃で極めて不規則な運動をする、そういうプッシュボールの運動に例えている。群集の繰り出す手が、水の分子に対応している訳である。２０世紀始め、ブラウン運動に関する重要な物理学的研究がA. EinstienやM. Smolukowski, J. Perrin等によってなされ、それは分子のアヴォガドロ数の決定にも応用された。Perrinは、その著Les Atomesにおいて、ブラウン運動の描く軌道は、連続ではあるが、数学者の言う、至る所接線を持たない曲線と考えられると述べている。Wienerは特に、このPerrinによるブラウン運動の軌道の描写に注目し、これを正確な数学として正当化することを試みる。そして、ブラウン運動の正確

学モデルを Wiener 過程として与えることに成功したのであった。この時には、まだ A. N. Kolmogorov の抽象積分論を用いた近代確率論の新しい枠組み、さらにその方向を推し進めた J. L. Doob の確率過程の見本関数に関する精細な理論、等は発表されていなかった。Wiener が、Wiener 過程の数学的構成に始めて成功したとされるのは、１９２３年の論文、Differential space, J. Math. and Phys.**2**, 131-174 であるが、そこでの方法は、既にフランスの Gâteaux や Lévy 等によって研究されてきた、汎関数の平均 (average, moyenne) の概念、即ち、汎関数積分の概念、を用いるものであった。Lévy の著作 Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle の初版は既に出版されており、Lévy との交流が、ブラウン運動の数学的研究に大きく役立ったと、この論文の序文に書かれている。汎関数積分によるアプローチであり、積分論、ないし測度論としてみると Daniell 積分による方法であって、関数空間上の確率測度（即ち、Wiener 測度）から出発して、それで汎関数の積分を定義するというのとは逆の方向になっている。現代確率論では、後者の方がより普通のアプローチ、即ち　まず確率空間があって、その上の可測関数として確率変数があり、確率変数が可積分のとき、その積分として平均が定義される、というのが通常のアプローチであり、それに慣れている我々（少なくとも私）にとって、この１９２３年の論文における Wiener 過程の定義は、そう判り易いとは言えない。しかし、Wiener 過程の見本関数について、そのある時間区間上の２次変分が、時間区間の長さ（従って、特に定数）になること、また、その Hölder 連続性、等、基本性質が論じられており
ブラウン運動の画く軌道についての、Perrin の描像を、正確な数学で正当化しようという Wiener の熱意が感じられる。一方、Lévy は汎関数積分において、Wiener の先を進んでいたにもかかわらず、そしてその研究において、Wiener の発見のすぐ近くを、そうとは知らず、通っていたにもかかわらず、Wiener 過程の数学的構成において、Wiener に一歩譲ってしまったのであった。Lévy はそのことを大変残念に思っていたいたことが、Lévy の自伝から窺える。その後、Lévy は、Wiener 過程の見本関数について数々の深い研究を行い、輝かしい業績を挙げたことは、よく知られている通りである。

また、ブラウン運動の数学的研究の先駆者として、フランスの L. Bachelier を忘れることは出来ない。もっとも Wiener 自身は Bachelier を知らなかったようである。Bachelier はランダム・ウオークの極限として、ブラウン運動の数学的モデルを捉え、Wiener 過程の見本関数の最大値の分布等を今日的方法で求めたりしたが、ランダム・ウオークの極限としての連続確率過程（即ち、ブラウン運動の数学モデル）の存在を暗黙のうちに認めて議論し、数学的には不完全なものであった。Bachelier の動機は、パリの証券取引所における株価の変動の解析にあり、今日、現代の確率解析が主要な研究方法になっている数理ファイナンスの研究の先駆者として、Bachelier の再評価がなされている。

こうした、またここで論じ得ない多くの、確率論における１９００年始めの胎動や激動を背景にして、近代確率論の新しい枠組みが Kolmogorov によって与えられた。それは、Lebesgue や Borel の積分論、さらに C. Caratheodory 等によって一般

的に発展させられた抽象測度論を基本に用いて述べられる。上で述べた、”確率とは、ルベーグ測度である”という伊藤先生の言は、このことを言っているのであるが、さらに詳しく言うなら、次のように言ってよいであろう ;”確率モデルとは、ある確率空間上に与えられた確率変数である。”ここで、確率空間とは、ある正規化された正の測度空間のことであり、その測度を（基礎の）確率と言う。確率変数とは、確率空間からある可測空間（ Borel 構造の与えられた空間、これを変数の状態空間と言う）への可測写像のことである。確率変数が与えられると、その状態空間上に確率測度が基礎の確率より induce され（数学的に像測度、push forward というが、確率論では**確率変数の分布**と言う)、状態空間自身が一つの確率空間になる。確率変数が一つのときは、確率モデルは、状態空間の上に、上のように導かれる確率空間或いは確率変数の分布のこと、と考えてよいが、多くの場合、いくつかの確率変数を同時に考えるので、予め一つ、基礎になる確率空間を設定しておくのが普通である。(前者は、基礎の確率空間と状態空間が一致するという特別な場合であり、確率変数は恒等写像によって与えられる。）これは数学的議論においてのみ必要になるので、現象としては表に出ない正に縁の下の土台であり、その選び方は任意で、数学的議論にとって便利であるように適当に選ぶのが普通である。

こうしたことを確率モデルとしてブラウン運動を考えた場合で見てみよう。簡単のため、ブラウン粒子は直線 $\mathbf{R}$ 上を動き、時間区間は $[0,T]$ で、 0 において原点から出発するものとする。ブラウン粒子の可能な軌跡は、連続関数 $w:[0,T]\ni t\mapsto w(t)\in\mathbf{R}$, （但し $w(0)=0$) で表され従ってこのような関数全体のなす関数空間 W_0 が状態空間である。Wiener の１９２３年の論文では、関数空間 W_0 を differential space と呼び、Daniell 積分の方法でこの上にブラウン運動のモデルとなる確率測度を定義した。これが Wiener 測度である。数学的に同値なことであっても、ブラウン運動の数学モデルを、 W_0 上の確率測度と考えるのと、 W_0-値確率変数と考えるのでは、後者の方が柔軟な考え方で、取り扱い易い。Wiener 自身も、それ以降は多くの論文や著作において、後者の立場をとっている。その場合、もっぱら彼は、基礎の確率空間として、単位区間 $[0,1]$ 上にルベーグ測度を与えた確率空間、所謂、一様確率空間をとる。そのため、一様確率空間は、しばしば、Wiener の確率空間と呼ばれることがある。このとき、Wiener 過程は $X(t,\alpha)$, $t\in[0,T]$, $\alpha\in[0,1]$, と表され、見本関数 $X(\alpha):=[t\mapsto X(t,\alpha)]$ が W_0-値確率変数を与える。また、Wiener 汎関数は、可測関数 $F(\alpha)$ で表され、それが可積分の時、その平均はルベーグ積分 $\int_0^1 F(\alpha)d\alpha$ で表されることになる。Wiener は自伝やその他、いくつかの著作において、ブラウン運動など、偶然現象に関する数学的研究における基本的なアイデアを、数理物理学者の Gibbs と 解析学者の Lebesgue の二人から得たと述べている。一人は、いつも数学を物理学の補助手段と見なしていた学者、もう一人は、純粋の解析学者で、物理学から直接派生した問題や方法を論じたことはあまり無く、数学的厳密性を最重要と考える学者であり、その学問の傾向は一見正反対のようであるが、偶然現象の数学的研究において、その研究は深く繋がり、一体をなすものであった、と Wiener は書いている。ここでもフーリエ解析の問題から Lebesgue によっ

て生み出された積分論が、近代確率論の確立を大きく支えたのであった。 Wiener が、ルベーグ測度空間を、基礎の確率空間として好んで用いたことは、Wiener が Lebesgue に対して抱いた深い尊敬の念を、示しているように思われる。

一様確率空間上で、Wiener 過程 $X(t,\alpha)$, $t\in[0,T]$, $\alpha\in[0,1]$, を構成する際の、Wiener のアイデアは次のようなものであった。まず、一様確率空間 $[0,1]$ 上に、$[0,1]$-値、一様分布に従う i.i.d.（即ち、同分布独立確率変数列）$\xi_n(\alpha)$, $n=0,1,2,\ldots$, を構成する。このためには、先に Borel の大数の法則に関連して与えた $\{0,1\}$-値 i.i.d. $\epsilon_k(\alpha)$, $k=1,2,\ldots$, を用い、$\{0,1\}$-値 i.i.d. $z_{nk}(\alpha)$, $n=0,1,2,\ldots$, $k=1,2,\ldots$, を

$$
\begin{aligned}
&z_{01}(\alpha)=\epsilon_1(\alpha),\\
&z_{02}(\alpha)=\epsilon_2(\alpha), z_{11}(\alpha)=\epsilon_3(\alpha),\\
&z_{03}(\alpha)=\epsilon_4(\alpha), z_{12}(\alpha)=\epsilon_5(\alpha), z_{21}(\alpha)=\epsilon_6(\alpha),\\
&z_{04}(\alpha)=\epsilon_7(\alpha), z_{13}(\alpha)=\epsilon_8(\alpha), z_{22}(\alpha)=\epsilon_9(\alpha), z_{31}(\alpha)=\epsilon_{10}(\alpha),\\
&z_{05}(\alpha)=\epsilon_{11}(\alpha),\quad \ldots,
\end{aligned}
$$

のように順次定めて、

$$\xi_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_{nk}(\alpha)}{2^k},\quad n=0,1,2,\ldots$$

と置けばよい。次に、単調増加関数

$$x\in(-\infty,\infty)\mapsto\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\in(0,1)$$

の逆関数を $y\in(0,1)\mapsto\phi(y)\in(-\infty,\infty)$ と表し、$\eta_n(\alpha)$, $n=0,1,2,\ldots$, を $\eta_n(\alpha)=\phi[\xi_n(\alpha)]$ と置いて定めると、$\{\eta_n(\alpha)\}$ は、標準正規分布に従う i.i.d. となる。

そこで、$L_2([0,T])$ の正規直交基底 (ONB) として、

$$f_0(t)\equiv\sqrt{\frac{1}{T}},\quad f_n(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{n\pi}{T}t,\quad n=1,2,\ldots$$

をとり、$m=1,2,\ldots$, に対し、

$$X_m(t,\alpha)=\sum_{n=0}^{m}\eta_n(\alpha)\int_0^t f_n(s)ds,\ 0\le\alpha\le1,\ 0\le t\le T$$

と置く。このとき、ルベーグ零集合の例外点を除いて、全ての α で、$X_m(t,\alpha)$ は、$m\to\infty$ のとき、t について一様に収束し、この極限、$X(t,\alpha)$ によって、Wiener 過程が定まるのである。Wiener のときには、m についてはある部分列をとる必要があったが、その後の研究の進展で、最終的には伊藤 – 西尾 (1968) によって、任意の $L_2([0,T])$ の ONB に対し、部分列をとらない一様収束が、ルベーグ零集合の例外点を除いて成り立つことが示されている。 ONB として、典型的な wavelet である Haar 関数系をとった場合は、Lévy の構成法として知られ、それは Wiener 過

程の見本関数の折れ線近似を与えるものになっている。この場合の一様収束の証明は比較的容易であるので、多くのテキストで Wiener 過程の存在証明に用いられている。

このように、１９００年代の始めに大きく変貌した確率論は、偶然現象の数学モデルである確率過程の研究が中心となって、その発展は今日まで続く。そこにおいて Wiener 過程の果たした大きな役割は、驚くべきものがある。それは単に、ブラウン運動という自然界における偶然物理現象の数学モデルというだけでなく、種々の確率過程の研究において、強力な方法を提供していった。確率過程としてみた時、Wiener 過程は、拡散過程、マルコフ過程、Lévy 過程、Gauss 過程、自己相似過程、等のどのクラスにも属して、その接点の位置にありそれぞれのクラスの典型例として基本的役割を果たしている。さらに Wiener 過程の重要性は、種々の偶然現象においてその偶然性を引き起こす、偶然性の源と言うべきものを与える点にある。その最も顕著な例が、伊藤先生による確率微分方程式の理論である。

これらについて、もう少し詳しく説明しよう。 Wiener 過程をある確率空間で実現したとき（ W_0 のような関数空間（道の空間、path space）で実現するのが自然で、普通のやり方であるが)、この空間を **Wiener 空間**、その上の可測関数や可測写像を、**Wiener 汎関数、 Wiener 写像** と言う。上でのべた Wiener 過程の重要性というのは、重要な確率モデルが Wiener 汎関数や Wiener 写像によって表現され、Wiener 汎関数や Wiener 写像を解析する方法によって解析出来るということに他ならない。 確率微分方程式の理論を中心とする伊藤解析の方法は、 Wiener 空間上で、理論上も応用上も極めて重要な Wiener 汎関数や Wiener 写像を構成しそれを解析することを可能にする。伊藤解析によって構成される Wiener 汎関数や Wiener 写像は、**伊藤汎関数、伊藤写像** と呼ばれている。その重要な一例として、Riemann 多様体上のブラウン運動（Laplace-Beltrami 作用素で生成される拡散過程）の構成とその解析を挙げておこう。これを用いれば、多様体の問題に対する確率論からのアプローチが可能になる。

Wiener 以来、 Wiener 汎関数積分、ないし Wiener 汎関数解析の方法について、多くの研究が行われた。L_2-汎関数の Wiener chaos 展開 (Wiener-伊藤 展開)、Cameron-Martin, Donsker 等による積分の変換論、Feynmann-Kac の公式、Donsker-Varadhan, Schilder 等による大偏差理論と漸近理論、等がまず挙げられよう。Wiener は晩年に至るまで、Wiener chaos 展開の偶然現象への応用を考え続けた（例えば、脳波、電気回路、量子論、等々、これについては、１９５８年の著作 Nonlinear problem in random theory に詳しい）。しかしこうした Wiener 汎関数解析を、伊藤汎関数に適用するには色々の困難があった。この困難を打ち破ったのが１９７０年終わりに生まれ、その後爆発的に発展した **Malliavin 解析** である。これによって伊藤汎関数にも有効に適用される Wiener 汎関数積分の理論が可能になり、応用の可能性も著しく増大した。こうした確率解析の最近の発展については参考文献 ([2],[3]) にゆずる。

参考文献

[1] 伊藤清、確率論の基礎（新版）、 岩波書店、２００４、における池田信行氏の解説「概要とその背景」、119-140

[2] 池田信行、確率解析の生い立ちと成長、数学 **49**(1997), 272-291, （日本数学会５０周年企画「数学の流れと展望」)

[3] S. Watanabe, Stochastic Analysis on Wiener Space, *in Proceedings of Norbert Wiener Centenary Congress 1994, eds. V. Mandrekar and P. R. Masani*, Proc. Symposia in Appl. Math.,**52**(1997), AMS, 359-370

[4] 渡辺信三、 確率論の発展史、数学セミナー **６月号** (1995)、日本評論社、16-20