Frobenius による「群の指標と表現」の研究

平井　武 (Kyoto)
hirai.takeshi@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

1．問題提起． 2002 年 10 月の数学史シンポジウムにおいて，Frobenius の群の指標および表現に関する研究の発端から Schur との共著論文に到る軌跡について大まかに報告した [平井 1]．2003 年 10 月の同シンポジュウムでは，シュアーの学位論文を主として，彼の対称群の指標の研究について報告した [平井 2]．

ここでは，あらためて Frobenius の論文について彼の全集第 3 巻所載の「群の指標および表現」に関する論文を，すべてリストアップし，順を追って読んでみて，どこまで読み込めるかを調べ，その数学的内容等との関連に於いて，感想等を報告する積もりになった．しかし，始めて見るとすぐに，その計画がおそろしく無謀なものであることが分かった．そして「多くを読んで，現代の見地からみて批評する」類の立場は捨てて，着実に読み進めて当時の数学の状況に出来るだけ身を置いて論文をよく味わってみたい（森鴎外を読むときのように）と思った．

ポイント 1： はじめ「群の指標」は，Frobenius によって，群の線形表現とは関係なく，群行列式（Gruppendeterminante）の既約因数（Primfactor）への分解に即して定義され，研究された．

一方，私にとっては，学生時代の教科書から始まって現在の専門書まですべて，群指標は群の線形表現がはじめにあってその ‘trace’ をとることによって定義される．群の線形表現を用いないで，どこまでどのようにして研究が進められ得るものか，おおきに興味がある．彼の論文を読む前にはちょっと想像がつかないが，結構難しいに違いないので検討してみたい．

ポイント 2： 現代の数学にしか慣れていない私にとって，Frobenius の原論文がどこまで読み込めるか，を検討してみたい．(その結果は勿論，自己の能力・集中力と使った時間との関数であるが.)

この報告は「時代を経て，普通の現代の数学者がフロベニウスの原論文をどこまで読めるか」の人体実験を兼ねている．

Frobenius の有限群の指標および線形表現に関する論文は，すべて Frobenius 全集 Band III にあるが，それらの論文番号と発表年代をリストアップしておく．

53(1896), **54**(1896), **56**(1897), **57**(1898), **58**(1899), **59**(1899), **60**(1900), **61**(1901); **68**(1903), **69**(1903), **72**(1903), **73**(1904);
With I. Schur, **75**(1906), **76**(1906);　単著 **78**(1907).

2．各論文を順に検討していく： ポイント 1，2 の観点からこれら一群の研究の初期の頃の論文に重点を置く（太文字の論文番号は全集に従う）．

後日の記： 論文 **53** から始めて，半知半解のまま **57** まで来たが，どうも烏鷺理解（「烏鷺覚え」をもじった）のままでは，面白くも何ともない，と思えたので，あらためて **53** から読み直した．非常に面白かったので，そこに時間を使ってしまいあまり先までは進めなかった．ここでは，群の線形表現導入以前の **53**, **54** をかなり詳しく報告し，最初に線形表現を導入した **56** までを報告文にまとめた．

53. *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

序文 (全集ページ数 pp.1-2):

Dedekind が 1880 年から研究している件につき，質問してきた．それは，Dirichlet に関連して $\chi(m)\chi(n) = \chi(m+n)$ $(m, n \in \boldsymbol{Z})$ となるものについてである．それ以前では Gauss は「数論の研究」において，可換群 $\mathfrak{H}$ に関する $\chi(A)\chi(B) = \chi(AB)$ $(A, B \in \mathfrak{H})$ となる χ を Charakter der Gruppe と呼んだ．

本論文では，Charakter の概念を任意の有限群に拡張する．それによって,「群論」に対する実質的な振興と豊潤とがもたらせられる．特に興味ある点は，指標理論の，多元環の理論（Theorie der aus mehreren Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen）への注目すべき関係である．

§1 (pp.2-5): 群 $\mathfrak{H}$ の共役類の位数等に関する等式の導出：

$h = |\mathfrak{H}|$, $h_\alpha := |\alpha|$ (共役類 α の位数), $h_{\alpha\beta\gamma} := |\{(A, B, C); ABC = E, A \in \alpha, B \in \beta, C \in \gamma\}|$, $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$ についての関係式など：例えば,

$$\textstyle\sum_\alpha h_\alpha = h, \quad h_{\alpha^{-1}} = h_\alpha \ (\alpha^{-1} := \{A^{-1}; A \in \alpha\}),$$

$$h_{\alpha'\beta'\gamma'} = h_{\alpha\beta\gamma} \quad (\alpha'\beta'\gamma' \text{ は } \alpha\beta\gamma \text{ の任意の置換}),$$

$$\textstyle\sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma} = h_\alpha h_\beta.$$

§2 (pp.5-9): 共役類 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対して,

$h_{\alpha\beta\gamma\delta} := |\{(A, B, C, D); ABCD = E, A \in \alpha, B \in \beta, C \in \gamma, D \in \delta\}|$ とおくと,

$$(1) \qquad h_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_\lambda \frac{1}{h_\lambda} h_{\alpha\beta\lambda} h_{\lambda^{-1}\gamma\delta}.$$

群 $\mathfrak{H}$ の共役類の個数を k とする．共役類の位数に関する上述の等式などを用いて，次の方程式系について次の主張を導く：

$$(6) \qquad h_\beta h_\gamma \chi_\beta \chi_\gamma = f \textstyle\sum_\alpha h_{\alpha^{-1}\beta\gamma} \chi_\alpha \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は共役類}) \quad [\textbf{指標の定義方程式}]$$

ここに，k 個の χ_α たちが未知数，f も未知の比例因数（Proportionalitätsfactor）.

命題 53.2.1（当方が勝手に命題にまとめて命名, 53=論文番号, 2=節番号）:

方程式系 (6) には丁度 k 組の相異なる解

$$(7) \qquad \chi_\alpha = \chi_\alpha^{(\kappa)}, \ \ f = f^{(\kappa)} \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

が存在する．そして，$k \times k$ 型の行列式 $|\chi_\alpha^{(\kappa)}| \neq 0$.

（すこし後に $f^{(\kappa)} = \chi_0^{(\kappa)}$, ただし 0 は単位元 E の共役類，が分かる.）

指標の定義：群 $\mathfrak{H}$ の**指標**とは，次で与えられる，群の共役類上の特別の関数である（k 個の指標 $\chi^{(\kappa)}$）：

$$\alpha \to \chi_\alpha^{(\kappa)} \quad (\alpha \text{ は共役類を動く}) \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

このあと，この節では，方程式系 (6) の意味について述べてある．

注 53.1：群の線形表現の理論から来た知識を使わないで，指標を直接的に定義するのは結構難しい（§5 および論文 **56** の §1 参照）．また，Frobenius のいう指標は，現代の用語では**既約指標**である．

命題 53.2.1 の証明について：

方程式 (6) の意味は少し説明してあるが，それでも，何故どのようにして上記の複雑な「指標の定義」に到達したのかは，よく分からない．命題 53.2.1 はこの論文での全ての基礎をなすものであり，下記の論文 **51** から引用されている．そこでの証明はなかなか興味深いので少し立ち寄ってみよう．

51. *Über vertauschbare Matrizen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 601–614(1896).

Frobenius によると，まず，Weierstrass (1884) と Dedekind (1885) の同じ題名: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen*, の論文に命題 53.2.1 の前駆となる命題を展開しており，それを新しく書き直し，拡張したのが **51** であるという.（**注**： ここで，complexen Grössen とは可換多元環のことで，Haupteinheit とは生成元系かつ基底となっている元のこと．後の**注 53.5** 参照.）

命題 51.A (論文 51, Satz VIII + Satz IX).

(i) A_γ, $1 \leq \gamma \leq m$, を m 個の n 次正方行列，x_γ を変数とする．

仮定①　m 個の $n \times n$ 型行列 $A_\gamma := (a_{\alpha\beta\gamma})_{\alpha,\beta}$ につき，$A_\gamma A_\delta = A_\delta A_\gamma$ (可換).

結論： A_γ たちの固有値をそれぞれうまく順序を付けて，$r_\gamma^{(\kappa)}$ $(1 \leq \kappa \leq n)$ とすれば，$A := \sum_\gamma A_\gamma x_\gamma$ の固有値は，$r^{(\kappa)} := \sum_\gamma r_\gamma^{(\kappa)} x_\gamma$ であり，

$$|A - rE| = \prod_{1 \leq \kappa \leq n} \left(\sum_\gamma r_\gamma^{(\kappa)} - r \right)$$

となる．$c_{\gamma\delta} := \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq n} a_{\alpha\beta\gamma}\, a_{\beta\alpha\delta} = \mathrm{tr}(A_\gamma A_\delta)$ $(1 \leq \gamma, \delta \leq m)$,

$C := (c_{\gamma\delta})$, $m \times m$ 型, $R := (r_\gamma^{(\kappa)})$, $n \times m$ 型，とおくと，$C = {}^t\!R\, R$.

(ii)　$m = n$ とし，変数 r_γ $(1 \leq \gamma \leq n)$ に対する次の連立方程式を考える：

$$(51.11) \qquad r_\beta\, r_\gamma = \sum_{1 \leq \alpha \leq n} a_{\alpha\beta\gamma}\, r_\alpha.$$

仮定②　　$m = n$, かつ，$a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}$　(β, γ の交換可)．

結論: 方程式 (51.11) の解として，見掛け上，n 組の解 $(r_\gamma)_{1\le\gamma\le n}=(r_\gamma^{(\kappa)})_{1\le\gamma\le n}$ $(1\le\kappa\le n)$ がとれる．この n 組の解を並べた行列 $R=(r_\gamma^{(\kappa)})$ に対して，$|R|^2=|C|$.

(iii) $m=n$ とする．

仮定③　仮定①②の下で，　行列式 $|C|=|c_{\gamma\delta}|\neq 0$.

結論： 方程式 (51.11) の自明でない解（$r_\gamma=0\,(\forall\gamma)$ ではない解）は丁度 n 個，上に与えたものが存在して，$|R|=|r_\gamma^{(\kappa)}|\neq 0$.

証明.

(i) 可換な行列たち A_γ の同時三角化は，可換な冪零行列たちの同時三角化から来る．

(ii) 行列 $A_\beta A_\gamma=A_\gamma A_\beta$ の要素 $g_{\rho\sigma}$ は，

$$
\begin{aligned}
g_{\rho\sigma} &= \textstyle\sum_\alpha a_{\rho\alpha\beta}a_{\alpha\sigma\gamma}=\sum_\alpha a_{\rho\alpha\gamma}a_{\alpha\sigma\beta}\\
&= \textstyle\sum_\alpha a_{\rho\alpha\sigma}a_{\alpha\gamma\beta}\ (\sigma,\ \gamma \text{ 交換})=\sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}a_{\rho\sigma\alpha}\ (2\text{ 箇所交換}),\\
\therefore\quad & A_\beta A_\gamma=A_\gamma A_\beta=\textstyle\sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha.
\end{aligned}
$$

この最終式の κ 番目の固有値を比較すれば，

$$
(53.*)\qquad r_\beta^{(\kappa)}r_\gamma^{(\kappa)}=\textstyle\sum_{1\le\alpha\le n}a_{\alpha\beta\gamma}r_\alpha^{(\kappa)},
$$

となり，κ ごとに，$(r_\alpha^{(\kappa)})_{1\le\alpha\le n}$ が (51.11) の解を与える．

逆に，(51.11) の自明でない解 $(r_\alpha)_{1\le\alpha\le n}$ に対して，$r=\sum_\gamma r_\gamma x_\gamma, A=\sum_\gamma A_\gamma x_\gamma$ とおくと，

$$
(r_1,r_2,\ldots,r_n)r=(r_1,r_2,\ldots,r_n)A
$$

$$
\therefore\quad 0 = |A-rE|=\textstyle\prod_{1\le\kappa\le n}\bigl(r_1^{(\kappa)}x_1+r_2^{(\kappa)}x_2+\cdots+r_n^{(\kappa)}x_n-r\bigr). \qquad \square
$$

この命題 51.A から命題 53.2.1 を導くのに，先の方程式 (6) を方程式 (51.11) の形に書き直す．それには次のように置けばよい：

$$
\frac{1}{h_\alpha}h_{\alpha^{-1}\beta\gamma}=:a_{\alpha\beta\gamma},\quad \frac{h_\alpha\chi_\alpha}{f}=:r_\alpha\quad (\text{上の } n \text{ に対応するのは } k).
$$

注 53.2： 方程式 (6) は方程式 (51.11) に書き直されたが，私の理解法では，むしろ (51.11) の方が基本になる．それはこの論文を読み直しているうちに気づいたのだが，群環 $\boldsymbol{C}[\mathfrak{H}]$ の中で，(内部自己同型で) 不変なもの全体からなる部分環 $\mathfrak{A}$ をとる．すると，次の命題を得る．Frobenius はある段階ではこのように理解していたのだろうか？

命題 53.*1. （多元）環 $\mathfrak{A}\subset\boldsymbol{C}[\mathfrak{H}]$ は，可換で，生成元系として $X_\alpha:=\sum_{P\in\alpha}\delta_P$ がとれる．その積は（関数の convolution と同じだが），

$$
X_\beta X_\gamma=\textstyle\sum_\alpha \dfrac{h_{\alpha^{-1}\beta\gamma}}{h_\alpha}X_\alpha=\sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}X_\alpha,
$$

である．従って，$(a_{\alpha\beta\gamma})$ は環 $\mathfrak{A}$ の構造定数である．そして，方程式 (51.11) は，可換環 $\mathfrak{A}$ の **1 次元表現**を与える．

また，この後の §5 でのように，$\chi(R) := \chi_\alpha\,(R \in \alpha)$ とおいて，χ を群 $\mathfrak{H}$ (従って群環 $\boldsymbol{C}[\mathfrak{H}]$) 上の不変関数と捉えれば，$h_\alpha \chi_\alpha = \chi(X_\alpha)$ となる．さらに後に，論文 **56** で分かるように f は χ に対応する群の線形表現の次元であるから，$r_\alpha = h_\alpha \chi_\alpha / f$ はその正規化された指標 $\widetilde{\chi} := \chi / f$ の X_α での値である：$r_\alpha = \widetilde{\chi}(X_\alpha)$．

こう理解すれば，k 組の (51.11) の解 $(r_\alpha^{(\kappa)})_\alpha\ (1 \le \kappa \le k)$, 従って，(6) の解 $(\chi_\alpha^{(\kappa)})_\alpha$ は群の相異なる既約指標を与えることが納得出来る．

しかし Frobenius はどうして，これが本質的だ，と見通すことが出来たのだろうか（§5 および論文 **56** の §1 参照）．

§3 (pp.9-12): 方程式系 (6) を書き換えた (51.11) において，k 組の解 $(r_\alpha^{(\kappa)}), 0 \le \kappa \le k-1$, を並べた行列 $(r_\alpha^{(\kappa)})$ は正則であった．逆行列の転置 $(s_\alpha^{(\kappa)}) := {}^t\!(r_\alpha^{(\kappa)})^{-1}$ を $(r_\alpha^{(\kappa)})$ の complementäre System と呼ぶ．

$$\text{(51.15)} \qquad \textstyle\sum_\kappa r_\alpha^{(\kappa)} s_\beta^{(\kappa)} = e_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha r_\alpha^{(\kappa)} s_\beta^{(\lambda)} = e_{\kappa\lambda} \quad (e_{\alpha\beta} \text{ は } \delta_{\alpha\beta} \text{ と同じ}),$$

を使って，(53.$*$) を書き直していくと，次になる：

$$\text{(51.17)} \qquad s_\alpha^{(\kappa)} r_\gamma^{(\kappa)} = \textstyle\sum_\beta a_{\alpha\beta\gamma}\, s_\beta^{(\kappa)}.$$

そこへ，$r_\gamma^{(\kappa)} = h_\gamma \chi_\gamma^{(\kappa)} / f^{(\kappa)}$, $a_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha^{-1}\beta\gamma} / h_\alpha$, を代入すると，

$$\textstyle\sum_\beta \frac{h_{\alpha^{-1}\beta\gamma}}{h_\alpha}\, s_\beta^{(\kappa)} = \frac{h_\gamma \chi_\gamma^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}}\, s_\alpha^{(\kappa)} \qquad (\,(s_\alpha^{(\kappa)})\ \textbf{の決定方程式})$$

を得る．(6) 式と比較してみると，$s_\beta^{(\kappa)} = \dfrac{e^{(\kappa)}}{h}\, \chi_{\beta^{-1}}^{(\kappa)}$ （$e^{(\kappa)}$ は比例定数）が解を与える．(51.15) に代入して，次の等式を得る．

$$\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(\kappa)} \chi_{\alpha^{-1}}^{(\lambda)} = 0 \ \ (\kappa \ne \lambda) \quad (\ell^2(\mathfrak{H}) \text{ 上での直交関係に対応}),$$

$$\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(\kappa)} \chi_{\alpha^{-1}}^{(\kappa)} = \frac{h f^{(\kappa)}}{e^{(\kappa)}} \qquad (e^{(\kappa)} \text{ は定数}),$$

$$\sum_\kappa \frac{e^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}} \chi_\alpha^{(\kappa)} \chi_\beta^{(\kappa)} = \frac{h h_{\alpha\beta}}{h_\alpha h_\beta} \quad (\text{別の直交関係に対応}),$$

ただし，
$$h_{\alpha\beta} := |\{(A,B); AB = E\}|$$
$$\therefore \quad h_{\alpha\beta} = 0 \ \ (\beta \ne \alpha^{-1}), \qquad h_{\alpha\beta} = h_\alpha \ \ (\beta = \alpha^{-1}).$$

注 53.3： 後に $e^{(\kappa)} = f^{(\kappa)}$ が示されるので，第 1 式は指標の直交関係を示し，第 2 式は指標の $\ell^2(\mathfrak{H})$ での長さを与え，第 3 式は，$\ell^2(\mathfrak{H})$ での（delta 関数類似の）不変関数の‘フーリエ展開’を表す．**現代では，**まず群の線形表現 $G \ni g \mapsto \pi(g)$ を導入し，そののちに，指標を $\chi_\pi(g) := \mathrm{trace}\big(\pi(g)\big)$ として定義する．上の関係式た

ちは，群上の不変積分（Haar 測度）を用いて，線形表現の性質から導くのが，普通のやり方である．Frobenius はまず初めに，(6) 式によって（線形表現より先に）指標を導入したが，そのやり方でも自然に上の直交関係式たちが導かれるのは非常に面白い．

§4 (pp.12-14): 方程式系 (6) についての研究（続き）

§5 (pp.14-19): 群の共役類上の関数と思っていた指標を，群上の関数と捉え直すと，$\chi(B^{-1}AB) = \chi(A)$ $(A, B \in \mathfrak{H})$ を満たす関数である．この二様の考え方を微妙に使い分ける．まず，h 個の変数 $x_R, R \in \mathfrak{H}$, を考えて，$h \times h$ 型の行列 $(x_{PQ^{-1}})_{P,Q\in\mathfrak{H}}$ をとる．別の h 個の変数 $y_R, R \in \mathfrak{H}$, との間に次の演算を与えて，第 3 組の変数 $z_R, R \in \mathfrak{H}$, を作る：

$$z_{PQ^{-1}} = \sum_{R\in\mathfrak{H}} x_{PR^{-1}} y_{RQ^{-1}} \quad \left(\text{または}, z_P = \sum_{QR=P} x_Q y_R\right)$$

すると，行列の積で $(z_{PQ^{-1}}) = (x_{PQ^{-1}})(y_{PQ^{-1}})$ となる．いま，変数 x_R の間に，関係 $x_R = x_P$ ($R \sim P$ (共役) のとき) を入れて，各共役類 α に対して $x_\alpha = x_R$ $(R \in \alpha)$ とおけば，変数の個数は k 個に減少する．このとき積は，

$$(x_{PQ^{-1}})(y_{PQ^{-1}}) = (y_{PQ^{-1}})(x_{PQ^{-1}}) \qquad (\text{可換})$$

となり，また，z_γ を x_α, y_β で表すと，

(53.1) $$h_\gamma z_\gamma = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta\gamma^{-1}}\, x_\alpha y_\beta$$

共役類を番号 $0, 1, 2, \ldots, k-1$ で表して，行列 $(x_{PQ^{-1}})$ の行列式を

$$\Theta(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) := |x_{PQ^{-1}}| \qquad (0 \text{ は } E \text{ の共役類})$$

とおく．下に掲げた論文 **14** の結果を使うと，上の可換性から Θ が **1 次式の積**に分解されることが分かる．その 1 次因数の一つを

$$\xi = \frac{1}{f} \sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha x_\alpha \ \left(= \frac{1}{f} \sum_{R\in\mathfrak{H}} \chi(R) x_R\right)$$

とおく．ここに，$h_\alpha = |\alpha|, \chi_0 = f$ で，χ_α は未知である．そして $\chi(R) := \chi_\alpha$ $(R \in \alpha)$ とおいている．

行列式の $|z_{PQ^{-1}}| = |x_{PQ^{-1}}|\,|y_{PQ^{-1}}|$ なる性質を使うと，次を得る：

$$f \cdot \left(\sum_\gamma h_\gamma \chi_\gamma z_\gamma\right) = \left(\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha x_\alpha\right)\left(\sum_\beta h_\beta \chi_\beta y_\beta\right).$$

ここに上の等式 (53.1) を代入して，§2 の指標の方程式 (6) と同値な，次式を得る：

$$h_\alpha h_\beta \chi_\alpha \chi_\beta = f \cdot \sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma^{-1}}\, \chi_\gamma \qquad (\text{注}：h_{\alpha\beta\gamma^{-1}} = h_{\gamma^{-1}\alpha\beta}).$$

もとの $\Theta(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ は次のように１**次式の積**に分解される：

$$(22) \qquad \Theta = |x_{PQ^{-1}}| = \prod_\kappa \left(\xi^{(\kappa)}\right)^{g^{(\kappa)}}, \quad \xi^{(\kappa)} = \frac{1}{f^{(\kappa)}} \sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(\kappa)} x_\alpha.$$

これには２つの証明が与えてある．第１の証明には論文 **51**（前掲），第２の証明（別証）には次の論文が利用されている：

14. *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Journal für die reine und angewante Mathematik, **84**, 1–63(1878).

§6 (pp.19-22): $h := |\mathfrak{H}|$ として，h^2 個の独立変数 $x_{P,Q}$ $(P, Q \in \mathfrak{H})$ の $h \times h$ 型行列式 $\Theta = |x_{P,Q}|$ の $x_{A,B}$ に対する余因子を $\Theta_{A,B}$ とおく．あらためて h 個の変数 x_P $(P \in \mathfrak{H})$ をとり，$x_{P,Q} = x_{PQ^{-1}}$ とおく．このとき，

$$(3) \qquad \Theta_{A,B} = \frac{1}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial x_{AB^{-1}}}.$$

この場合には，行列 $(x_{PQ^{-1}}), (y_{PQ^{-1}})$ は非可換である．

このあと，さらに関係 $x_R = x_S$ $(R \sim S)$ を入れて，k 個の変数 $x_\alpha = x_R$ $(R \in \alpha)$ の関数と捉えて議論している．この場合には上の行列は可換である．

注 53.4： 次の論文 **54** では，Θ を h 個の変数 x_R の関数と捉え，**群行列式** Gruppendeterminante と呼び，その素因数分解との関係を深く論じている．

§7 (pp.22-27): $\mathfrak{H}$ が群 $\mathfrak{H}'$ の正規部分群であるとき，$\mathfrak{H}$ の指標と $\mathfrak{H}'$ の指標との相互関係が調べられる．

§8 (pp.27-29):　群 $\mathfrak{A}_4$（四面体群），$\mathfrak{S}_4/\boldsymbol{Z}_2^2$（位数 6），$\mathfrak{S}_4$（八面体群），$\mathfrak{A}_5$（二十面体群），$\mathfrak{S}_5$（5 次対称群）の指標表

§9 (pp.29-32): 群 $PSL(2, \boldsymbol{Z}_p)$，p 奇素数，の指標の研究．
このとき，群の共役類の個数 $k = \frac{1}{2}(p-1) + 3$.

§10 (pp.32-37): 群 $PSL(2, \boldsymbol{Z}_p)$，p 奇素数，の全 k 個の指標の表

注 53.5. K.T.W. Weierstrass, *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen*, Auszug aus einem an H.A. Schwarz gerichteten Briefe, der Königlichen Geserschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1884 (全集，本文 pp.311-332, Schwarz による補足 pp.332-339)，は，1883 年 6 月の Weierstrass からの手紙の抜き書き，とのことであるが，現代的にいうと，実数体上の可換多元環の話である．そこでは，**冪零元**を命名し（ich will sie deshalb einen “Theiler der Null” nennen），冪零元の集合について詳しく論じている．本文の終わりに数行を費やし，(私 [平井] が読むと）次のようにコメントしている：「長たらしくてあまりちゃんとまとまっていないので，他の人が内容が重なる論文を投稿しても異議を唱えない」

J.W.R. Dedekind (1885) の同じ題名の論文，Nachrichten von der Königlichen Geserschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1885, pp.141-159，は，多分このコメントを受けて掲載されたのであろう．同様の対象について論じている．論文の導入部で，

体（Körper）を命名している（Die Untersuchung derjenigen Zahlgebiete, die ich Körper nenne, gab mir ⋯）．生成元系（かつ基底）を $e_1, e_2, \ldots, e_n$ として，可換で結合律を満たす積を

$$(*) \qquad e_r e_s = \textstyle\sum_i e_i \, \eta_{i,rs} \qquad \text{（注：スカラー倍が右側に書いてある）}$$

として与える．ベクトルという言葉は出ないが，現代風にいうと，e_r の成分を $e_r^{(s)}, 1 \leq s \leq n$, として，$e_r$ を数空間 $\boldsymbol{R}^n$ (または，$\boldsymbol{C}^n$) の元と捉えている．用語としては，e_r を mehrwertige Größe と呼び，問題の übercomplexe Zahl を $x = \sum e_i \, \xi_i$, その成分を $x^{(s)} (= \sum e_i^{(s)} \xi_i)$ と書き，Funktion x とも呼ぶ（x は，$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ の値をとる関数ということか）．そして，現代風にいうと，$\boldsymbol{R}^n$ に標準的内積を入れ，そこでの正規直交系 $c_r, 1 \leq r \leq n$, を作る：行列 $C := (c_r^{(s)})_{r,s}$ から，$(f_r^{(s)})_{r,s} = {}^tC^{-1}$ とし，$c_r := \sum_s e_s \, f_s^{(r)}$. すると，$c_r$ の成分は $c_r^{(s)} = (r, s)$（$:= \delta_{r,s}$（現代の））．ここまでが第 1 部だが議論は全て OK，しかしいざ肝心の第 2 部（zweite Teil zu meiner Hauptaufgabe）が本文 7 頁目から始まろうとするときに，積 $(*)$ が

$$(22) \qquad c_r c_s = (r, s) c_r \qquad ((r, s) := \delta_{r,s})$$

となる，と主張する．これは全く無理であろう．何故なら，c_r は内積だけを気にして正規直交系を作ったものであり，そのとき積の構造は全く斟酌していないからである．なぜこの間違い（？）が入り込んだのか不思議だが，第 2 部（13 頁分）では，簡明になりすぎた関係式 (22) を使いながらも，あらためて一般式 $(*)$ に戻ってこれを論じている．ここでは，行列式や偏微分・全微分を駆使してあるのだが，実際には一体何が得られているのか，私には分からない．従って，Frobenius が自分の論文 **51** を使って，議論をやり直したことは正しいやり方であると思える．

%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%

54. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

序文 (pp.38-40): 有限群 $\mathfrak{H}$, 位数 $h = |\mathfrak{H}|$, に対して，h 個の独立変数 $x_P, P \in \mathfrak{H}$ を並べた $h \times h$ 型行列式 $\Theta := |x_{PQ^{-1}}|$, ただし $P, Q \in \mathfrak{H}$, を $\mathfrak{H}$ の**群行列式**（*Gruppendeterminante*）という．これは 1 次同次式 $\xi = \sum_{R \in \mathfrak{H}} x_R$ で割り切れる．

① Θ の既約因子（Primfactor）の個数は $\mathfrak{H}$ の共役類の個数 k に等しい．

② $\Theta = \prod_{1 \leq \lambda \leq k} {\Phi^{(\lambda)}}^{e^{(\lambda)}}$ と既約因子に分解すると，$e^{(\lambda)} = f^{(\lambda)} := \deg \Phi^{(\lambda)}$.

③ $f^{(\lambda)} = \deg \Phi^{(\lambda)}$ は群の位数 h を割る．

④ ある線形変換によって，$\Phi^{(\lambda)}$ は丁度 ${f^{(\lambda)}}^2$ 個の独立変数の関数になる．

⑤ それらの変数を合わせると丁度 $\sum_\lambda {f^{(\lambda)}}^2 = h$ 個の独立変数になる．

⑥ 同じ共役類 α の中で $x_A = x_B =: x_\alpha$ $(A, B \in \alpha)$ とおくと，丁度 k 個の独立

変数が出来るが，それらの 1 次式 $\xi^{(\lambda)}$ が存在して，$\Phi^{(\lambda)} = \xi^{(\lambda)}{}^{f^{(\lambda)}}$ となる．

⑦ $\xi^{(\lambda)}, 1 \leq \lambda \leq k$, は互いに 1 次独立である．

⑧ $\xi^{(\lambda)} = \sum_{R\in\mathfrak{H}} \chi^{(\lambda)}(R)x_R$, ただし $A \sim B$（$A, B \in \alpha$）ならば $x_A = x_B$, $\chi^{(\lambda)}(A) = \chi^{(\lambda)}(B)$, とおくと，$\chi^{(\lambda)}$ は指標（Charakter）を与える．

⑨ k 個の値 $\chi^{(\lambda)}(R)$ ($R \in \alpha$, α が動く) により，$\Phi^{(\lambda)}$ は完全に決まる．

⑩ h 個の変数 x_A の入った群行列 Θ の理論は，制限条件 $x_{AB} = x_{BA}, A, B \in \mathfrak{H}$, を入れて k 個の変数に減らしたときの話に帰着される．

この制限の下では，$\Theta = \prod_\lambda \xi^{(\lambda)}{}^{f^{(\lambda)}{}^2}$.

⑪ h 次の多項式 $\Theta = \prod_\lambda \xi^{(\lambda)f^{(\lambda)}{}^2}$ の計算は，k 次の多項式

$$\left|\sum\nolimits_\gamma \frac{1}{h_\alpha} h_{\alpha\beta^{-1}\gamma} x_\gamma\right| = \prod\nolimits_\lambda \xi^{(\lambda)} \qquad \text{（行列式の一次式への分解）}$$

の計算に帰着される（$h_{\alpha\beta\gamma}$ の定義と計算に着いては，**53** を参照せよ）．

群行列式の既約因子（Primfactor）$\Phi^{(\lambda)}$ と全く類似の話が，

30. *Über Thetafunktionen mehrerer Variabelen*, Journal für die reine und angewante Mathematik, **86**, 100–122(1884) (Crelle's Journal).

に現れている．

現在までは，群行列式は可換群に対してのみ研究されてきた．この場合には，1 次因子に分解できる．

非可換群に対しては，1886 年の Dedekind の研究があるだけである．(**注：** 後の論文 **56** により，3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$, Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$, であることが分かる.）私はこれに誘発されて，任意の群に対する群行列の既約因子分解を研究した．

§1 (pp.41-43): $h = |\mathfrak{H}|$ 次の行列

$$(x_{P,Q}) = (x_{PQ^{-1}}) = (x) \tag{1}$$

の行列式（P, Q は $\mathfrak{H}$ を走る）

$$|x_{P,Q}| = |x_{PQ^{-1}}| = \Theta(x_E, x_A, x_B, x_C, \ldots) = \Theta(x_R) = \Theta(x) = \Theta \tag{2}$$

を考える．上式 (1), (2) は論文にこのままの形で書いてあり，記号（とくに x や x_R）の定義や使い方を説明している，と解される．x はダミーの記号（ein leeres Zeichen）であり，x には添字 $E, A, B, C, \ldots$ を付けることによって意味が出る，とする．ε を $\varepsilon_E = 1, \varepsilon_R = 0$ ($R \neq E$), とおくと，(ε) は単位行列（Einheitsmatrix, Hauptmatrix）である．さてそこで，$(z) = (x)(y)$ とすると，

$$z_{PQ^{-1}} = \sum\nolimits_R x_{PR^{-1}} y_{RQ^{-1}} \qquad \Big(z_A = \sum\nolimits_{RS=A} x_R y_S\Big).$$

$(x_{P,Q})^n = (x^{(n)})$ とおくと， $x_R^{(n)} = \sum x_{R_1} x_{R_2} \cdots x_{R_n}$ $(R_1 R_2 \cdots R_n = R)$.

$$(8) \qquad (z) = (x)(y) \implies \Theta(z) = \Theta(x)\Theta(y)$$

Θ の展開は x_E^h から始まる．Θ の既約因子（Primfactor）Φ の次元を $f = \deg \Phi$ とすると，Φ は必ず x_E^f を含んでいるので，その係数を 1 とする．

命題 54.1.1. 各既約因子 Φ について

$$(9) \qquad (z) = (x)(y) \text{ のとき，} \quad \Phi(z) = \Phi(x)\Phi(y) \qquad [\Phi \textbf{ の方程式}]$$

逆に，分解不能な ganze homogene Function Φ が (9) を満たせば，それは Θ の因子である．

証明. $\Theta(z) = \Theta(x)\Theta(y)$ であるから，左辺の既約因子 $\Phi(z)$ は，h 変数 x_R の多項式 $\Lambda(x)$ と h 変数 y_R の多項式 $M(y)$ との積で書ける： $\Phi(z) = \Lambda(x)\, M(y)$. ここで，$y_R = \varepsilon_R$ とおくと，$z_R = x_R$ となり，$\Phi(x) = \Lambda(x)\, M(\varepsilon)$. 同様にして，$\Phi(y) = \Lambda(\varepsilon)\, M(y)$, そして，$\Lambda(\varepsilon)\, M(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) = 1$.

逆に，$\Phi(z) = \Phi(x)\Phi(y)$ とする．(y) として (x) の余因子行列がとれる（(x) の余因子行列については，**注 54.2** 参照）．このとき，$z_R = \varepsilon_R\, \Theta(x)$ となり，

$$\Phi(z) = \Theta(x)^f = \Phi(x)\, \Phi(y),$$

かつ，各 y_A は h 個の変数 x_R の多項式である．$\Phi(x)$ は分解不能であるから，$\Theta(x)$ の因子である． □

この節では論文 **14, 51**（上掲）が使われている．

注 54.1. 上の命題は，証明も込めて実に興味深い．これを表現論から見ると，「全ての既約表現は群の正則表現の成分として現れる」ことを意味し，非常に重要である．この事実がかくも簡単に証明できることに衝撃を受ける．

注 54.2. 命題 53.6.1(53, §6 参照). $\Theta = |x_{P,Q}|$ の $x_{A,B}$ の余因子 $\Theta_{A,B}$ は $\mathfrak{H}$ の元 $AB^{-1} = C$ によって決まる．

証明. 始めに対角線上の要素 $x_{A,A}$ の余因子 $\Theta_{A,A} = |x_{R,S}|$ を考える．ここに，R と S は，$\mathfrak{H} \setminus \{A\}$ の上を同じ順序で動く．$R = UA, S = VA$ とおくと，

$$x_{R,S} = x_{UA,VA} = x_{UAA^{-1}V^{-1}} = x_{UV^{-1}} = x_{U,V},$$

従って，$\Theta_{A,A} = |x_{U,V}| = \Theta_{E,E}$. そこで，$A, B$ を $\mathfrak{H}$ の元とし，$AB^{-1} = C$ とおく．そして，CP を P の順序に従って動かす．$y_P := x_{CP}$ とおく．$x_{CP,Q} = x_{CPQ^{-1}} = y_{PQ^{-1}} = y_{P,Q}$ であるから，$|y_{P,Q}| = |x_{CP,Q}| = \pm |x_{P',Q}|$ となる．ただし，符号 $\pm$ は P' 自身の順序と $P' = CP$ の P に従った順序との差に依る．さて，$\Theta_{B,B}(y) = \Theta_{E,E}(y)$ である．これらから，$\Theta_{A,B} = \Theta_{C,E}$ を得る． □

$$\text{（上の命題から）} \qquad \Theta_{A,B} = \frac{1}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial x_{AB^{-1}}}. \tag{I}$$

§2 (pp.43-44):

命題 54.2.1. Φ が Θ の線形項であるときは，$\Phi(x)=\sum_A \chi(A)x_A$ とすると，χ は，可換群 $\mathfrak{H}/[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ の 1 次元表現である．また逆も成り立つ．

証明． (9) 式を使う．$z_C=\sum_{AB=C} x_A y_B$ であるから，

$$\textstyle\sum_C \chi(C)z_C=\left(\sum_A \chi(A)x_A\right)\left(\sum_B \chi(B)y_B\right). \tag{II}$$

この両辺の $x_A y_B$ の係数を比較して，$\chi(AB)=\chi(A)\chi(B)$. □

（**注：Dedekind による命名：**A,B の**交換子**（*Commutator*）とは $BA=ABF$ となる元 F のこと：$F=B^{-1}A^{-1}BA$）

§3 (pp.44-50): Θ の既約因子 Φ に対し，$f=\deg\Phi>1$ とする．$\varepsilon_R=\delta_{R,E}$ とおくと $(\varepsilon)=(\varepsilon_{PQ^{-1}})=E_h$ (h 次単位行列)．$\Phi(x)=\Phi(\varepsilon)\Phi(x), \Phi(\varepsilon)=1$, より，

$$\Phi(x)=x_E^f+\left(\textstyle\sum_{R\neq E}\chi(R)x_R\right)x_E^{f-1}+\cdots$$

の形である．$\chi(E):=f$ とおいて**指標**（*Charakter* f^{ten} *Grades*）χ を得る．

$$\chi(R)=\text{“}\frac{\partial\Phi}{\partial x_R}\text{ の } x_E^{f-1} \text{ の係数”}\quad (R=E \text{ の場合も込めて});$$

すなわち，
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_R} = \chi(R)\,x_E^{f-1}+\cdots \quad (R\in\mathfrak{H}). \tag{III}$$

§4 (pp.50-52): $\Phi(z)=\Phi(x)\Phi(y)$ を y_A で微分すると，

$$\textstyle\sum_R \dfrac{\partial\Phi(z)}{\partial z_R}x_{RA^{-1}}=\Phi(x)\,\dfrac{\partial\Phi(y)}{\partial y_A}.$$

$y_R=\varepsilon_R$ とおくと，
$$\textstyle\sum_R \dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_R}x_{RA^{-1}}=\chi(A)\,\Phi(x).$$

同様にして
$$\textstyle\sum_R \dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_R}x_{A^{-1}R}=\chi(A)\,\Phi(x).$$

§5 (pp.52-54): ここでは指標の**直交関係**を出している．線形表現を全く使っていない代数的な証明である点で興味深いので証明を詳しく再現する．

命題 54.5.1. $\chi,\psi\neq\chi$ を $\mathfrak{H}$ の指標とする．Φ を χ に対応する群行列式 Θ の既約因子（(III) 式参照）とし，$f=\deg\Phi$, e を Φ が Θ に含まれる重複度とすると，

(6) $$\textstyle\sum \chi(R)\,\chi(S)=\dfrac{h}{e}\chi(A),\qquad \sum \chi(R)\,\psi(S)=0\qquad (RS=A),$$

(7) $$\textstyle\sum_R \chi(PR^{-1})\,\chi(RQ^{-1})=\dfrac{h}{e}\chi(PQ^{-1}),\qquad \sum_R \chi(PR^{-1})\,\psi(RQ^{-1})=0,$$

(8) $$\textstyle\sum_R \chi(R)\,\chi(R^{-1})=\dfrac{hf}{e},\qquad \sum_R \chi(R)\,\psi(R^{-1})=0.$$

証明. (6) ⇒ (7) ⇒ (8) であるから，(6) を証明すればよい．$\Theta = |x_{P,Q}|$ における $x_{P,Q}$ の余因子を $\Theta_{P,Q}$ とおけば，

$$(1) \qquad \Theta_{P,Q} = \frac{1}{h}\frac{\partial\Theta}{\partial x_P Q^{-1}} = \Theta_{PQ^{-1}}, \qquad ここに \quad \Theta_R := \frac{\partial\Theta}{\partial x_R}.$$

従って，$\sum_R x_{P,R}\Theta_{Q,R} = \sum_R x_{R,P}\Theta_{R,Q} = \varepsilon_{P,Q}\Theta$, すなわち，

$$(2) \qquad \textstyle\sum_R x_{AR}\dfrac{\partial\Theta}{\partial x_R} = \sum_R x_{RA}\dfrac{\partial\Theta}{\partial x_R} = \varepsilon_A\, h\,\Theta,$$

ここに，$\Theta = \Phi^e\Psi$, Ψ は Φ と互いに素，を代入すると，

$$\textstyle\sum_R x_{AR}\left(e\,\Psi\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_R} + \Phi\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_R}\right) \;=\; \varepsilon_A h\,\Phi\,\Psi.$$

これから，$\sum_R x_{AR}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_R}$ が Φ で割り切れることが分かる．次数が同じなので，x_E^f の係数を比較して，次を得る：

$$(3) \qquad \textstyle\sum_R x_{AR}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_R} = \sum_R x_{RA}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_R} = \chi(A^{-1})\,\Phi.$$

$\sum_S x_{RS}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_S} = \chi(R^{-1})\,\Phi$ の両辺に Θ_{RA} を乗じて R で足すと，

$$h\Theta\frac{\partial\Phi}{\partial x_A} = \Phi\textstyle\sum_R \chi(R^{-1})\dfrac{\partial\Theta}{\partial x_{RA}} = \Phi\sum_R \chi(AR^{-1})\dfrac{\partial\Theta}{\partial x_R}$$

ここに，$\Theta = \Phi^e\Psi$ を代入すると，$h\Psi\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_A} = \sum\chi(AR^{-1})\Big(e\Psi\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_R} + \Phi\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_R}\Big)$,
これから，

$$(4) \qquad \frac{h}{e}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_A} = \textstyle\sum_R \chi(AR^{-1})\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_R},$$

を得る．何故ならば，左辺に移動した項は，Φ で割り切れるが，次数が $f-1$ だからである．今度は，ψ に対応する既約因子 $\Phi' \neq \Phi$ を取って，$\Theta = \Phi'^{e'}\Psi'$ を代入すると，上と同様に，$h\Phi'\Psi'\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_A} = \Phi\sum\chi(AR^{-1})\Big(e'\Psi'\dfrac{\partial\Phi'}{\partial x_R} + \Phi'\dfrac{\partial\Psi'}{\partial x_R}\Big)$, を得る．
これから，

$$(5) \qquad \textstyle\sum_R \chi(AR^{-1})\dfrac{\partial\Phi'}{\partial x_R} = 0,$$

を得る．何故なら，この関数は Φ' で割り切れるから．さて，(4) 式，(5) 式において，それぞれ，$x_E^{f-1}, x_E^{f'-1}$ の係数を比較すると，次式を得る：

$$\textstyle\sum\chi(AR^{-1})\,\chi(R) = \dfrac{h}{e}\,\chi(A), \qquad \sum\chi(AR^{-1})\,\psi(R) = 0.$$

これは命題 54.5.1 の中の (6) 式を与える. □

注： 原論文中には，命題（Satz）や証明（Beweis）などの見出しは存在しない．この報告で便宜上これらをこしらえて読みやすくした．また，不思議なことに原論文中では式番号は，(1.), (2.), (3.) 等とつねにピリオドを伴っている．これは上の Weierstraßや Dedekind の論文でも同じである．

§6 (pp.54-56): 行列 $(x_{PQ^{-1}})$ と $(y_{Q^{-1}P})$ とは可換である．これをネタにかなり長い議論により次を得る：x_R を上の通り h 個の独立変数とし，y_R を $y_{AB}=y_{BA}$ を満たす（k 個が独立）とすると $(x_{PQ^{-1}})$ と $(y_{PQ^{-1}})$ とは可換で，(y_R) にしか依らない量 η があって，

$$(6) \qquad \Phi(x_E+y_E, x_A+y_A, x_B+y_B, \ldots) = \Phi(x_E+\eta, x_A, x_B, \ldots).$$

これから次が分かる．$\Phi^{(\lambda)}$ が指標 $\chi^{(\lambda)}$ に対応するとすると，$x_{AB}=x_{BA}$ を満たす x_R について，$\Phi^{(\lambda)}=(\xi^{(\lambda)})^{f^{(\lambda)}}$，ここに，$\xi^{(\lambda)}=\dfrac{1}{f}\sum\chi^{(\lambda)}(R)x_R=\dfrac{1}{f}\sum_\rho h_\rho\chi_\rho^{(\lambda)}x_\rho$ ($x_\rho=x_R$ for $R\in\rho$ 共役類). これは，**53**, §5, (22) 式の全く違う証明を与える．そして，そこでの $\xi^{(\lambda)}$ に対する冪 $g^{(\lambda)}$ には，ここでは，$g^{(\lambda)}=e^{(\lambda)}f^{(\lambda)}$ として別の意味が付与された．[主張 ⑥ の証明および線形項 $\xi^{(\lambda)}$ の具体形]

§7 (pp.57-60): 主張 ① の証明． 上の (6) 式を y_ρ で微分し，y_κ を全て 0 とおけば，$\sum_{R\in\rho}\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_R}=\dfrac{h_\rho\chi_\rho}{f}\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_E}$. ここで，$x_R$ を x_{AR} で置き換えれば，

$$(1) \qquad \sum_{R\in\rho}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_{AR}}=\frac{h_\rho\chi_\rho}{f}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_A}.$$

両辺の x_E^f の係数を比較する．B の共役類を $[B]$ と書けば，

$$(2) \qquad \sum_{S\in[B]}\chi(AS)=\frac{h_{[B]}}{f}\chi(A)\chi(B).$$

すこし議論して，

$$(3) \qquad h\,\chi(A)\chi(B)=\sum_R f\,\chi(AR^{-1}BR).$$

さらに議論を続けて，主張①が示される.（Dedekind の上の論文も引用されている.）

§8 (pp.60-63): 群行列式 Θ の 1 つの Primfaktor を Φ $(\leftrightarrow\chi)$ とし，その重複度を e, $\deg\Phi=f$ とする．h 個の変数 x_R に代えて新しい変数 $\xi_S:=\dfrac{e}{h}\sum_R\chi(RS^{-1})x_R$ を導入すると，新変数のうち丁度 ef 個が一次独立であり，行列 $(\xi):=(\xi_{PQ^{-1}})$ の階数は ef である．ここでの代数的議論は結構込み入っていて難しい．

§9 (pp.63-67): 主張②の証明． その計算は見通しが悪くて難しい．

§10 (pp.67-71): 行列 $(x_{PQ^{-1}})$ と $(y_{Q^{-1}P})$ とは可換であるから，行列式

$$(1) \qquad |u\,x_{PQ^{-1}}+v\,y_{Q^{-1}P}+w\,\varepsilon_{PQ^{-1}}| \qquad (u,v,w \text{ はスカラー})$$

は，1次項 $ua_\alpha+vb_\alpha+w$ の積に分解する．ここに，a_α, b_α はそれぞれ $(x_{PQ^{-1}}), (y_{Q^{-1}P})$ の固有値である．ここでは，どのように2つの行列の固有値を順序付ければいいかを問う．2つの新しい変数の組　ξ_S と $\eta_S := \dfrac{e}{h}\sum_R y_R\chi(RS^{-1})$ とを道具に使って議論しているが，それらの内容は短くはまとめきれない．

§11 (pp.71-74): この節では Θ の成分 Φ^e が変数 ξ_S を使って，それらの，ある小行列式の和として表示できることを示す．そこでは，次の論文 **11** での結果（の拡張）を使っている：

命題 11.1. n 次の正方行列 $(a_{\alpha,\beta}), (b_{\alpha,\beta}), (c_{\alpha,\beta})$ につき，$(c_{\alpha,\beta}) = (a_{\alpha,\beta})(b_{\alpha,\beta}), r = \mathrm{rank}\,(a_{\alpha,\beta})$ とする．このとき，$(a_{\alpha,\beta})$ の適当な r 行を選ぶと，$(c_{\alpha,\beta})$ の任意の r 次小行列式は，この r 行を使って表せる．

11. *Über das Pfaffsche Problem*, Journal für die reine und angewante Mathematik, **82**, 230–315(1875).

§12 (pp.74-77): 群行列式 Θ の k 個の Primfaktoren を調べることは，指標の係数 $\chi_\alpha^{(\kappa)}$ の決定に帰着される．後者のためには指標決定方程式を解くことになる．ここでは，定数 $\chi_\alpha^{(\kappa)}$ の代数的・算術的性質を調べる．これらの数が属する代数体を決定する．

$A \in \mathfrak{H}$ を位数 m の元とし，それが生成する位数 m の可換部分群 $\mathfrak{G}$ を考えることにより，次の命題が示されている：

命題 54.12.1. $A \in \mathfrak{H}$ を位数 m の元とし，χ を次数 f の指標とする（ein Charakter f^{ten} Grades）．このとき，$\chi(A)$ は f 個の 1 の m 乗根の和として表される．より詳しく，1 の m 乗根 $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_f$ があって，

$$(6) \qquad \chi(A) = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_f, \qquad \chi(A^n) = \rho_1^n + \rho_2^n + \ldots + \rho_f^n \ \ (\forall n).$$

ρ を 1 の原始 m 乗根，$K(\rho) := \boldsymbol{Q}(\rho)$ とする．$\chi(A^n)$ はこれの元である．さらに，A と共役な A の冪が $A^r, A^s, A^t, \ldots$ であるとき，ρ をそれぞれ $\rho^r, \rho^s, \rho^t, \ldots$ で置き換えたときに不変になる $K(\rho)$ の元からなる部分体を $\Lambda(\rho)$ と書くと，$\chi(A) \in \Lambda(\rho)$.

Dedekind, *Über einen arithmetischen Satz von Gauss,* Prager Math. Ges. 1892,
を使って，$\dfrac{h_\alpha\chi_\alpha}{f}$ が $\Lambda(\rho)$ の *ganze* algebraisch Zahl である，従って，$\sum_\alpha \dfrac{h_\alpha\chi_\alpha}{f}\chi_{\alpha'} = \dfrac{h}{e}$ が ganze Zahl であることが分かる．故に，$e = f$ は $h = |\mathfrak{H}|$ を割り切る（**主張③**）．

感想： 群の指標は，論理的には，線形表現が先で，その後で導入されるべきもの，と思い込んでいたが，**53, 54** の論文を読んで，そうとも限らぬことを認識した．線形表現より先に指標が先行して導入されることも**有り**，である．とくに，**54** の**主張③**（最終節 §12 で証明）は，恥ずかしながら私は知らなかった．そして，これは線形表現を使ってもなかなか証明できない代物である．

補遺： 川中宣明氏が以前に Frobenius の群行列式についてどこかに書いておられた，ということを聞いていたので，この原稿を送ったところ，次の記事のコピーをお送り頂いた．なかなか面白いのでここに記録しておく．Dedekind から Frobenius

への手紙も紹介されている（その1つでは「群行列式」を定義しその研究を提案しているとのこと）.

川中宣明, 覚えられる（?）3次, 4次方程式の解法,「数学セミナー」, 2000年2月号, pp.13-17.

%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%

56. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 944–1015(1897).

序文 (pp.82-83): 省略（内容の要点は, 対応する各節に分配して記した）

§1 (pp.83-85): 指標 $\chi(R), R \in \mathfrak{H}$, の決定方程式系は次で与えられる：

$$\begin{aligned} \chi(E) = f, \quad \chi(AB) = \chi(BA) \\ h\,\chi(A)\chi(B) = f\sum_R \chi(AR^{-1}BR) \\ h = \sum_R \chi(R)\chi(R^{-1}) \end{aligned} \tag{IV}$$

共役類 ρ における値を χ_ρ と書けば, この k 個の値に対する方程式系は, 上から導かれる（単位元 E の共役類を 0 で表す）：

$$\chi_0 = f, \quad h_\alpha h_\beta\,\chi_\alpha\chi_\beta = f\sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma^{-1}}\chi_\gamma \tag{V}$$

$$h = \sum_\rho h_\rho\,\chi_\rho\chi_{\rho^{-1}}. \tag{VI}$$

ここで, $h_{\alpha\beta\gamma^{-1}} = h_{\gamma^{-1}\alpha\beta}$ に注意すると, 第2式は最初の論文**53**, §2 の**指標の定義方程式** (6) に他ならない.

この形で議論を進めると, $\mathfrak{H}$ の正規部分群を $\mathfrak{G}$ としたとき, 商群 $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ の指標と $\mathfrak{H}$ の指標との関係も自明ではなく, それなりの証明が与えられている.

§2 (pp.85-87): **定義（命名）**: 抽象群 $\mathfrak{H}$ の各元 A に行列 (A) を対応させて, $(A)(B) = (AB)$ を満たすとき, **表現**（*Darstellung*）とよぶ. [die Substitutionen oder die Matrizen $(A), (B), (C), \cdots$ die Gruppe $\mathfrak{H}$ *darstellen.*]

同値（*aequivalent*）, **同値類**（*Classe*）の定義は現代と同じである.

また, x_R $(R \in \mathfrak{H})$ を独立変数として, 次を *zur Gruppe $\mathfrak{H}$ geherige Matrix* と呼ぶ：

$$(A)x_A + (B)x_B + (C)x_C + \cdots = \sum (R)x_R \tag{VII}$$

$y_A, y_B, y_C, \ldots,$ を新しい変数とし, $z_T = \sum_{RS=T} x_R y_S$ とおく. すると,

$$\bigl(\sum(R)x_R\bigr)\bigl(\sum(S)y_S\bigr) = \bigl(\sum(T)z_T\bigr). \tag{VIII}$$

$F(x) := |\sum(R)x_R|$ とおくと, $F(x)F(y) = F(z)$.

従って，命題 54.1.1 により，F が既約（prime）ならば，F は $\mathfrak{H}$ の群行列式 Θ の成分である．これは，F の各既約成分についても正しい．

注 1：ここではまだ，表現自身には π や T などの記号が与えられていない．現代では例えば，$R \to \pi(R)$ など．

注 2：表現 (R) が 2 つに分解されるとき，対応して $F(x) = F_1(x)F_2(x)$ と分解される．

$F(x)$ の 1 例が $\Theta(x)$ である（これは群の左正則表現に対応する）．

用語： meroedrisch isomorph: （現代用語で）準同型である
holoedrisch isomorph: 同型である

この節では，次が使われている．

45. *Über die Elementalteiler der Determinante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaftten zu Berlin, 7–20(1894).

§3 (pp.87-90): 左正則表現の Primfaktoren に対応する表現への分解：
直交関係（54, §5）：χ, ψ を相異なる $\mathfrak{H}$ の指標（現代的には既約指標）とすると，

$$\textstyle\sum_R \chi(AR^{-1})\,\chi(RB) \;=\; \dfrac{h}{f}\,\chi(AB), \quad \sum_R \chi(AR^{-1})\,\psi(RB) \;=\; 0. \qquad \text{(IX)}$$

h 次の行列 $(\chi(PQ^{-1}))$ の階数は $r = f^2$ である．ある主小行列 $(\chi(A_\alpha A_\beta{}^{-1})), 1 \leq \alpha, \beta \leq r$, が正則にとれる．$\Phi' \leftrightarrow \psi, \deg\Phi' = f'$ とすると，$(\psi(PQ^{-1}))$ の階数は $s = f'^2$ である．$B_1, B_2, \ldots, B_s$ を同様にとる．これらの個数を $\chi, \psi, \ldots$ について足すと，$\sum r = \sum f^2 = h$ となる．h 次の行列 M をその第 P 列が
$^t(\chi(PA_1{}^{-1}), \ldots, \chi(PA_r{}^{-1}), \psi(PB_1{}^{-1}), \ldots, \psi(PB_s{}^{-1}), \ldots)$
となるようにとる．h 次の行列 L をその第 Q 行が
$(\chi(A_1Q^{-1}), \ldots, \chi(A_rQ^{-1}), \psi(B_1Q^{-1}), \ldots, \psi(B_sQ^{-1}), \ldots)$
となるようにとる．上の直交関係を使うと，積 $LM = N$ は k 個のブロック型対角行列となり，そのブロックは，$\left(\dfrac{h}{f}\chi(A_\alpha A_\beta{}^{-1})\right)$ などで，行列式 $\neq 0$. そこで，群行列 $X = (x_{PQ^{-1}})$ を L, M を使って，$Y = LXM$ と変換し，ついで，$Z = YN^{-1} = LXL^{-1}$ と変換すると，k 種のブロックをもつ対角型行列となる．これは，$\mathfrak{H}$ の左正則表現に対する行列である群行列 X を具体的に各 Primfactor に対応する部分表現に分解している．上の k 種のブロックの各々での行列式は，Θ の Primfaktor Φ der f^{ten} Grades が冪 f をもって現れる：$\Theta = \prod \Phi^f$.

§4 (pp.90-93): 線形表現 (R) に対し，$(R) = (r_{\kappa\lambda})$ とし，行列 $\sum_R (R)x_R$ を $(x_{\kappa\lambda})$ とおくと，成分 $x_{\kappa\lambda}$ は x_R の 1 次関数である．一般には，$|x_{\kappa\lambda}| = \Phi^s\Phi'^{s'}\cdots$ であるが，とくに，$|\sum_R (R)x_R| = \Phi(x)$ となっている場合を考えると，

$$(3) \qquad |x_{\kappa\lambda}| = \Phi(x), \qquad |x_{\kappa\lambda} - ue_{\kappa\lambda}| = \Phi(x - u\varepsilon).$$

第2式の u^{f-1} の係数を比較すれば，

$$(4) \qquad \textstyle\sum_R \chi(R) x_R = \sum_\lambda x_{\lambda\lambda},$$
$$(5) \qquad \chi(R) = \textstyle\sum_\lambda r_{\lambda\lambda} \quad \big(= \mathrm{tr}\,(R)\big).$$

ここで線形表現の trace との直接的なつながりが示された．

群行列式 Θ の各 Primfactor f^{ten} Grades Φ に対しては，丁度1つの primitive Darstellung der Gruppe durch Substitutionen von f Variablen が対応する．

§5 (pp.93-96): 定義 (命名)： Eine Darstellung durch lineare Substtutionen (R), welche die entsprechende Determinante $F(x) = |\sum_R (R) x_R|$ unzerlegbar ist, は *primitive Darstellung* と呼ばれる．

（この名はその表現の $F(x)$ が $\Theta(x)$ の Primfactor に対応することから来ている．）

§3 での群行列式に対応する行列（表現）のブロック型分解の Primfactor Φ に対応するブロックをより細かく f 個に分解する．その成分の1つ1つには対応する行列式 $F(x)$ として Φ が得られる．かくて，全体で $\sum f$ 個の行列の直和に分解する．(**注：** これは左正則表現の既約分解である．)

節末に，Dedekind が 1886 に見つけて，April 1896 に Frobenius に話した，$\mathfrak{S}_3$ の群行列と群行列式 $\Theta(x)$ の分解が具体的に与えてある．

§6 (pp.96-99): 指標と相関作用素や群環との関係

Frobenius の指標は現代的にいうと既約指標であることに留意しよう．指標 χ と Θ の Primfaktor Φ が対応しているとする．さらに §3 で示したように線形表現 (R) が対応して，$|\sum_R (R) x_R| = \Phi(x)$ となる．そのとき，§4, (5) 式が $\chi(R) = \mathrm{tr}\,(R)$ を与える．$X := (x_{\kappa\lambda}) = \sum_R (R) x_R \ (1 \le \kappa, \lambda \le f)$ の f^2 個の要素 $x_{\kappa\lambda}$ は一次独立である．従って，行列 X は任意の値をとりうる．

さて，$(A), (B)$ が $(R)^{-1}(A)(R) = (B)$ を満たすとき，trace の性質により，$\chi(A) = \chi(B)$ である．$\mathfrak{H}$ の k 個の共役類の一つ α をとり，その位数を $h_\alpha = |\alpha|$ とする．

$$\textstyle\sum_R (R^{-1}AR) = \dfrac{h}{h_\alpha} J_\alpha, \qquad J_\alpha := \sum_{R\in\alpha} (R),$$

とすると，行列 J_α は任意の (R) と可換になる．(これは現代用語で相関作用素 (intertwining operator) と呼ばれるものである．) 表現が primitive なので，相関作用素は，恒等作用素 $I = (E)$ の定数倍であるから，$f J_\alpha = (E) h_\alpha \chi_\alpha$ とおける：

$$(1) \qquad f \textstyle\sum_{R\in\alpha} (R) = (E) h_\alpha \chi_\alpha, \qquad f \sum_R (RAR^{-1}) = (E) h \chi_\alpha.$$

これから，等式 $\chi_\alpha = \chi(A) \ (A \in \alpha)$ を得る．そして，対角要素を観察して，

$$(2) \qquad f \textstyle\sum_{S\in\beta} \chi(AS) = h_\beta \chi(A)\chi(B), \quad f \sum_R \chi(AR^{-1}BR) = h\chi(A)\chi(B).$$

これが，指標 χ の k 個の値を**決定する方程式**である．

さて，Frobenius は「上の Folmeln に別の意味を与えることが出来る」といって，本報告で先に **注 53.2** で解説した事実を述べている．すなわち，
「群環 $\boldsymbol{C}(\mathfrak{H})$ の不変元からなる可換部分環 $\mathfrak{A}$ の 1 次元表現が指標である」

節末の具体例として，位数 8 の *Quaternionengruppe* $\mathfrak{Q}$（Dedekind 命名）が出てくる．節末に論文 **14**（前掲）が引用されている．

§7 (pp.99-103): §4 で応用されたのであるが，要素が一次独立な変数である正方行列の行列式についての，基本的命題を 3 種証明している．そのために，次の論文が引用されている：

46. *Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaftten zu Berlin, 241-256; 407-431(1894).

3 つの命題のうち最初のものを挙げておこう．n 次正方行列 $X = (x_{\alpha\beta}), 1 \le \alpha, \beta \le n$, を考える．

命題 I. 行列 X の n^2 個の要素 $x_{\alpha\beta}$ が一次独立であるとし，n 次正方行列 Y の各要素はこれらの一次関数とする．Y の行列式が X のそれの 0 でない定数倍になっているとする．このとき，$Y = AXB$, または，$Y = A\,{}^t\!XB$ となる．ここに，A, B は定数行列である．さらに，X の次数 > 1 のときには，どちらかの場合に決まり，A, B もスカラー倍を除いて決まる．

論文 56 全体への感想： この論文では §2 で群の線形表現が定義され，§4 (5) 式で初めて「指標の線形表現を使った定義」

$$\chi(R) = \mathrm{tr}\,(R) \qquad (R \in \mathfrak{H}),$$

が与えられている．ここに，(R) は R に対する表現行列を表す．しかし，議論は，その多くが「群行列式 Θ の Primfaktoren Φ への分解」をもとにしており，先行する論文 **53, 54** での結果に多くを負っている．従って，内容は，いまだ「群の線形表現をもとにした指標理論」への過渡期にある，と言える．

%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%

引き続いて，**57, 58** の論文を読んだ訳だが，ここまでですでに原稿が予定の分量を大幅に超えてしまったので，それらの報告はまた別の機会にしたい．

引　用　文　献：

[**平井 1**] 群の表現の指標について（経験よりの管見），第 12 回数学史シンポジュウム（2001），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**23**, pp.84-94, 2002/3/20.

[**平井 2**] 対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事，第 13 回数学史シンポジュウム (2002)，津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**24**, pp.53-58, 2003/3/20.

フロベニウス： 有限群の指標および線形表現に関する論文リスト
すべてFrobenius 全集 Band III より

53. *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

54. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

56. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 944–1015(1897).

57. *Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaftten zu Berlin, 501–515(1898).

58. *Über die Composition der Charaktere einer Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 330–339(1899).

59. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenfchaften zu Berlin, 482–500(1899).

60. *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichle der Königlich Preußifchen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 516–534(1900).

61. *Über die Charaktere der alternierenden Gruppe*, Sitzungsberichle der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 303–315(1901).

68. *Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).

69. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 401–409(1903).

72. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 987–991(1903).

73. *Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 558–571(1904).

75. *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen* (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 186–208(1906).

76. *Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen* (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 209–217(1906).

78. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 428–437(1907).