Carlitz ゼータ関数について

東京理科大学理工学部　浜畑 芳紀

1930 年代に L. Carlitz によって有限体上の多項式環のゼータ関数が導入され, 現在までに著しい結果が証明されているが, あまり広く知られていないように思う. 本稿では簡単にその結果を述べたい.

1. Carlitz ゼータ関数

記号の準備をする. $\mathbb{F}_q$ を q 個の元からなる有限体とし, $A = \mathbb{F}_q[T]$ をその体上の多項式環, $K = \mathbb{F}_q(T)$ を A の商体とする. K_∞ を K の絶対値 $|\ \ |$ ($|a| = q^{\deg a}$) に関する完備化, C_∞ を K_∞ の代数的閉包の完備化とする. さらに A の monic な元全体を A_+ とおく. このとき, $A_+, A, K, K_\infty, C_\infty$ は, それぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ と類似の性質をもつ. 後者の集合たちに対して Riemann ゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ が関係しているが, 前者の集合たちに対しても関係するゼータ関数が存在する. これは $\zeta_A(s) = \sum_{a \in A_+} |a|^{-s}$ によって定義され, H. Kornblum によって研究された. Kornblum については, [11], [12] を参照されたい. Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の各項に絶対値がついていないことに気がつけば, $\zeta_A(s)$ の定義の各項の絶対値をはずしたものを考えるのは自然である. 1935 年に L. Carlitz は次のようなゼータ関数を定義した.

$$\zeta_C(s) = \sum_{a \in A_+} \frac{1}{a^s}.$$

これは Carlitz ゼータ関数, Carlitz-Goss ゼータ関数, Goss ゼータ関数などと呼ばれているが, 本稿では Carlitz ゼータ関数と呼ぶことにする. $\zeta_C(s)$ は $s \in \mathbb{N}$ に対して収束し, K_∞ に値をとり, Euler 積表示をもつ.

$\mathbb{Z}$ において偶数, 奇数の区別があるが, これを単数の個数によって定義されていると考えると, 我々の場合にも「偶数」と「奇数」を定義することができる. A の単数は $q-1$ 個あるから, $m \in \mathbb{Z}$ が「偶数」とは, m が $q-1$ の倍数となることとし, 「偶数」でないとき「奇数」とする. Riemann ゼータ関数の場合, 正の偶数 $2n$ での値は, Bernoulli 数, $2\pi i$ と $2n$ の階乗で表示できた. 次は Carlitz による結果である.

定理 (Carlitz, 1935 年) m が正の「偶数」のとき,

$$\zeta_C(m) = -\frac{B_m \widetilde{\pi}^m}{(q-1)\Pi(m)}.$$

ただし, $B_m, \widetilde{\pi}, \Pi(m)$ はそれぞれ有理関数体上の Bernoulli 数, "$2\pi i$", m の "階乗" である.

2. Drinfeld 加群

1974 年, V.G. Drinfeld は楕円加群と呼ばれる, ある A-加群の構造を導入した. これは現在, Drinfeld 加群と呼ばれているのでここでもそう呼ぶことにする. これは代数体上に現れる数論の研究対象の類似であり, 階数が 1 のとき円分多項式, 階数が 2 のとき楕円曲線に類似の性質をもつ. 関数体上の $GL(2)$ の Langlands 予想の研究のために導入されたものであるが, もともとは KdV 方程式からアイデアを得たようである. 階数 1 の場合は L. Carlitz

（1938 年）によって既に考察されていた. Drinfeld は Carlitz の結果を知らないで, Drinfeld 加群を定義したのである.

Drinfeld 加群は様々な問題に利用されてきたが, ここでいくつか挙げておく. 1. 関数体の Langlands 予想: Drinfeld 自身, Drinfeld 加群の moduli 空間を使って, $GL(2)$ の場合にほぼ解決した. 後に Drinfeld 加群を拡張して "shtuka" というものを導入して, $GL(2)$ の場合を完全に解決した. この結果は, L. Lafforge によって使われ, $GL(n)$ の場合が解決した. 2. 関数体上の谷山-志村予想: 1970 年代に正しいことが既に知られていたが, きちんと書かれたものがなかった. 1996 年に Gekeler- Reversat が証明の詳細を発表している. 3. ソリトン理論: 既に述べたように, KdV 方程式の理論から Drinfeld 加群の着想を得ているから, これがソリトン理論と関係するのは当然である. これについては D. Mumford の論文 [14] を参照されたい. この論文の方法を使って, G.W. Anderson はソリトン理論を代数的整数論や数論幾何学の問題に応用している. Drinfeld 加群に関連して, 佐藤グラスマン多様体の概念があることも注意しておく.

D. Goss は Drinfeld 加群の研究の過程で, Carlitz の仕事に気づき, Carlitz ゼータ関数の研究を始めた. Carlitz ゼータ関数と同様の発想で, 標数正の保型形式を導入し, 基本的結果を学位論文としてまとめた（1977 年）. さて Riemann ゼータ関数の負の整数での値について, 偶奇に分けて公式があるが, その類似として次の結果を得た.

定理 (D. Goss, 1979 年) s が負の整数のとき, $\zeta_C(s)$ は有限和. 特に s が負の「偶数」のとき, $\zeta_C(s)=0$. s が負の「奇数」のとき, $\zeta_C(s)\in A$.

3. 超越性

Riemann ゼータ関数の場合, 1 より大きい奇数での値が超越数であるか否か何も分かっていない. 無理性に関して次の 2 結果が知られている：1. $\zeta(3)$ は無理数である（R. Apéry, 1979 年）, 2. $\zeta(5),\zeta(7),\zeta(9),\zeta(11)$ のうちの少なくとも 1 つは無理数（W. Zudilin, 2002 年）. 1991 年, J. Yu は次のような結果を示した.

定理 s が正の整数のとき, $\zeta_C(s)$ は K 上超越的.

証明には "高次元の Drinfeld 加群" が使われている.

4. Riemann 予想

Riemann ゼータ関数の Riemann 予想の類似を考えるためには, Carlitz ゼータ関数の定義域を拡張する必要がある. そのために $n\in\mathbb{N}$ と $s=x+iy\in\mathbb{C}$ に対して, $n^s=(e^x)^{\log n}e^{iy\log n}$ となることに注目する.

K の標数を p とし, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする. 1979 年に D. Goss は $S_\infty := C_\infty^* \times \mathbb{Z}_p$ を導入して, Carlitz ゼータ関数を S_∞ 上に拡張している. 正確に述べると, $a\in A_+$ と $s=(x,y)\in S_\infty$ に対して, $a^s = x^{\deg a}\langle a\rangle^y$ （$\langle a\rangle := aT^{-\deg a}$）と定義する. このとき $m\in\mathbb{Z}$ は (T^m, m) と見なせる. 最終的に次のような結果（Riemann 予想の類似）が証明された.

定理 $y\in\mathbb{Z}_p$ を任意にとって固定. $\zeta_C(x,y)=0$ となる x は simple であり, $x\in K_\infty$

$q=p$ の場合が D. Wan（1996 年）によって示され, D. Wan の証明の簡易化が J. Diaz-Vargas（1996 年）によってなされた. J. Sheats（1998 年）が一般の場合を Diaz-Vargas と同様の方法で解決した.

5. L. Carlitz について

Carlitzの略歴を書いておく. 1907年12月26日に米国Philadelphiaに生まれる. 1930年, Pennsylvania大学で学位を取得. 1930年から1932年まで, California工科大学とCambridge大学にて研究. 1932年から1977年までDuke大学に勤務. 1999年9月17日に逝去. 研究対象は数論, 有限体, 組合せ論, 特殊関数など. これまでに770本以上の論文を発表している. 彼の指導の下で学位を取得した学生（たとえばD.R. Hayes）は45人いる.

参考文献

1. L. Carlitz, On certain functions connected with polynomials in a Galois field, Duke Math. J., **1** (1935), 137-168.
2. L. Carlitz, A class of polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 167-182.
3. J. Diaz-Vargas, Riemann hypothesis for $\mathbb{F}_p[T]$, J. Number Theory **59** (1996), 313-318.
4. V.G. Drinfeld, Elliptic modules, Math. Sbornik **94** (1974), 594-627.
5. D. Goss, Von Staudt for $\mathbb{F}_q[T]$, Duke Math. J., **45** (1978), 885-910.
6. D. Goss, v-adic zeta functions, L-series and measures for function fields, Invent. Math. **55** (1979), 107-119.
7. D. Goss, Basic Structures of Function Fields, Springer, 1996.
8. D. Goss, A Riemann hypothesis for characteristic p L-functions, J. Number Theory **82** (2000), 299-322.
9. D. Goss, The Impact of the Infinite on the Riemann Hypothesis for Characteristic p Valued L-series, In: Algebra, Arithmetic and Geometry with Applications (West Lafayette, 2000), 357-380, Springer, 2004.
10. D.R. Hayes, Leonard Carlitz (1907-1999), Notices of the AMS, **48** (2001), 1322-1324.
11. H. Kornblum, Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progression, Math. Z. **5** (1919), 100-111.
12. 黒川信重, 類似の魅力, 数学セミナー, 1990年9月号.
13. L. Lafforge, Chtoucas de Drinfeld et correspondence de Langlands, Invent. Math. **147** (2002), 1-241.
14. D. Mumford, An algebro-geometric construction of commuting operators and solutions to the Toda lattice equation, Korteweg de Vries equation and related nonlinear equation, In: Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry, pages 115-153, Tokyo, 1978. Kinokuniya Book Store.
15. J.T. Sheats, The Riemann hypothesis for the Goss zeta function for $\mathbb{F}_q[T]$, J. Number Theory **71** (1998), 121-157.
16. D. Wan, On the Riemann hypothesis for the characteristic p zeta function, J. Number Theory **58** (1996), 196-212.
17. J. Yu, Transcendence and special zeta values in characteristic p, Ann. Math. **134** (1991), 1-23.