等質空間上のフーリエ変換
不確定性原理を巡って

熊原啓作
第15回数学史シンポジウム・津田塾大学

2004年10月17日

1　不確定性原理

ノーバート・ウィーナー（鎮目恭夫訳）「サイバネティックスはいかにして生まれたか」みすず書房，1956(Nobert Wiener, I am a Mathematician, Doubleday & Company, 1956) の第4章海外旅行の頃―マックス・ボルンと量子論　に次のような記述がある．

「理想的には，単振動とは遠い過去から遠い未来まで時間的に不変につづいている運動である。或る意味でそれは永遠の姿の下に存在する．音を発したり、止めたりすることは、必然的にその振動成分を変えることになる．この変化は，小さいかもしれないが，全く実在のものである．有限時間にだけ継続する音符は或る帯域にわたる多くの単振動に分解することが出来る。それらの単振動のどれか一つだけが存在するとみることはできない．時間的に精密であることは音の高さがいくらかあいまいであることを意味し、また音の高さを精密にすれば必然的に時間的な区切りがつかなくなる.」(66-67ページ，下線筆者)

ウィーナーは1925年のゲッチンゲンでの講義の重要な部分はこのような調和解析学のパラドックスから成っていたと記している．この講義の記録は現在残ってはいないようであるので文献で確認することはできない．

実数上のフーリエ変換とその逆変換は

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

であって一つの単振動 $\widehat{f}(\xi_0)e^{-i\xi_0 x}$ によって有限区間だけ存在する，即ち台がコンパクトな $f(x)$ を構成することはできない．また特定の時間の値 $f(x_0)$ からある区間に渡る振動を取り出すことはできない．

量子力学の不確定性原理

ヒルベルト空間のエルミート作用素（行列）Q_j，P_j で（正準）交換関係

$$Q_jQ_k - Q_kQ_j = O, \quad P_jP_k - P_kP_j = O$$
$$P_jQ_k - Q_kP_j = \begin{cases} O & (j \neq k) \\ \dfrac{h}{2\pi i} I & (j = k) \end{cases}$$

を満たすとき，$\{Q_1, \cdots, Q_n\}$ を座標演算子，$\{P_1, \cdots, P_n\}$ をそれに正準共役な運動量演算子という．一般に観測量（オブザーバブル）はエルミート作用素 H で，状態は単位ベクトルで表現され，H の状態 f における観測された結果が (Hf, f) あるいは $\|Hf\|$ である．

$n = 1$ の時を考えよう．$L^2(\boldsymbol{R})$ において c を定数として

$$Q : f \mapsto xf, \qquad P : f \mapsto \frac{c}{i}\frac{d}{dx}f$$

（シュレディンガー対応）とすれば

$$PQ - QP = cI$$

で，Q は位置を，P は運動量を表す．以下では $c = 1$ とする．

ハイゼンベルクは 1927 年次の不確定性原理を発表した．

ハイゼンベルクの不確定性原理.「位置と運動量は同時には精密に測定することはできない.」

ハイゼンベルクがウィーナーの講義に出席していた証拠はないが，波動光学においては不確定性原理はもっと以前から知られていたことより，そ

れを参考にしたという話もある．ハイゼンベルクは数式を用いて説明してはいないが，これは次のように数学的に述べられる（E.H.Kennard(1927), H.Weyl(1932)).

$\varphi \in L^1(\boldsymbol{R})$ で $\varphi(x) \geqq 0$ かつ $\int_{\boldsymbol{R}} \varphi(x)dx = 1$ という関数は，確率変数 X の $a < X < b$ である確率が $\int_a^b \varphi(x)dx$ で与えられとき，X の密度関数といわれる．X の関数 $k(X)$ に対して，$E(k(X)) = \int_{\boldsymbol{R}} k(x)\varphi(x)dx$ を $k(X)$ の期待値，$\mu = E(X)$ を X の平均値，$V(X) = E((X-\mu)^2)$ を X の分散という．$f \in L^2(\boldsymbol{R}), \|f\|_2 \neq 0$ に対して

$$\varphi(x) = \frac{|f(x)|^2}{\|f\|_2^2}$$

とおく．すると平均値を0に修正した分布 $|f(x)|^2/\parallel f \parallel^2$ と $|\widehat{f}(\xi)|^2/\parallel \widehat{f} \parallel^2$ を密度関数とする二つの確率変数の分散が同時には小さくならないというのが**ハイゼンベルクの不等式**（あるいは**ハイゼンベルク・パウリ・ワイルの不等式**）である．$f \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\parallel xf \parallel_2^2 \parallel \xi\widehat{f} \parallel_2^2 \geqq \frac{1}{4} \parallel f \parallel_2^4$$

が成り立つというものである．ここで $\|\xi\widehat{f}\|_2 = \|f'\|_2$ であるから $f, f' \in L^2(\boldsymbol{R})$，$\|f\|_2 = 1$ となる f に対して

$$\|Qf\|_2\|Pf\|_2 \geqq \frac{1}{2}$$

となるというのがハイゼンベルクの不確定性原理である．

ハイゼンベルクの不等式において f の代わりに $f_{a,b}(x) = e^{ibx}f(x-a)$ を考えることにより，任意の $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ と $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2|f(x)|^2dx \int_{-\infty}^{\infty} (\xi-b)^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \geqq \frac{1}{4}\|f\|_2^4$$

が成り立つ．

調和解析においては，ハイゼンベルクの不等式で示すような関数 f とそのフーリエ変換 $\widehat{f}$ が同時には局在しないという性質を**不確定性原理**という．

2 定量的不確定性原理

ハイゼンベルクの不等式の一般化

不確定性原理は位置と運動量に対してだけではなく，非可換な作用素の間に成り立つ関係である．$\mathfrak{H}$をヒルベルト空間，A, Bを$\mathfrak{H}$上で稠密に定義された線形作用素とし，その定義域を$D(A), D(B)$とする．$[A,B] = AB - BA$の定義域は$D(AB) \cap D(BA)$である．次の定理はシュヴァルツの不等式から容易に得られる．

１． A, Bが自己共役，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$

$$\|(A-\alpha I)u\|\|(B-\beta I)u\| \geqq \frac{1}{2}|([A,B]u,u)| \quad (u \in D([A,B])).$$

しかし$D([A,B])$が小さいことがあり得るし，$\{0\}$である可能性がある．さらに$[A,B]$は閉作用素とは限らない．

２．Kraus 1967:

Gを連結リー群，$\mathfrak{g}$をそのリー環，Gの$\mathfrak{H}$上への既約ユニタリ表現とする．微分表現も同じ記号で表す．もし$X, Y, [X,Y] \in \mathfrak{g}$で張られた空間が$\mathfrak{g}$のイデアルであれば，$A = \pi(X), B = \pi(Y), C = \pi([X,Y])$として

$$\|Au\|\|Bu\| \geqq \frac{1}{2}|(Cu,u)| \quad (u \in D(A) \cap D(B) \cap D(C)).$$

$D(A) \cap D(B) \cap D(C)) \supset \mathfrak{H}^\infty = \{C^\infty - \text{ベクトル}\}$であり$\mathfrak{H}^\infty$は$\mathfrak{H}$で稠密である．

３．Folland-Sitaram 1997:

H_n:n次のハイゼンベルク群，すなわち$\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$に積

$$(p,q,z)(p',q',z') = (p+p', q+q', z+z' + \frac{1}{2}(p \cdot q' - q \cdot p'))$$

を入れたもの．リー環$\mathfrak{h}_n$は同じ集合で

$$[(p,q,z),(p',q',z')] = (0,0,p \cdot q' - q \cdot p')$$

としたもの．H_nの表現$\{\sigma, L^2(\boldsymbol{R}^n)\}$を

$$\sigma(p,q,z) = e^{iz+iq\cdot x+ip\cdot q} f(x+p)$$

で定義すればこれは既約ユニタリ表現である．すると

$$\sigma(e_j,0,0) = iP_j, \quad \sigma(0,e_j,0) = iQ_j, \quad \sigma([X_j,Y_j]) = \sigma(Z) = I$$

が得られる．Krausの定理より次の $\boldsymbol{R}^n$ におけるハイゼンベルクの不等式が成り立つ．

(1) $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n), a, b \in \boldsymbol{R}^n, 1 \leqq j \leqq n$ とする．

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (x_j - a_j)^2 |f(x)|^2 dx \int_{\boldsymbol{R}^n} (\xi_j - b_j)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geqq \frac{\|f\|_2^4}{4}.$$

(2)

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (x - a)^2 |f(x)|^2 dx \int_{\boldsymbol{R}^n} (\xi - b)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geqq n^2 \frac{\|f\|_2^4}{4}.$$

ハイゼンベルクの不等式の L^p 空間への拡張

４．Folland-Sitaram　1997:

$$\|xf\|_p \|\xi \widehat{f}\|_p \geqq \frac{\|f\|_2^2}{2} \quad (1 \leqq p \leqq 2)$$

５．Cowling-Price 1984:

$1 \leqq p, q \leqq \infty$，$a, b > 0$.

(1)　$\boldsymbol{R}$ 上の局所可積分かつ緩増加な f で $\widehat{f}$ も局所可積分となるものに対し

$$a > \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \quad b > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$$

ならば

$$\||x|^a f\|_p + \||\xi|^b \widehat{f}\|_q \geqq K \|f\|_2.$$

(2)　(1)の条件を満たすすべての f に対し

$$a > \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \quad b > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$$

かつ

$$\gamma \left(a + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) = (1 - \gamma) \left(b + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right)$$

ならば

$$\||x|^a f\|_p^\gamma \||\xi|^b \widehat{f}\|_q^{1-\gamma} \geqq K \|f\|_2 \qquad (f \in L^2(\boldsymbol{R})).$$

(2)で $p = q = 2, a = b = 1$ とすればハイゼンベルクの不等式になる．

これらの不等式の精密化や変形がいろいろ得られている.

ハイゼンベルクの不等式は f が局在していれば, $\widehat{f}$ は1点の近くに局在できないことを示しているが, 散らばった有限個の点の周辺に局在する可能性を残す. これについてはそうならないことを示す局所不確定性不等式が知られている (Faris, Price, Price-Sitaram).

3 定性的不確定性原理

1. ペイリーーウィーナーの定理 1934:

F を整関数とし a を正数とする. F に関する次の条件は同値である.

(1) $F|_{\boldsymbol{R}} \in L^2(\boldsymbol{R})$ で

$$|F(\zeta)| = o(e^{a|\zeta|}).$$

(2) $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ で $|x| > a$ ならば $f(x) = 0$ であって

$$F(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x) e^{-i\zeta x} dx$$

となるものが存在する.

ペイリー・ウィーナーの定理によれば台がコンパクト関数のフーリエ変換は整関数に拡張されるから

$\mathrm{supp} f$, $\mathrm{supp}\widehat{f}$ が共にコンパクトならば $f = 0$(a.e.) である.

台についてはコンパクトでなくても測度有限で有ればよい. $\Sigma_f = \{x : f(x) \neq 0\}$, $\Sigma_{\widehat{f}} = \{\xi : \widehat{f}(\xi) \neq 0\}$ とする. $|\cdot|$ でルベーグ測度を表す.

2. Benedicks 1985:

$f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $|\Sigma_f| < \infty, |\Sigma_{\widehat{f}}| < \infty$ ならば $f = 0(a.e.)$ である.

この定理は $f \in L^p(\mathbb{R}), (p > 1)$ でも成立する. 台が測度有限でなくても関数の減少度について不確定性原理が成り立つことを言うのが次の**ハーディの定理** ([2]) である。

が，適当な $C>0$ を取れば成り立つ可測関数全体のなすベクトル空間を $E(a,b)$ とする．すると

1. $ab<\frac{1}{4}$ ならば $\dim E(a,b)=\infty$
2. $ab=\frac{1}{4}$ ならば $E(a,b)=\boldsymbol{C}\exp\{-ax^2\}$
3. $ab>\frac{1}{4}$ ならば $E(a,b)=\{0\}$.

M.Cowling-J.F.Price は次のようなハーディの定理の L^p 版を証明している．

４．カウリング・プライスの定理 1983:

$1\leqq p,q\leqq\infty$ で p,q の一方は有限とする．$\boldsymbol{R}$ 上のフーリエ変換について，もし $ab\geqq\frac{1}{4}$ なる正の数 a,b に対して

$$\| e^{ax^2}f\|_p<\infty \qquad \text{かつ} \qquad \| e^{a\xi^2}\hat{f}\|_q<\infty$$

が成り立てば $f=0$ である．

ハーディの定理の拡張として次の強モーガンの定理がある．

５．強モーガンの定理（Hörmander 1991）：

$p^{-1}+q^{-1}=1$ とする．$\boldsymbol{R}$ 上のフーリエ変換について，可測関数 f が

(1) $|f(x)|\leqq Ce^{-a|x|^p}$,

(2) $|\widehat{f}(\xi)|\leqq Ce^{-b|\xi|^q}$

を満たすとする．もし，$(ap)^{1/p}(bq)^{1/q}>1$ ならば $f=0$ である．

元のモーガンの定理 (1934) はこの定理から導かれるもう少し弱い形である．Hörmander は次のブーリングの定理から導いた．

６．ブーリングの定理（Hörmander 1991）：

$f\in L^1(\boldsymbol{R})$ が

$$\int_{\boldsymbol{R}}\int_{\boldsymbol{R}}|f(x)||\widehat{f}(\xi)|e^{|x\xi|}dxd\xi<\infty$$

を満たせば $f=0(a.e.)$.

６’．ブーリングの定理（Bonami-Demange-Jaming 2003）：

$f\in L^1(\boldsymbol{R})$ とする．

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{|f(x)||\widehat{f}(\xi)|}{(1+|x|+|\xi|)^N}e^{|x\xi|}dxd\xi<\infty$$

が

(1)　$0 \leqq N \leqq n$ に対して成り立てば $f=0(a.e.)$.

(2) ある $N>n$ について成り立つための必要十分条件は，実対称行列 A と次数が $<(N-n)/2$ の多項式 P があって

$$f(x)=P(x)e^{-\frac{1}{2}(Ax,x)}.$$

7．ゲルファント・シーロフの定理　1953:

$N \geqq 0$, $1<p,q<\infty$, $1/p+1/q=1$, $ab>1/4$ に対して $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ が

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{|f(x)|e^{\frac{a^p}{p}|x|^p}}{(1+|x|)^N}dx<\infty,\ \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{|\widehat{f}(\xi)|e^{\frac{b^q}{q}|\xi|^q}}{(1+|\xi|)^N}d\xi<\infty$$

を満たすとする．$p=q=2, ab=1/4$ でなければ $f=0$．$p=q=2, ab=1/4$ ならば

$$f(x)=P(x)e^{-\frac{a^2}{2}|x|^2}$$

P は $\deg P<N-n$ の多項式.

4　群上のフーリエ変換

写像 $x \mapsto e^{i\xi x}$ が実数群 $\boldsymbol{R}$ の，また写像 $\theta \mapsto e^{in\theta}$ がトーラス群 $\boldsymbol{T}$ の既約ユニタリ表現であることから，さまざまな群に対してフーリエ変換を拡張しその性質が調べられてきた．位相群 G の既約ユニタリ表現 $\{\pi, \mathfrak{H}_\pi\}$ に対して，dg を左または右不変測度として

$$\widehat{f}(\pi)=\int_G f(g)\pi(g)dg,$$

をフーリエ変換とすればよさそうだが，表現ごとに表現空間が変わるなど不都合なことが多い．G が I 型群の場合には抽象プランシュレル定理が証明されている．第２可算公理を満たす I 型の局所コンパクト群 G の既約ユニタリ表現の同値類全体の集合 $\widehat{G}$ に

$$\int_G |f(x)|^2dx=\int_{\widehat{G}} \|\widehat{f}(\pi^\omega)\|_{HS}^2 d\mu(\omega) \quad (f \in L^1(G)\cap L^2(G))$$

となる測度（プランシュレル測度）$d\mu$ が存在し，逆公式

$$f(g)=\int_{\widehat{G}} \mathrm{Tr}(\widehat{f}(\pi^\omega)\pi^\omega(g^{-1}))d\mu(\omega)$$

が成立する．

多くのリー群では，プランシュレル測度の台を適当なパラメター表示をし，フーリエ変換はパラメター空間上の（一般には作用素値）関数を対応させるものとして定義する．

半単純リー群の場合

半単純リー群の表現論はハリシュ・チャンドラによってほとんど完成された．G が半単純リー群であればその主系列の表現によってフーリエ変換が記述される．主系列表現はカルタン部分群に対応し，その共役類の数だけある．

G を中心が有限な連結半単純リー群とする．G の極大コンパクト群 K を一つ固定し，対応するカルタン対合を θ とする．G/K はリーマン対称空間で θ はその原点における対称変換に対応する．θ 不変なカルタン部分群がコンパクトであれば対応する主系列は格子によってパラメトライズされ，離散系列と呼ばれる．$\widehat{G}_{\mathrm{disc}}$ と表そう．θ 不変なカルタン部分群 J にそれを含む尖点的放物型部分群 P_J が対応し，それは $P_J = M_J A_J N_J$ と簡約可能群とアーベル群とべき零群の直積である．J に対応する主系列は $(\widehat{M_J})_{\mathrm{disc}} \times \widehat{A_J}$ によって記述される．特に J はほぼユークリッド空間とトーラスの直積であるが，ユークリッド空間の次元が最大のとき，P_J は極小放物型で M_J はコンパクトになる．その主系列は連続主系列と呼ばれる．

θ 不変なカルタン部分群の共役類の代表系を $J_1, \cdots, J_r$ とする．J_1 を A_J の次元が最大のもの，$\dim G = \dim K$ のときは J_r がコンパクトであるとする．J がコンパクトでないときは，$\sigma \in (\widehat{M_J})_{\mathrm{disc}}$ と $\lambda \in \mathfrak{a}_J^*$ に対して $(\pi_{J,\sigma,\lambda}, \mathcal{H}^{J,\sigma,\lambda})$ を P_J の表現 $\sigma \otimes \lambda \otimes 1$ を $G = KP_J$ に誘導したユニタリ表現とする．J_r がコンパクトなときは，J_r の指標から定義されるハリシュチャンドラパラメターをもった G の離散系列表現 π_τ が構成される．

フーリエ変換：

$\widehat{f}_d(\tau)$ （$f \in L^1(G)$）

$$\widehat{f}_d(\tau) = \int_G f(g)\pi_\tau(g)\, dg.$$

$\sigma \in (\hat{M}_J)_{\mathrm{disc}}$ と $\lambda \in \mathfrak{a}_J^*$ に対して $f \in L^1(G)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}_J(\sigma, \nu)$ を次で定義．

$$\hat{f}_J(\sigma, \lambda) = \int_G f(g)\pi_{J,\sigma,\lambda}(g)\, dg.$$

これらを用いて $f \in L^1(G)$ のフーリエ変換は $\mathrm{rank}G = \mathrm{rank}K$ のときは

$$\widehat{f}((\sigma_1, \lambda_1), \cdots, (\sigma_{r-1}, \lambda_{r-1}), \tau) = \widehat{f}_1(\sigma_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \hat{f}_d(\tau)$$

で定義され，$f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対してプランシュレルの公式（パーセヴァルの等式)

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{\sigma} \int \|\widehat{f}_{J_j}(\sigma, \lambda)\|_{HS}^2 m_j(\sigma, \lambda) d\lambda + \sum_{\tau} d(\tau) \|\widehat{f}_d(\tau)\|_{HS}^2.$$

及び $f \in C_c^\infty(G)$ に対して逆変換公式

$$\begin{aligned} f(g) = &\sum_{j=1}^{r-1} \sum_{\sigma} \int \mathrm{Tr}(\widehat{f}_{J_j}(\sigma, \lambda) \pi_{J_j, \sigma, \lambda}(g^{-1})) m_j(\sigma, \lambda) d\lambda \\ &+ \sum_{\tau} d(\tau) \mathrm{Tr}(\widehat{f}_d(\tau) \pi_\tau(g^{-1})). \end{aligned}$$

が成立する関数 $m_j(\sigma, \lambda)$ と $d(\tau)$ が存在する．$\mathrm{rank}G > \mathrm{rank}K$ のときは離散系列がなく，和は $j = r$ に対しても $r - 1$ までと同様である．

連続主系列 $\pi_{\sigma,\lambda}$ は $L^2(K)$ の部分空間に実現され λ は複素化される．すると すべての既約表現はこの表現の部分表現あるいは商表現に同値である（Harish-Chandra の部分商定理）．

リーマン対称空間

非コンパクトなリーマン対称空間は半単純リー群の極大コンパクト部分群による商空間である．G と K は前の通りとする．$G = KAN$ を $A = A_{J_1}, N = N_{J_1}$ とした岩沢分解とし，リー環の対応する分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ とする．$\log : A \to \mathfrak{a}$ を指数写像 $\exp : \mathfrak{a} \to A$ の逆写像とする．$H \in \mathfrak{a}$ に対し $\log(H) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(H))$ とおく．すると G 上の不変測度は K, A, N の不変測度によって

$$\int_G f(g) dg = \int_{K \times A \times N} f(kan) e^{2\rho(\log a)} dk da dn$$

と正規化することができる．G/K 上の関数は G 上の右 K 不変な関数と見なされる．$f \in L^1(G/K)$ ならば $\widehat{f}_{J_j} = 0 (j > 1)$ であり，$\widehat{f}_{J_1}(\sigma, \lambda) = 0 (\sigma \neq$

trivial) である．$\pi_{J_1,1,\lambda}$ は $L^2(K/M)$ で実現され $\widehat{f}_{J_1}(1,\lambda)$ は積分作用素で積分核

$$\int_A\int_N e^{(-i\lambda+\rho)(\log a)}f(kank')dadn$$

をもつが f が右 K 不変であることより，この値は k' には依存せず，k は M だけの自由度をもち $\mathfrak{a}*\times K/M$ 上の関数である，そこで

$$\widehat{f}(\lambda,kM)=\int_A\int_N e^{(-i\lambda+\rho)(\log a)}f(kan)dadn.$$

とおき f のヘルガソン・フーリエ変換という．$g\in G$ を岩沢分解によって $g=k(g)\exp H(g)n(g)$ と分解する．すると

$$\widehat{f}(\lambda,kM)=\int_G e^{(i\lambda-\rho)(H(g^{-1}k))}f(g)dg,$$

$(\lambda\in\mathfrak{a}^*,k\in K)$ と書き直すことができる．プランシュレルの公式は

$$\int_G|f(g)|^2dg=\frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*}\int_K|\widehat{f}(\lambda,kM)|^2|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda dk_M$$

で逆変換は

$$f(g)=w^{-1}\int_{\mathfrak{a}^*}\int_{K/M}e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\widetilde{f}(\lambda,kM)|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda dk_M,$$

である（Helgason 1965）．ここで w は G/K のワイル群の位数，$\boldsymbol{c}$ はハリシュ・チャンドラの c 関数と呼ばれるもので

$$\boldsymbol{c}(\lambda)=\int_{\overline{N}}e^{-(i\lambda+\rho)(H(\overline{n}))}d\overline{n}$$

である．$\boldsymbol{c}$ 関数はガンマ関数を用いて書くことが出来る．

ヘルガソン・フーリエ変換はラドン変換（ホロスフェリカル変換）

$$(Rf)(a,kM)=\int_N f(kan)dn.$$

のユークリッド空間のフーリエ変換

$$\widehat{f}(\lambda,kM)=\int_A e^{(-i\lambda+\rho)(\log a)}(Rf)(a,kM)da.$$

である．これは平面のフーリエ変換平行な直線群上で積分してから，これらに直交横断する直線上を積分することによって

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\boldsymbol{R}} (Rf)(t, \theta) e^{-it\lambda} dt,$$
$$(Rf)(t, \theta) = \int_{l: x\cos\theta + y\sin\theta = t} f(x, y) d_l(x, y)$$
$$(\xi = (\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta))$$

とラドン変換と 1 次元フーリエ変換との合成になることの類似である．ここで $d_l(x, y)$ は直線 l 上のルベーグ測度である．

関数が K 両側不変であればヘルガソン・フーリエ変換は球関数

$$\varphi_\lambda(g) = \int_K e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))} dk \quad (\lambda \in \mathfrak{a}^*)$$

による球フーリエ変換

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_G f(g) \varphi_{-\lambda}(g) dg$$

でその逆変換は

$$f(g) = w^{-1} \int_{\mathfrak{a}^*} \widehat{f}(\lambda) \varphi_\lambda(g) |\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda.$$

である．この変換はヤコビ変換等の一般化である．

$\boldsymbol{R}^n$ において熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \Delta u(t, x), \quad u(0, x) = f(x)$$

（$f \in L^p(\boldsymbol{R}^n), 1 \leqq \leqq \infty$）の解は熱核

$$p_t(x) = (4\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4t}|x|^2}$$

を用いて $u(t, x) = p_t * f(x)$ とあらわされる．このことはリーマン対称空間でも同様である．Δ を G/K 上のラプラス・ベルトラミ作用素として熱核は

$$p_t(x) = \frac{1}{w} \int_{\mathfrak{a}^*} e^{-t(|\lambda|^2 + |\rho|^2)} \varphi_{-\lambda}(x) |\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

$(f \in L^p(\boldsymbol{R}^n), 1 \leqq p \leqq \infty)$ の解は熱核

$$p_t(x) = (4\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4t}|x|^2}$$

を用いて $u(t,x) = p_t * f(x)$ とあらわされる．このことはリーマン対称空間でも同様である．Δ を G/K 上のラプラス・ベルトラミ作用素として熱核は

$$p_t(x) = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*} e^{-t(|\lambda|^2+|\rho|^2)} \varphi_{-\lambda}(x) |\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

で与えられる．

半単純リー群上の不確定性原理

1．ペイリー・ウィーナーの定理

1955-1959 L.Ehrenpreis-F.Mautner $SU(1,1)/\{\pm 1\}$

1962 I.M.Gelfand-M.I.Graev-M.I.Vilenkin $SL(2,\boldsymbol{C})$
1963-9 D.P.Zhelobenko 複素半単純リー群
1966 S,Helgason 複素及び階数 1 の場合の球フーリエ変換
1969 清水義之　$SO_0(n,1)$
1971 R.Gangolli 球フーリエ変換
1873 S.Helgason 対称空間
1977 O.Campoli 階数 1
1978 野村隆昭　$SU(1,1)$ の有限被覆群
1979 河添　健　階数 1
1979 K.D.Johnson 階数 1
1982 青木　茂　$SL(2,R)$ の普遍被覆群
1982 P.Delorme カルタン部分群の共役類の数が 1
1983 J.Arthur 半単純リー群

2．ハーディーの定理

1997 A.Sitaram-M.Sundari カルタン部分群の共役類の数が 1， $SL(2,\boldsymbol{R})$, ヘルガソン・フーリエ変換
2000 江端満彦-江口正晃-小泉伸-熊原啓作　半単純リー群

江端・江口・小泉・熊原 2000

f は G 上の可測関数で，各 $J \in \mathrm{Car}'(G)$ に対して定数 $a > 0$, $b > 0$, $C > 0$ ，$C_{J,\sigma} > 0$ があって

$$|f(g)| \leq Ce^{-a\sigma(g)^2}$$
$$\|\widehat{f}_J(\sigma,\lambda)\|_\infty \leq C_{J,\sigma}e^{-b\|\lambda\|^2} \quad (\lambda \in \mathfrak{a}_J^*)$$

が成り立つとする．そのとき，$ab > 1/4$ ならば $f = 0$ (a.e.) である．

2000 M.Cowling-A.Sitaram-M.Sundari 半単純リー群
2001 示野信一　　球フーリエ変換　性質 (3)

示野　2001:

$f(x)$ を G/K 上の可測関数

$$|f(x)| \leqq Cp_{\frac{1}{4a}}(x), \quad |\widehat{f}(\lambda, kM)| \leqq Ce^{-b|\lambda|^2}$$

を満たすとする．このとき

(1)　$ab > \dfrac{1}{4}$ ならば $f = 0$.

(2)　$ab = \dfrac{1}{4}$ ならば f は $p_{\frac{1}{4a}}$ の定数倍.

2002 N.B.Andersen　実双曲空間
2001 示野信一 Heckman-Opdam 変換
2002 R.P.Sarkar 半単純リー群
2002 J.Sengupta ヘルガソン・フーリエ変換に対する強モルガンの定理
2004 S.Thangavelu 半単純リー群　性質 (3)　ブーリングの定理，ゲルファント・シーロフの定理
preprint Narayanan-Ray ヘルガソン・フーリエ変換　性質 (3) 強モルガンの定理
preprint 江端満彦-江口正晃-小泉伸 簡約可能群に対するブーリングの定理

3．カウリング・プライスの定理

2001 江端満彦 $SU(1,1)$
2002 J.Sengupta 2002 ヘルガソン・フーリエ変換

2002 Narayanan-Ray 半単純リー群
2002 江端満彦-江口正晃-小泉伸-熊原啓作　半単純リー群

江端・江口・小泉・熊原 2002:
$1 \leqq p, q \leqq \infty$, $a, b > 0$ とする．G 上の可測関数 f がすべての $\delta \in \hat{M}$ に対して

$$\|e^{a|g|^2} f(g)\|_{L^p(G)} < C, \quad \|e^{b|\mu|^2} \widehat{f}_{J_1}(\delta, \mu)\|_{L^q(\mathfrak{a}^*, \mathbf{B}(L^2(K,\delta)))} < C_\delta$$

を満たすとする．もし $ab > 1/4$ ならばほとんど至るところ $f(g) = 0$ である．

2003 N.B.Andersen　実双曲空間

その他のリー群上の不確定性原理
運動群
1998 M.Sundari ユークリッド空間の運動群　ハーディの定理
1998 江口正晃-小泉伸-熊原啓作　カルタン運動群　ハーディの定理
2000 江口正晃-小泉伸-熊原啓作　カウリング-プライスの定理

ハイゼンベルク群
1990 S.Thangavelu ハイゼンベルクの不等式
1995 A.Sitaram-M.Sundari-S.Thangavelu ハイゼンベルクの不等式

その他リー群としては NA 群，べき零リー群の特殊なものに対し，またある種の位相群にに対し不確定性原理が考えられている．不確定性原理に関する総合報告としては Havin-Joricke[21]，Folland-Sitaram[16]，小泉 [27]，Thangavelu[40] 等がある．

参考文献

[1] N. B. Andersen: Hardy's uncertainty principle on hyperbolic spaces, Bull. Austral. Math. Soc., **66** (2002), 163-170.

[2] N. B. Andersen: L^p version of Hardy's uncertainty principle on hyperbolic spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), 2797-2807.

[3] N. B. Andersen: Real Paley-Wiener theorems for the inverse Fourier transform on a Riemannian symmetric space, Pacific J. Math., **212**(2004), 1-13.

[4] S.Aoki: The Paley-Wiener type theorem on the universal covering group of SL(2,R), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I **A29**(1982), 51-77.

[5] J. Arthur, A Paley-Wiener theorem for real reductive groups, Acta Math., **150** (1983), 1-89.

[6] S. C. Bagchi and S. K. Ray: Uncertainty principle like Hardy's theorem on some Lie groups, J. Austral. Math. Soc. **65** Ser. A(1998), 289-302.

[7] M.Benedicks: On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure, J.Math.Anal.Appl., **106**(1985), 180-183.

[8] M.C.Cowling and J.F.Price: Generalized Heizenberg's inequality, Lecture Notes in Math. **992**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 443-449.

[9] M.C.Cowling and J.F.Price: Bandwidth versus time concentration: the Heisenberg-Pauli-Weyl inequality, SIAM J. Math. Anal., **15**(1984), 151-165.

[10] M. Ebata, M.Eguchiand S.Koizumi: Beurling's theorem for reductive Lie groups,preprint.

[11] M. Ebata, M.Eguchi, S.Koizumi and K.Kumahara: A generalization of the Hardy theorem to semisimple Lie group, Proc. Japan Acad., Ser.A, **75**(1999), 113-114.

[12] M.Ebata, M.Eguchi, S.Koizumi and K.Kumahara: The Cowling-Price theorem for semisimple Lie groups, Hiroshima Math.J., **32**(2002), 337-349.

[13] M.Eguchi, S.Koizumi and K.Kumahara: An analogue of the Hardy theorem for the Cartan motion group, Proc. Japan Acad. Ser.A **74**(1998), 49-51.

[14] M.Eguchi, S.Koizumi and K.Kumahara: An L^p version of the Hardy theorem for the motion group, J. Australian Math. Soc. (Series A), **68**(2000), 55-67.

[15] M.Eguchi, K.Kumahara and Y.Muta: A subspace of Schwartz space on motion group, Hiroshima Math.J.,**10**(1980), 691-698.

[16] G. B. Folland and A. Sitaram: The uncertainty principles: a mathematical survey, J. Fourier Anal. Appl. **3**(1997), 207-238

[17] R.Gangolli: On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem for spherical functions on semisimple Lie groups, Ann. of Math., **93**(1971), 150-165.

[18] I.M.Gelfand and G.E.Shilov: Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy's problem, Uspekhi Mat. Nauk., **8**(1953), 3-54.

[19] G.H.Hardy: A theorem concerning Fourier transforms, J.London Math.Soc.,**8**, 227-231.

[20] Harish-Chandra: Harmonic analysis on reductive groups III, Ann. of Math., **104**, 117-201.

[21] V. Havin and B. Joricke: *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[22] W. Heisenberg: Über den anschaulichen Inhalt der quantentheorischen Kinematic und Mechanik, Zeit. Physuk, 43(1927), 172-198.

[23] S. Helgason: Radon-Fourier transforms on symmetric spaces and related group representations, Bull. Amer. Math. Soc., **71**(1965), 757-763.

[24] S. Helgason: An analogue of the Paley-Wiener theorem for the Fourier transform on certain symmetric spaces, Math. Ann. **165**(1966), 297-308.

[25] S. Helgason: Paley-Wiener theorems and surjectivity of invariant differential operatos on symmetric spaces and Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc., **79**(1973), 129-132.

[26] L.Hörmander: A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs, Ark. Mat. **29**(1991), 237-240.

[27] S.Koizumi（小泉伸）：不確定性原理とその周辺, 第40回実関数論・関数解析学合同シンポジウム講演集, 2001.

[28] K.Krus: A further remarks on uncertainty relations, Zeit. Physik, **201**(1967),134-141.

[29] E. K. Narayanan and S. K. Ray: L^p version of Hardy's theorem on semisimple Lie groups, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 1859-1866.

[30] T.Nomura: The Paley-Wiener type theorem for finite covering groups of $SU(1,1)$, J. Math. Kyoto Univ., **18** (1978), 273-304.

[31] A.Pasquale: A Paley-Wiener theorem for the inverse spherical transform, Pacific J. Math., **193**(2000), 143-176.

[32] R.Paley and N.Wiener: Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc. New York, 1934.

[33] J. Sengupta: The uncertainty principle on Riemannian symmetric spaces of noncompact type, Proc. Amer. Math. Soc., **130**(2001), 1009-1017.

[34] N. Shimeno: An analogue of Hardy theorem for the Harish-Chandra transform, Hiroshima Math. J., **31**(2001), 383-390.

[35] N. Shimeno: An analogue of Hardy's theorem for the Heckman-Opdam transform, J. Math. Kyoto Univ. **41** (2001), 251-256.

[36] Y. Shimizu: An analogue of the Paley-Wiener theorem for certain function spaces on the generalized Lorentz group, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. I, **16** (1969), 13-51.

[37] A.Sitaram and M.Sundari: An anlogue of Hardy's theorem for very rapidly decreasing functions on semi-simple Lie groups, Pacfic J. Math. **177**(1997), 187-200. 135-151

[38] A.Sitaram, M.Sundari and S.Thangavelu: Uncertainty principles on certain Lie groups, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **105**(1995), 135-151

[39] M.Sundari: Hardy's theorem for the n-dimensional Euclidean motion group Proc. Amer. Math. Soc. **126**(1998), 1199-1204.

[40] S.Thangavelu: *An Introduction to the Uncertainty Principle*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[41] S.Thangavelu: On theorems of Hardy, Gelfand-Shilov and Beuling for semisimple Lie groups, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **40**(2004), 311-344.

[42] H.Weyl: *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Springer- Verlag, Berlin, 1928.