フーリエの熱の理論の形成とその内容

植 村 栄 治[1]

1 熱の理論に関するフーリエの諸著作

① フーリエは,「諸固体における熱の伝播の理論」(Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides)(以下**「07 年論文」**と呼ぶ)をパリ科学学士院に提出し,1807 年 12 月 21 日に同学士院で講演を行った.この論文は、審査委員のうち Lagrange らが難色を示したとされ,刊行されないままに終わる (Poisson による概要の紹介あり [1]).1972 年に至り,イギリスの数学史研究家 Grattan-Guinness により,活字となって世に紹介された [2].
② 1811 年 9 月 28 日にフーリエは「諸固体におけるおける熱の運動の理論」(Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides) (以下**「11 年論文」**と呼ぶ) を懸賞論文として同学士院に提出し,1812 年 1 月 6 日に受賞が決定する.しかし欠陥もあるとしてなかなか刊行されず,ようやく 1824 年にその第 1 部 (第 1 〜11 章)[3] が,1826 年に第 2 部 (第 12〜14 章)[4] が刊行された.
③ 11 年論文を書き直した論稿が 1822 年に単行本「熱の解析的理論」(Théorie analytique de la chaleur)(以下**「22 年書」**と呼ぶ)[5] として刊行され,有名になる.22 年書は 11 年論文の第 1 部のほか新規の考察を含むが,11 年論文の第 2 部は含まない.
④ 1888 年に Darboux の監修によるフーリエ全集第 1 巻 [6] が刊行された.第 1 巻は 22 年書をそのまま収録するが,07 年論文及び 11 年論文は含まない.1890 年に刊行された全集第 2 巻には 11 年論文第 2 部が含まれている [7].
⑤ 以上に含まれない新規のテーマを扱った熱の解析に関する比較的短い論文が 1829 年に発表された.この論文は全集第 2 巻に収録されている [8].

2 熱の方程式の発見

Grattan-Guinness の解説によれば,熱が伝播する場合にどのような微分方程式を満たすのかについては,19 世紀初頭に Jean Baptiste Bio(1774-1862) が研究していたという [9].Bio は,一端が熱せられた「細い棒状の物体」につき,その内部での熱の伝導係数 K と外部の大気に向けて熱が散逸する場合の外部伝導係数 h とを区別し,ある点の均衡温度を y として次のような方程式を考えた.

$$Kd^2y - hy = 0$$

これは,点の位置 x を含んでいない誤った方程式であり,Bio はここで行き詰る.1804 年秋に Bio の論文を受け取ったフーリエは,これをヒントに,1804 年末まで

[1] 慶應義塾大学大学院法務研究科.

に次の方程式を考え付いたようである．

$$K\frac{d^2y}{dx} - hy = 0$$

さらに，1805 年の草稿では，フーリエは K を $\dfrac{K}{dx}$ に変えることにより，

$$K\frac{d^2y}{dx^2} - hy = 0$$

という式を考えている．この式もまだ係数が不完全であるが，さらに考察を重ね，とうとう 07 年論文において，フーリエは

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2h}{Kl}y$$

という式に到達する (l は棒の断面である正方形の一辺の長さの半分)．さらに、フーリエは、熱の伝わり方，比熱，内部伝導性，外部伝導性についても考察を加えた上で，時間変化も取り入れた固体内部における熱の運動の一般的な (偏微分）方程式として，

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\Big[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\Big]$$

を理論的に導いている (07 年論文の第 28 節．C は比熱，D は密度，K は内部伝導性)．

Grattan-Guinness の説明に従うと，熱の一般的な方程式を発見したと言えるのはフーリエであり，その時期は 1804 年から 1807 年の間ということになる．

3　フーリエの提示した諸設題とその解答

07 年論文において，フーリエは幾つかの具体的なケースを設題として提示し，それを実際に解くことによって熱の理論の具体的な姿を示そうとする．フーリエ級数その他の数学的理論は，その過程で得られる副産物と言うこともできる．以下にそれらの設題とその解を紹介しよう．

1) **第 1 設題**　直方柱（一方の長さ無限．断面の正方形は十分小さい）の最終温度について

片方の端面（＝正方形）は加熱により温度一定 (=A) とする．他の諸面は冷たい空気 (温度 0) によって冷やされている．全体が定常状態に達した後には，端面に平行な切断面 (＝正方形) は十分小さいために，同一切断面上の点が達する最終温度は皆同じであると考えてよい．その最終温度 y を求めよ（第 19 節）．

4　この場合，端面の中心を通る垂直線を x 軸とすると，次の熱の方程式が成り立つ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2h}{Kl}y$$

K は内部伝導性，l は断面正方形の一辺の長さの半分，h は外部伝導性を表す．端面の温度が A であることを考慮してこれを解くと，次式が得られる（第 19 節）．

$$y = Ae^{-x\sqrt{\frac{2h}{Kl}}}$$

2) **第 2 設題**　環 (断面積は十分小さい) について

環の各点に初期温度が与えられる．加熱はなく，冷たい空気によって冷やされる．距離 x(基準点からの弧長) と時間 t で各点の温度 z を表すのがここでの課題である（第 23 節）．この場合、第 1 設題と同じように，環の切断面は十分小さいので同一切断面上の点の温度は皆同じと考える。すると，K を内部伝導性，C を比熱，D を密度，h を外部伝導性，l を切断面の周囲の長さ，S を切断面の面積として[2]，次式が成り立つ (第 23 節).

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{CD}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{hl}{CDS}z$$

ここで，$\dfrac{K}{CD}$ を K，$\dfrac{hl}{CDS}$ を h と置き直し，R を環の半径として，初期条件を考慮して解くと，次のようになる (第 84 節).

$$z = \frac{e^{-ht}}{\pi R}\Big\{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi R} F(x)\ dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\int_0^{2\pi R} F(x)\sin\big(\frac{nx}{R}\big)\ dx\Big)\sin\big(\frac{nx}{R}\big) + \Big(\int_0^{2\pi R} F(x)\cos\big(\frac{nx}{R}\big)\ dx\Big)\cos\big(\frac{nx}{R}\big)\Big]e^{-n^2\frac{Kt}{R^2}}\Big\}$$

3) **第 3 設題**　球について

球全体を加熱する．各点の温度 z は，中心からの距離 x の関数 $F(x)$ で表されているとする．その後は加熱せず，冷たい空気で冷やす．x と時間 t で，z を表せ (第 25 節)．

この場合，次式が成り立つ (第 25 節).

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{CD}\Big[\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz}{dx}\Big]$$

ここで，$\dfrac{K}{CD}$ を K と置き直して，境界条件

$$\frac{dz}{dx} + \frac{h}{K}z = 0$$

を考慮して解くと，次のようになる (第 101 節).

$$z = \frac{2}{x}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\sin(n_\alpha x)\int_0^X x\sin(n_\alpha x)F(x)dx}{X - \frac{1}{2n_\alpha}\sin(2n_\alpha X)}e^{-Kn_\alpha^2 t}$$

[2] 以後，本稿では，特に断らない限り，K は内部伝導性，C は比熱，D は密度，h は外部伝導性を表す。

ここで，X は球の半径であり，n_α は $\dfrac{nX}{\tan nX} = 1 - \dfrac{h}{K}X$ を満たす無限個の n を小さい方から順に並べたものである．

4) **第4設題**　円柱について

円柱を流体に浸して十分加熱する．円柱内部は，中心軸からの距離が同じなら温度も同じになったと仮定する（すなわち，長さ方向の温度変化は無視できるので，薄い円板を考えるのと同じ)．次に，円柱を冷たい空気にさらして冷やす．中心軸からの距離 x と時間 t で，各点の温度 v を表せ（第26節）．

この場合，次式が成り立つ(第26節).

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{CD}\Big(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\Big)$$

ここで，$\dfrac{K}{CD}$ を K と置き直し，境界条件

$$hv + K\frac{dv}{dx} = 0$$

を考慮して解くと，次のようになる(第135節).

$$v = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^R x\varphi(x)u_n dx}{U_n^2(1+(\frac{hR}{2^2K\sqrt{\theta_n}})^2)}u_n e^{-\frac{2^2Kt\theta_n}{R^2}}$$

ここで，R は円柱の半径，$\varphi(x)$ は中心軸から距離 x の点における初期温度を示す関数である．また，

$$u_i = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\ (\frac{2x}{R}\sqrt{\theta_i}\sin q)\ dq$$

である．U_i は関数 u_i が $x = R$ のときにとる値である．θ_i は，次の連分数を満たす無限個の θ を小さい方から順に並べたときの i 番目の値である．

$$\frac{hR}{2K} = \cfrac{\theta}{1 - \cfrac{\theta}{2 - \cfrac{\theta}{3 - \cfrac{\theta}{4 - \cfrac{\theta}{5 - \ldots}}}}}$$

なお，この連分数は方程式 $y + \dfrac{dy}{d\theta} + \theta\dfrac{d^2y}{d\theta^2} = 0$ を解く過程で現れたものである．

5) **第5設題**　直方柱（一方の長さ無限）の最終温度について

長さが一方の方向へ無限に伸びている直方柱の端面(＝正方形)を加熱し、端面の温度を一定に保つ．端面以外の表面は冷たい空気で冷やされている．各点の最終温度 v を求めよ（第27節）．

この場合，加熱される端面の中心を原点とし，正方形の辺に平行に y 軸と z 軸を取り，端面に垂直に x 軸を取ると，次式が成り立つ (第 27 節).

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0$$

これに境界条件

$$K\frac{dv}{dy}+hv=0 \qquad \text{及び} \qquad K\frac{dv}{dz}+hv=0$$

$$x=0\text{ のとき}\quad v=1$$

を加えて解くと，次のようになる (第 144 節).

$$v=16\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(n_\alpha l)\cos(n_\alpha z)}{2n_\alpha l+\sin(2n_\alpha l)}\Big[\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\sin(n_\beta l)\cos(n_\beta y)}{2n_\beta l+\sin(2n_\beta l)}e^{-x\sqrt{n_\alpha^2+n_\beta^2}}\Big]\right\}$$

ここで，l は直方柱の厚さの半分であり，n_i は $\dfrac{\varepsilon_i}{l}$ に等しく，ε_i は $\varepsilon\tan\varepsilon=\dfrac{hl}{K}$ を満たす無限個の ε の値を小さい方から順に並べたものである.

6) **第 6 設題**　立方体について

立方体全体を同一温度に加熱する．その後は加熱なしで，冷たい空気で冷やす．各点の位置座標と時間 t で，各点の温度 z を表せ（第 28 節）.

この場合，立方体の中心を原点とし，相互に隣接する 3 つの面に下ろした垂線を x 軸，y 軸，z 軸とすると，次式が成り立つ (第 28 節).

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\Big[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\Big]$$

なお，フーリエは，この式が，立方体に限らず，任意の固体における熱の伝播の一般的な方程式であることを指摘し，上記の球や円柱の場合の式もこれの特別な場合として導けることを示している（第 29～31 節). $\dfrac{K}{CD}$ を K と置き直し，境界条件

$$K\frac{dv}{dx}+hv=0$$

$$K\frac{dv}{dy}+hv=0$$

$$K\frac{dv}{dz}+hv=0$$

を加えて解くと，次の解が得られる (第 154 節).

$$v = \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\sin(n_\alpha a)}{n_\alpha a \mu_\alpha} (\cos n_\alpha x) e^{-K n_\alpha^2 t} \right\} \times \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\sin(n_\alpha a)}{n_\alpha a \mu_\alpha} (\cos n_\alpha y) e^{-K n_\alpha^2 t} \right\}$$
$$\times \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\sin(n_\alpha a)}{n_\alpha a \mu_\alpha} (\cos n_\alpha z) e^{-K n_\alpha^2 t} \right\}$$

ここで a は立方体の一辺の長さの半分であり，n_i は $n \tan an = \frac{h}{K}$ を満たす無限個の n の値を小さい方から順に並べたものであり，μ_i は $\frac{1}{2}\ \frac{1+\sin(2n_i a)}{2n_i a}$ である．

4　フーリエ級数の理論

フーリエは、以上の 6 個の設題を提示した後，それらの解を示す前に，次の設題を提示する (第 32 節. ただし第 1 設題は前述のように第 19 節で解かれている). フーリエ級数の理論は，この設題から発展して導かれる．

長方形薄板の設題：　長方形の薄板 (厚さは無視する) があって，その長さは一方に無限に伸びているとする．その端面は加熱されて温度 1 に保たれ，2 つの稜の温度は 0 に保たれる．このとき，薄板の各点の静止温度を求めよ．

端面を y 軸に，中心軸を x 軸に取り，点の温度を z とすると，熱の方程式は，

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = 0$$

となる (第 32 節)．x が無限大のときに z が 0 になるということと，y が 1 及び -1 のとき z は 0 であるということを考慮すると，次式が得られる (第 33 節).

$$z = a_1 e^{-\frac{1}{2}\pi x} \cos \frac{1}{2}\pi y + a_2 e^{-\frac{3}{2}\pi x} \cos \frac{3}{2}\pi y + a_3 e^{-\frac{5}{2}\pi x} \cos \frac{5}{2}\pi y + \dots$$

さらに，y が 1 と -1 の間にあれば z は常に 1 であることを考慮すると，長い計算を経た後に，

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

が示され，上の設題は完全に解かれる．しかし，フーリエはこれにとどまらず，さらに任意の関数は「整数倍の諸弧の sin 又は cos」に分解できるという大胆な命題を打ち出す．

これは，上の設題で言えば，端面の定常温度 z が「常に 1」ではなくて，$z = \varphi(y)$ という任意の関数で表される場合でも、常に解けることを意味する．

フーリエは，まず，任意の関数 $\varphi(x)$ が整数倍の諸弧の sin で表されることを示す．すなわち，

$$(1) \qquad \varphi(x) = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x + \dots$$

とおくと，長い計算を経て，

$$\frac{1}{2}\pi\varphi(x)=\sin x\int\varphi(x)\sin x\,dx+\sin 2x\int\varphi(x)\sin 2x\,dx+\sin 3x\int\varphi(x)\sin 3x\,dx+\dots$$

が得られるので，これより諸係数 $a, b, c, \dots$ が求まる，というわけである．

なお，フーリエは (1) 式の両辺に $\sin ix\ dx$ を掛けて $x=0$ から $x=\pi$ まで積分するという簡単な方法も示している (第 63 節)．また，cos による展開については，これと同様の簡単な方法のみを示している (第 67 節)．

もっとも，以上の計算は収束や積分可能性を厳密に検討していない等の欠陥があり，$\varphi(x)$ に何らかの制約を課さなければ成り立たない議論であることが後に次第に明らかになっていく．

5　その他の数学的手法の考察

07 年論文において熱の理論を展開する際にフーリエが考察した数学的手法はフーリエ級数だけではない．他の例を以下に 2 つ挙げよう．

1) Sturm-Liouville の問題

第 3 設題の球のケースの考察において，フーリエは，その解の式に現れる $\sin n_\alpha x$ につき，一種の直交関係

$$\int_0^r \sin n_\alpha x\ \sin n_\beta x\ dx=0, \qquad \alpha\neq\beta \text{ のとき}$$

が成り立つことを証明している (第 101 節)．また，任意の関数 $F(x)$ は次のような級数で表されると説いている (第 101 節)．

$$F(x)=\frac{a_1\sin n_1x+a_2\sin n_2x+a_3\sin n_3x+a_4\sin n_4x+\dots}{x}$$

ここで n_i は $\dfrac{nX}{\tan nX}=1-\dfrac{h}{K}X$ を満たす無限個の n を小さい方から順に並べたものである (X は球の半径)．また，係数 a_i を表す式は次の通りである (第 101 節)．

$$a_i=\frac{2\int_0^X x\sin(n_ix)F(x)dx}{X-\frac{1}{2n_i}\sin(2n_iX)}$$

これらの級数や関係式はフーリエ級数の場合といささか類似した点があるが，特に決まった名称は与えられていないようである．1836 年頃には Sturm と Liouville がこの種の問題を発展させてより進んだ考察を行い，いわゆる「Sturm - Liouville 問題」を研究している．07 年論文はその先駆けとなったと評価できよう．

2) ベッセル関数

円柱に関する第 4 設題を解決するためには，

$$y+\frac{dy}{d\theta}+\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}=0$$

という微分方程式を解く必要があった．フーリエは無限級数を利用してこれを解いているが，現在の数学の言葉で言えば，この微分方程式は 0 階のベッセル関数 $J_0(z)$ に該当するものである．フーリエは，任意の関数 $f(x)$ を次の形に展開することを考えている (第 130 節).

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(j_m x)$$

ここで j_1，j_2，j_3，$\ldots$ は，$J_0(z)$ の正の零点を小さい方から順に並べたものを表す.

フーリエは，$J_0(z)$ について，その諸根がすべて実数であること (第 121 節)，一種の直交性を持つこと (第 133 節) [3]，一定区間内の関数を (2) のように J_0 の無限級数の形で表示できること (第 134 節) 等の重要な性質を示した．ベッセル関数の名称は，この関数を研究した Friedrich Wilhelm Bessel(1784-1846) にちなむものだが，Bessel の研究はフーリエの 07 年論文より 10 年以上後になされたのだからベッセル関数と呼ぶのは適当でないとの指摘もある[4]．いずれにせよ，07 年論文でフーリエ級数のみならずベッセル関数の検討もなされていたことは注目に値する.

結語[5]

1．07 年論文に含まれる数学的な内容は 22 年書と比較してそれほど異なるものではない．ただし，22 年書の第 9 章は 07 年論文以降に得た注目すべき数学的成果を収録している.

2．07 年論文において，フーリエは，熱の運動の法則を初めて数学的に表現することに成功し，そこから生ずる微分方程式を解くことによって，様々な形状の物体の温度変化を具体的な数式で示した。また，自己の理論の一部につき，その正当さを実験データで実証した.

3．熱の運動の微分方程式の解法は相当の困難を伴うものであったが，フーリエ

---

[3] この直交性は、現代風に書けば

$$\int_0^1 x J_0(j_m x) J_0(j_n x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} J_1^2(j_m) & m = n \end{cases}$$

となるが、フーリエは

$$\int x u_j u_i \, dx = 0 \qquad i \text{ と j は異なる}$$

及び

$$\int x u_i^2 \, dx = \frac{R^2 U_i^2}{2} \Big(1 + \big(\frac{hR}{2^2 K \sqrt{\theta_i}}\big)^2\Big).$$

という形で示している。この式の諸記号については３ 4) 参照。

[4] I. Grattan-Guinness, Joseph Fourier 1768-1830, MIT Press, Cambridge, Ma., 1972, 375-377.

[5] ここで述べる結語は、本稿の記述から導かれるものというよりは、参考文献① の執筆に当たって筆者が得た結論の紹介である。その基礎となる諸考察については、参考文献①をインターネット上で参照されたい。

は種々の数学的手法を考案してその困難を乗り越えた．彼が考察した数学的テーマとしては,「フーリエ級数」のほか,「0階のベッセル関数」,「Sturm - Liouville 問題の端緒」などがある．フーリエ級数だけでは限られた設題しか解けない．
4．07年論文においては, フーリエは「フーリエ級数を用いて」設題を解くことに特別の意義を見出しているとは言い難い．彼は，フーリエ級数の提示自体よりも，種々の数学的手法を用いて熱の運動の問題を厳密に解いたことに最大の誇らしさを感じている．

[1] J. Fourier, Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, Oeuvres de Fourier, Tome second, Paris, 1890, 215-221. この論文は，Darboux が注で記しているように，Fourier の名前で掲載されているものの，実際に書いたのは Poisson である．

[2] I. Grattan-Guinness, Joseph Fourier 1768-1830, MIT Press, Cambridge, Ma., 1972, 33-440.

[3] J. Fourier, Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides, Mémoire de l'Académie Royale des Sciences, 4 (1819-1820:publ.1824), 185-555.

[4] J. Fourier, Suite du mémoire intitulé: Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides, Mémoire de l'Académie Royale des Sciences, 5 (1821-1822:publ.1826), 153-246.

[5] J. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Didot, Paris, 1822.

[6] J. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Oeuvres de Fourier, Tome premier, Paris, 1888.

[7] J. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Oeuvres de Fourier, Tome second, Paris, 1890, 1-94.

[8] J. Fourier, Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur, Mémoire de l'Académie Royale des Sciences, 8 (1829), 581-622; Oeuvres de Fourier, Tome second, Paris, 1890, 145-181.

[9] 以下の記述については，[2] 83-87 頁参照．

参考文献

フーリエの熱の理論について
① 植村栄治，熱の数学的理論を通して見た初期フーリエ級数論史，放送大学大学院修士論文，未刊行，2003 年．なお，この修士論文は，フーリエの 07 年論文全体を訳出するとともにその数学史的分析を試みたものであるが，その全文は，http://yamaguti.ddo.jp/xml/h15-syuron.html で参照できる．
② 西村重人,「熱の解析的理論」Fourier 展開公式と Fourier 積分公式その Fourier 自身による証明, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1257 号, 京都大学数理解析研究所, 2002, 76-87.

③ 西村重人,「熱の解析的理論」熱方程式の導出に至る過程, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1317 号, 京都大学数理解析研究所, 2003, 21-30.
　その他，フーリエないしフーリエ級数全般について
・新井仁之,『フーリエ解析学』講座 数学の考え方 17 巻，朝倉書店，2003.
・F. クライン (足立恒雄・浪川幸彦監訳),『19 世紀の数学』, 共立出版, 1995.
・グレイゼル (保坂秀正・山崎昇訳),『グレイゼルの数学史　Ⅲ』, 大竹出版, 1997.
・T. W. ケルナー (高橋陽一郎訳),『フーリエ解析大全　下』, 朝倉書店, 1996.
・J. デュドネ編 (上野健爾・金子晃・浪川幸彦・森田康夫・山下純一訳),『数学史 1700-1900　Ⅰ, Ⅱ』, 岩波書店, 1985.
・中村周,『フーリエ解析』応用数学基礎講座 4 , 朝倉書店, 2003.
・中村宏樹,『偏微分方程式とフーリエ解析』, 東京大学出版会, 1981.
・F. ボウマン (平野鉄太郎訳),『ベッセル函数入門』, 日新出版, 1963.
・U. ボタチーニ (好田順治訳),『解析学の歴史』, 現代数学社, 1990.
・俣野博・神保道夫,『熱・波動と微分方程式』岩波講座 現代数学への入門 6 , 岩波書店, 1996.