数学からみた相対性理論
ーヒルベルトの第6問題ー

佐野　茂*

平成17年2月16日

1　はじめに

相対性理論の誕生から100年がたち，物理学会など関係する学会がシンポジウムなどを企画している。それは，時間と空間に関する科学の常識をくつがす理論だったからである。そして相対性理論の与えた影響は科学だけにとどまらず，原子力の発見へとつながり20世紀の世界秩序にまでおよんでいる。そのためアインシュタインがこの理論を生み出す思考の課程は多くの人たちに興味がもたれ多数の論説が出されている。

他方，純粋数学の理論や数学者が直接間接にこの理論誕生に貢献していることはよく知られている。そこで本稿ではこうした，アインシュタインが数学の考え方をどのようにいかしていったかをまとめる。

数学では公理から定理を導くというのは，ユークリッド平面幾何より古くからなじみのある論理である。ヒルベルトはこのような公理を用いて議論する方法を数学だけでなく物理にも使えないかと考えている。

1900年のパリでの国際数学者会議で23の問題を提出している（[Su]）。その中の第6問題で物理の公理を掲げている。物理においても数学のように公理から出発して多くの現象を説明する論理展開が可能ではないかとしている。このような公理に基づく物理学の可能性を考える上でも相対性理論は興味深い。

特殊相対性理論誕生における，ポアンカレとアインシュタインの相対性原理に対してとった態度の違いは興味深い。アインシュタインは相対性原理と光速不変原理を公理として認め理論展開して時間の遅れ，長さの収縮などを示している。ところが，ポアンカレは公理として認めるという態度をとらなかった。相対性原理は，公理として認められるべきかどうか明らかにすべきとしている。そこに，ユークリッド幾何における公理への疑問の影響があったものと考えられる。

それは，ユークリッド幾何の平行線公理の証明問題である。平行線公理を他の公理より証明せよという問題である。この問題への挑戦から，平行線公理を満足しない非ユークリッド幾何（双曲幾何）が発見されている。この問題に対し，ポアンカレは双曲幾何のモデルを与えるなど大きく貢献している。そして，公理を疑うことから数学が大きく発展するのをみている。そのため，すんなりと相対性原理を公理として採用できなかったのではないか。

その後，アインシュタインは重力が働く空間において等価原理と物理法則の一般座標変換に対する共役原理を新たな公理として採用して一般相対性理論へと理論を発展させている。

*職業能力開発総合大学校, 神奈川県相模原市 ssano@uitec.ac.jp

2　ポアンカレによる公理の本性と相対性原理

ポアンカレ (H.Poincaré) は1902年に出版された La Science et l'Hypothèse（科学と仮説）の中で公理の本性について考察している。カント (I.Kant) に従い公理とは先天的総合判断としている。数学において先天的総合判断といえる公理として，数学的帰納法を挙げている。そして，数学的帰納法が有効に使われる例として，数の四則演算を与えている。

ところが，ユークリッド幾何の公理に対しては，先天的総合判断といえるかと問うている。そうだとすると，これらの公理は非常に強い拘束力をもつので，これに反する命題を考えることも，またそういう命題に基づいて理論を作ることも許されなくなる。非ユークリッド幾何も存在しないことになる。

それゆえユークリッド幾何の公理は先天的総合判断とはいえないが，それでは実験的な真理であろうかと考察している。そして，仮に幾何学が実験科学ならば，絶えず訂正されなくてはいけないし，誤差があることを認めなくてはならない。よって，幾何学の公理は実験的事実でもないと結論づけている。

幾何学の公理は先天的総合判断でもなく実験的事実でもなく，規約であるとしている。あらゆる可能な規約の中から実験的事実によって導かれて行ったものである。しかし，選択にはなお自由の余地が残っており，矛盾は認めないがそれ以外には制限がない。公理を採用する際の実験的法則が近似的なものであっても，公理が依然として厳密に真であることを失わないのはこのためである。

このようにポアンカレは公理の本性について述べている。ここで幾何の公理は唯一に決まるのではなく選択の余地が残っているとしているが，その理由を補足する。ユークリッド幾何における平行線の公理

「直線とその上にない点を通る平行線は1本のみ存在する」

の代わりに

「直線とその上にない点を通る平行線は2本以上存在する」

を公理として認めることにより双曲幾何が誕生した歴史的経緯をふまえて，幾何の公理は唯一つに決まるものではないとポアンカレは述べているのである。次に物理に対しては公理をどのように考えているかをみる。

物理の原理は幾何学よりもいっそう経験に基づいているが，幾何学の公理における規約的な性質をそなえているとしている。そしてポアンカレは古典力学においても実験に基づく数学的推理や規約そして仮説があり，それらを明確に区別すべきであるとしている。それだけでなく古典力学自身も根本より見直す必要があると説いている。

1．絶対的空間は存在しないし，われわれが観測できるのは相対運動だけである。ところが，多くの場合，まるで絶対的空間があるかのように，力学の内容はそれに基づいて述べられている。

2．絶対的時間はありえない。2つの時間間隔が等しいといっても，その主張はなんの意味ももたない。主張が意味をもつのは，そう規約するときだけなのである。

3．2つの時間間隔の同等性について直接の観察がありえないばかりでなく，2つの異なった場所で起こる出来事どうしの同時性についても直接の観察はありえない。このことは時間の測定という論文で論じておいた。

4．つまるところ，ユークリッド幾何はそれ自身，いわば言葉の規約にすぎないのではないだろうか？　力学の内容は，非ユークリッド空間に基づいて述べることもできるだろう。非ユークリッド空間は少し不便かもしれないが，普通の空間のように正当なものである。

このように力学の問題点を適切に指摘するだけでなく，20世紀の物理学の指導原理ともいえる相対性原理も与えている。

1904年のセント・ルイスの国際学芸大会では相対性原理 (le principle de relativité) を「物理現象の諸法則は，静止した観測者であれ，一様な並進運動している観測者であれ同一でなくてはならない」と明確に定義している。ところが，ここでいうところの相対性原理は力学には成り立つが，電気現象には公理としてでなく証明すべきものとしている。

これらのポアンカレの考え方はローレンツ（H.A.Lorentz）に多くの影響を与えた。

3　ローレンツの電子論

19世紀には，天空に星が輝いて見えるのはどうしてかが問題になっていた。光は横波なので，光を伝播する媒体が必要となる。それはエーテルと呼ばれ固体のように横波を伝えるとされた。そして宇宙空間にエーテルが充満していて，星から出た光はそこを伝わって我々に見えるのだと説明された。このエーテルはガラスや水にも染み込んでいて，光を運ぶのである。エーテルは絶対静止していて，そこを太陽や惑星などの天体や光が飛び交っている宇宙観が出来上がっていた。

1864年にマックスウェル（J.C.Maxwell）により光は電磁波の一種であることが予想され，1888年にヘルツ（H.R.Hertz）により電気花火として確認されていた。電磁波は電場の波動と磁場の波動が互いに直交し位相が一致している横波であることが，この方程式から分かる。横波は本来固体の中を伝播する波であることから，エーテルという仮想媒体の中を伝わる波であると考えられたのである。

ところが，マイケルソン・モーレイ (A.A.Michelson, E.W.Morley) の実験ではエーテルの存在が証明できなかった。そこでその理由を明らかにすることが物理学上の大きな問題となっていた。

「エーテルの並進運動に関する問題」についての国際会議における，「運動媒体中のエーテルのふるまいについて」分科会にオランダの物理学者ローレンツは参加している。

そうした背景のもと，ローレンツはエーテルに対して静止した座標系 (x, y, z) で成り立つ電磁波を表すマクスウェルの方程式を用いてマイケルソン・モーレイの実験結果を説明しようと試みている。それは，逆の効果により打ち消しあうことを示すことにより，実験ではエーテルを検出できなかったと証明しようとするものである。マックスウェルの方程式は

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{d} = & \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{h} = & 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} = & \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \rho \mathbf{v}\right) \\ \operatorname{rot} \mathbf{d} = & -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\mathbf{h}$ は磁場ベクトル，$\mathbf{d}$ は電気ベクトル，ρ は電荷密度である。また，電荷に働く力 $\mathbf{f}$ は

$$\mathbf{f} = \mathbf{d} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{h} \tag{2}$$

である。ここで $\mathbf{v}$ は静止座標系をあたえるエーテルに対する電荷の速度である。

ローレンツの目的は，x 軸方向に一定の速さで w で並進運動している物理系の中で電磁現象を調べて，それらが運動の影響を示さないことを証明することである。この事を静止座標系における上式を用いて示そうとすると式が煩雑になるので，新たな独立変数を導入しよう

$$x' = kl(x - wt),\ y' = ly,\ z' = lz,\ t' = kl\left(t - \frac{w}{c^2}x\right) \tag{3}$$

ただし，$k=\dfrac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}$ である。$\mathbf{u}$ を運動系に対する相対速度とすると，絶対速度の成分は $u_x+w,\ u_y,\ u_z$ であたえられる。そして

$$u'_x=k^2u_x,\ u'_y=ku_y,\ u'_z=ku_z \tag{4}$$

を成分とする新しいベクトル $\mathbf{u}'$ をとる。同様に

$$\rho'=\frac{1}{kl^3}\rho \tag{5}$$

新たに2つの

$$\begin{cases} d'_x=\dfrac{1}{l^2}d_x,\ d'_y=\dfrac{k}{l^2}\left(d_y-\dfrac{w}{c}h_z\right),\ d'_z=\dfrac{k}{l^2}\left(d_z+\dfrac{w}{c}h_y\right) \\ h'_x=\dfrac{1}{l^2}h_x,\ h'_y=\dfrac{k}{l^2}\left(h_y+\dfrac{w}{c}d_z\right),\ h'_z=\dfrac{k}{l^2}\left(h_z-\dfrac{w}{c}d_y\right) \end{cases} \tag{6}$$

とおく。このとき基礎方程式は

$$\begin{cases} \mathrm{div}'\,\mathbf{d}'=\left(1-\dfrac{wu'_x}{c^2}\right)\rho', \\ \mathrm{div}'\,\mathbf{h}'=0, \\ \mathrm{rot}'\,\mathbf{h}'=\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial\mathbf{d}'}{\partial t'}+\rho'\mathbf{u}'\right), \\ \mathrm{rot}'\,\mathbf{d}'=-\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial\mathbf{h}'}{\partial t'}\right) \end{cases} \tag{7}$$

となる。$\mathrm{div}', \mathrm{rot}'$ は変数 x', y', z' に対するダイバージェントやローテーションである。ここで少し仮定をつけることにより，運動する座標系でもマクスウェルの方程式は成り立つことになる。ポアンカレの相対性の原理が電磁現象に対してもいえたことになるのである。

そしてエーテルの存在が確認出来なかったマイケルソン・モーレイの実験の説明としている。

4　アインシュタインの特殊相対性理論 ―運動の部―

ここでは1905年に誕生した特殊相対性理論（運動している物体の電気力学について）の基本的な事柄を述べる。マイケルソン・モーレイの実験による光の媒体（エーテル）に対する地球の相対運動を発見しようとする試みの失敗から絶対静止というものはないと考えられるとしている。そして起電力など電気現象も力学と同じようにどの慣性系の座標においても方程式が同じ形で成り立つはずとし，このような推測を第一の要請として相対性原理と呼んでいる。

これはエーテルの存在は証明できないことから，特別の資格をもつ静止系を仮定する必要はないとしているのである。エーテルに固定されている座標系をもとにして議論を進めているローレンツの理論と大きく異なるところである。

また，真空中では光は常に一定の速さ c で伝わり，この速さは光源の運動状態には無関係である。これをを第二の要請としている。

以上の背景のもと，アインシュタイン（A.Einstein）は

（1）慣性系の間における相対性原理

（2）光速不変の原理

（3）v/c が十分小さい場合にガリレイ変換を再現

を仮定して，異なる慣性系の間の空間の点の位置と時間の関係を与えている。

これは数学では（1），（2）を公理とし，条件（3）を仮定して時間の遅れ，長さの収縮，同時性の破れを導けという問題となる。実際アインシュタインの論文を読むと，そうした姿勢でまとめている。

まず，静止系 K の空間と時間の座標 x, y, z, t をとり，x 軸の正方向に一定速度 v で運動する運動系 k の空間と時間の座標 ξ, η, ζ, τ を考える。座標軸 x と ξ は同一直線上にあり，座標軸 y と η は並行，座標軸 z と ζ は並行とする。相対性原理（1）より静止系 K と運動系 k の座標変換は1次変換であたえられる。x 軸方向にでた光は原理（2）より，どちらの座標系でも速度 c である。さらに，仮定（3）を用いて

$$\tau = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \eta = y, \quad \zeta = z \tag{8}$$

を得る。

この議論により絶対的空間や絶対的時間は否定される．そのことはポアンカレだけでなく，マッハなどニュートン力学に疑問をもつ研究者によりすでに指摘されていたが，正確な定式化はされていなかった。

他方ローレンツは光の媒体であるエーテルにおけるマックスウェルの方程式の運動する座標への変換による不変性をみたすべきと (3) 式のように天下り的に与えている。エーテルに固定された座標からの時間の遅れや長さの収縮は示されている。ところが光速 c はあくまでもエーテルに固定された座標における速度であり，逆の関係がいえない事になる。そこがアインシュタインの理論と異なる点である。

アインシュタインは光速不変を原理とすることにより，ローレンツとポアンカレの理論より大きく飛躍している。ローレンツの仮定の多い理論と比較すると，この光速不変の原理により全体が見通しよい理論となっていることが理解できる。

光速不変性は若いころから問題意識としてあったようだ。自伝ノートでは 16 歳のときに

「もし私が光速で走りながら光線を追いかけたとすると，光線は空間的振動を示す空間的振動を示す静止した電磁場とみえることになろう。しかし，経験に照らしても，マックスウェルの方程式からみても，そのようなものがあるとは思えない。そのような観測者の立場からみても，すべては地面に対して静止している観測者にとってと同じ法則にのっとることは，最初から直感的に明らかだと思われた。」

とある。自然現象の本質を見抜くするどい洞察力を若い頃からもっていたことが理解できる。

5　特殊相対性理論 —電気力学の部—

アインシュタインは電気力学においても相対性原理と光速不変の原理に基づき議論している。真空に対するマックスウェルの方程式と携帯電流を考慮したマックスウェルの方程式にたいする慣性系間の座標変換での不変性について議論している。

静止座標系 x, y, z, t における電気ベクトル $\mathbf{d}$ と磁気ベクトル $\mathbf{h}$ また運動する座標系 ξ, η, ζ, τ での電気ベクトル $\mathbf{d}'$ と磁気ベクトル $\mathbf{h}'$ がそれぞれ，$\mathbf{v} = \mathbf{0}$ のときのマクスウェルの方程式 (1) 式を満足するという条件から $\mathbf{d}$，$\mathbf{h}$ と $\mathbf{d}'$，$\mathbf{h}'$ の関係を導いている。

その結果を用いてドップラーの原理と光行差の理論や完全な鏡に加えられる輻射圧の理論を与えている。

このアインシュタインの仕事は大学時代の恩師であるミンコフスキー（H.M.Minkowsky）により驚きをもって迎えられている。そしてミンコフスキーは 1908 年に 3 次元空間 x, y, z に時間 t を

加えた 4 次元の多様体で

$$s^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{9}$$

を保つ空間を与え，この s^2 を保つ 1 次変換をローレンツ変換と呼んでいる。この多様体により，見通しのよい理論へと発展している。

このようにして電磁波は絶対静止系上で静止したエーテルを伝播する波であるという当時の常識は否定され，慣性系間の相対性原理が正しくマックスウエルの方程式はすべての慣性系で成立しているという理論は自然なものとして受け入れられるようになっていった。そして相対性原理は次のように定式化された。

特殊相対性原理　「物理法則はローレンツ変換に対して不変（ローレンツ共役）でなくてはならない。」

この慣性系の間における特殊相対性原理は，20 世紀における物理の指導原理としての役割をはたしていった。そうしたことからもこの原理は先天的総合判断といえよう。

6　一般相対性理論

アインシュタインは重力が働く空間へと理論を発展させようと試みている。ここにおいても，公理主義の態度は一貫している。

等価原理：自由落下する観測者は重力を感じない。

この経験に基づく原理は自由落下する粒子の近傍のミンコフキーの座標 ξ^α により，運動方程式

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \tag{10}$$

として表される。ここで τ は固有時である。この運動方程式を一般の座標 x^μ であらわそう。座標変換を $x^\mu = x^\mu(\xi)$ とし，その逆変換を $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$ とすると

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \tag{11}$$

となる。ここで $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ はクリストッフェルの記号で

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \tag{12}$$

と置いている。この運動方程式の幾何学的な意味はリーマン幾何を用いることにより明らかとなる。

リーマン空間 $\{M,\ g\}$ において，リーマン計量によりクリストッフェルの記号は

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda}\right) \tag{13}$$

と表される。(11) は測地線の式となり，自由粒子の軌道は測地線に沿っている。

こうしてアインシュタインは

（1）物理法則は一般座標変換に対して共変である。

（2）等価原理

（3）弱い静的な重力の場合にポアッソンの方程式を再現する。

を原則とする理論を 1915 年に一般相対性理論として提唱している。

まず，ニュートン力学では物質の質量分布 ρ を与えてそれの作る重力ポテンシャル ϕ は

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{14}$$

で与えられる。このポアッソンの方程式を一般相対性原理を満たすように書くためには，(14) の両辺が 2 階のテンソルになる必要がある。質量密度はエネルギー密度であると相対論的に読みかえて，2 階のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の 00 成分 T^{00} とする。推定として

$$\Delta g^{00} = 8\pi GT^{00}$$

を成分 $\mu\nu$ すべてに拡張したもの

$$G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}$$

のはずである。左辺の $G^{\mu\nu}$ が満足すべき条件として

（1）一般相対性原理より $G^{\mu\nu}$ は 2 階のテンソルである。

（2）エネルギー運動量保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ を満足。すなわち，$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ が恒等的に成立しなくてはいけない（∇_μ は共変微分)。

（3）弱い静的な重力の場合にポアッソンの方程式を再現する。

この（1)，(2）の条件を満たすものは定数倍を除いて，リッチテンソル $R^{\mu\nu}$ と計量テンソル $g^{\mu\nu}$ により

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$$

で与えられることが示される。まとめて重力場方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \tag{15}$$

この一般相対性理論はヒルベルト（D.Hilbert）により真に数学的精神を感じる優れた理論として歓迎され，アインシュタインはゲッチンゲン大学に招待されて講演している。ヒルベルトは自分の出題した物理の公理を与えよという問題への期待を超えた優れた解答だと感動したのだろう。

ヒルベルトも独自にこの重力場方程式を変分法を用いて導いているが，それは控えめにして，ボヤイ賞という名誉ある数学の賞へアインシュタインを推薦している。

7　まとめ

科学史家が多くの文献を詳しく精査して，特殊相対性理論の生成過程を明らかにしようと試みている（[Ab]，[Ni])。ところが，実際に理論を生み出そうとすると文献をいくら積み上げてもだめで，仮定すべき事柄と主張すべき内容を単純化してはっきりと意識する必要がある。そして，方針を明確にして議論をすすめていくものである。アインシュタインが確信をもって論文にまとめている姿勢は鮮明である。問題が解決されるとき，その論理は明快であることが多々ある。そうした姿勢をアインシュタインの論文に強く感じる。

特殊相対性原理のその後の影響は大変大きい。シュレデンガーの量子論では電子の運動を存在確率を与える方程式で表した。けれども，このシュレデンガーの方程式はローレンツ共役になっていなかった。物理法則はローレンツ共役であるという特殊相対性原理にしたがい，シュレデンガーの方程式の本来の式としてクライン・ゴルドン方程式とディラック方程式が提出された。これが相対論的量子論である。

ポアンカレは相対性原理は力学には成り立つが，電気現象には証明が必要な規約と考えていた。ところが相対性原理はローレンツ変換を用いて特殊相対性原理として定式化され，単なる物理法則を超えた先天的総合判断としての公理の役割をはたすようになっていったのである。

このように公理の考え方は物理の研究において多くの指針を与えてきた。今後も物理において重要な役割をはたしていくものと期待されよう。

参考文献

[Ab] 我孫子誠也, アインシュタイン相対性理論の誕生, 講談社,(2004).

[Ei1] Albert Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. der Phys.17(1905), pp.891-921.

[Ei2] Albert Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. der Phys. Ser.4, 49(1916), pp.769-822.

[Lo] H.A.Lorentz, Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller than That of Light, Proc. Roy. Acad. Amsterdam 6(1904), pp.809-831.

[Ni] 西尾成子, アインシュタインの研究, 中央公論社,(1977).

[Po] Henri Poincaré, La Science et l'Hypothèse, (1902)，河野伊三郎訳　科学と仮説　岩波書店.

[Su] 杉浦光夫編集, ヒルベルト２３の問題, 日本評論社,(1996).